

# Zusammenfassung Abiturstoff Mathematik

T. Schneider, J. Wirtz, M. Blessing

2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analysis</b>	<b>2</b>
1.1	Monotonie . . . . .	2
1.2	Globaler Verlauf . . . . .	2
1.3	Symmetrien bei GRF . . . . .	2
1.4	Nullstellen . . . . .	2
1.5	Extremstellen . . . . .	2
1.6	Wendestellen . . . . .	2
1.7	Anzahl *-Stellen . . . . .	2
1.8	Extremwertaufgaben . . . . .	3
1.9	Funktionenscharen . . . . .	3
1.10	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	3
1.11	Regression . . . . .	3
1.12	Ableiten . . . . .	3
1.13	Tangenten . . . . .	3
1.14	Normale . . . . .	4
1.15	Logarithmus . . . . .	4
1.16	e-Funktion . . . . .	4
1.17	Wachstum . . . . .	4
1.18	Asymptoten . . . . .	4
1.19	Aufleiten . . . . .	5
1.20	Integral . . . . .	5
1.21	Mittelwert . . . . .	5
1.22	Rotationskörper . . . . .	5
1.23	Trigonometrische Gleichungen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Geometrie</b>	<b>5</b>
2.1	Umformung Ebenen . . . . .	6
2.2	Lagebeziehungen . . . . .	6
2.3	Abstände . . . . .	6

# 1 Analysis

## 1.1 Monotonie

- monoton wachsend:  $x_1 < x_2; f(x_1) \leq f(x_2) \quad f'(x) \geq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton wachsend:  $x_1 < x_2; f(x_1) < f(x_2) \quad f'(x) > 0 \quad [x_1; x_2]$
- monoton fallend:  $x_1 < x_2; f(x_1) \geq f(x_2) \quad f'(x) \leq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton fallend:  $x_1 < x_2; f(x_1) > f(x_2) \quad f'(x) < 0 \quad [x_1; x_2]$

## 1.2 Globaler Verlauf

- Grad gerade:  $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow \infty$
- Grad ungerade:  $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$

## 1.3 Symmetrien bei GRF

- Sym. zur  $y$ -Achse:  $f(-x) = f(x)$ , alle Exponenten gerade
- Punktsym. zum Ursprung:  $f(-x) = -f(x)$ , alle Exponenten ungerade

## 1.4 Nullstellen

$f(x) = 0$  schneiden der  $x$ -Achse, Schnittpunkt  $y$ -Achse  $S_y = (0|f(0))$

## 1.5 Extremstellen

(1. notwendig, 2. hinreichend)

Hochpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von $f'$	
	$f''(x) < 0$	VzW von $f'$ von + nach -	(Rechtskurve)
Tiefpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von $f'$	
	$f''(x) > 0$	VzW von $f'$ von - nach +	(Linkskurve)
Sattelpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von $f'$	(= Wendepunkt mit waagerechter Tangente)
	$f''(x) = 0$	kein VzW von $f'$	oder
	$f'''(x) \neq 0$	kein VzW von $f''$	

## 1.6 Wendestellen

Extremstellen von  $f'$ :

- $f''(x) = 0$
- $f'''(x) \neq 0$   
( $> 0$  extrem fallend,  $< 0$  extrem steigend)

## 1.7 Anzahl \*-Stellen

$n$	Nst	Est	Wst
gerade	0 bis $n$	1 bis $(n-1)$	0 bis $(n-2)$
ungerade	1 bis $n$	0 bis $(n-1)$	1 bis $(n-2)$

## 1.8 Extremwertaufgaben

1. Welche Größe soll max. bzw. min. werden?
2. Grundformel für ges. Größe
3. Bestimmen einer Formel für die ges. Größe mit nur einer Variablen mithilfe der Aufgaben
4. Bestimmen der ES der gefundenen Funktion
5. Antwortsatz

## 1.9 Funktionenscharen

- Menge aller Funktionen  $f_k$ : Funktionenschar
- Menge der zugehörigen Graphen: Kurvenschar

Funktionsuntersuchung abhängig von  $k$ : Ortskurven Bsp.  $W(t|2t) \Rightarrow x = t \quad y = 2t = 2x \Rightarrow W(t|5) \rightarrow y = 5 \Rightarrow W(2|2x) \rightarrow x = 2$

## 1.10 Lineare Gleichungssysteme

Im GTR mit `rref()` lösen, sonst Additionsverfahren.

## 1.11 Regression

GTR: `STAT` → Calc (ab 4.)

## 1.12 Ableiten

- Produktregel:  
 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$   
 $f'(x) = u'v + uv'$
- Quotientenregel:  
 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$   
 $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Verkettung:  
 $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$   
 $f'(x) = u'v \cdot v'$
- Spezielle Ableitungen:  
 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$   
 $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$   
 $f(x) = \ln x$   
 $f'(x) = \frac{1}{x}$   
 $f(x) = b^x$   
 $f'(x) = \ln b \cdot b^x$   
 $f(x) = e^x$   
 $f'(x) = e^x = f(x)$

## 1.13 Tangenten

- $t: y = mx + c$
- Berührungspunkt:  $B(u|f(u))$
- Punkt außerhalb:  $P(x|y)$
- $m = \frac{f(u)-y}{u-x}$  (Differenzenquotient) =  $f'(u)$  (Differentialquotient)
- Gleichung:  $t: y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

## 1.14 Normale

- $n : y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$
- $m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t}$

## 1.15 Logarithmus

- $a^x = b \rightarrow x = \log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a(b)$
- $a^{\log_a(b)} = b$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- $\log_a 1 = 0$

## 1.16 e-Funktion

- $f(x) = \frac{1}{2}e^{2(x-1)} + 2$
- $f'(x) = e^{2x-1}$
- $F(x) = \frac{1}{4}e^{2x-1} + 2x + c$
- $\log_e(x) = \ln(x)$
- $\ln(e^x) = x \rightarrow \ln(e) = 1$
- $e^{\ln(x)} = x$
- 1. Stauchung mit Faktor  $\frac{1}{2}$
- 2. Streckung mit Faktor 2
- 3. Verschiebung von 1 nach rechts ( $x$ -Richtung)
- 4. Verschiebung von 2 nach oben ( $y$ -Richtung)
- $\ln(1) = 0$
- $e^x = a \rightarrow \ln(a) = x$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

## 1.17 Wachstum

- linear:  $f'(t) = k \quad f(t) = k \cdot t + c \quad c = f(0)$
- exponentiell:  $f'(t) = k \cdot f(t) \quad f(t) = c \cdot e^{kt} \quad c = f(0) \quad b = e^{\ln(b)} = e^k \quad k = \ln(b) = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad T_H = \frac{\ln(2)}{k}$
- beschränkt:  $f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \quad f(t) = S - c \cdot e^{-kt} \quad c = S - f(0)$

## 1.18 Asymptoten

- senkrechte Asymptoten an Polstellen (Definitionslücken)
- waagerechte Asymptoten:
  - Gebrochenrationale Funktionen:
    1. Zählergrad < Nennergrad:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$
    2. Zählergrad = Nennergrad:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
    3. Zählergrad > Nennergrad: keine Asymptote
  - e-Funktion bzw. exponentielle Funktionen:
    - \*  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$
    - \*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot e^{-x} + c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot e^x + c = c$$

### 1.19 Aufleiten

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \sin(2x - 2) + 4x^5 + 5$   $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$   
 $F(x) = 2\sqrt{x} - 3 \cos(2x - 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x^6 + 5x + c$   
 $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2} \cos(2x - 2) + \frac{2}{3}x^6 + 5x + c$
- $f(x) = \frac{1}{x}$   $F(x) = \ln x$   
 $F(x) = \ln x$
- $f(x) = \sin(3x + 1)$   $F(x) = x \cdot \ln x - x$   
 $F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + c$
- $f(x) = ax^n$

### 1.20 Integral

- $I_a(b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Nst. berechnen für Fkt. über und unter  $x$ -Achse:  
 $|\int_a^x f(x) dx| + |\int_x^b f(x) dx|$
- Schnittstellen für Fläche zw. zwei Fkt.  
 $|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx|$

### 1.21 Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### 1.22 Rotationskörper

- $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$  (um  $y$ -Achse: nach  $x$  umstellen, evtl. neue Schnittstellen berechnen)
- zw. 2 Fkt.:  $V = \pi \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

### 1.23 Trigonometrische Gleichungen

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d = a \cdot \sin(bx - bc) + d$$

$a$ : Streckung in  $y$ -Richtung (Amplitude)

$b$ : Streckung in  $x$ -Richtung (Frequenz)

$c$ : Verschiebung in  $x$ -Richtung

$d$ : Verschiebung in  $y$ -Richtung

$p$ : Periode ( $p = \frac{2\pi}{b}$ )

## 2 Geometrie

- Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- Kreuzprodukt:

$$\begin{array}{c}
 \cancel{a_1} \quad \cancel{b_1} \\
 a_2 \quad b_2 \\
 \times \\
 a_3 \quad b_3 \\
 \times \\
 a_1 \quad b_1 \\
 \times \\
 a_2 \quad b_2 \\
 \cancel{a_3} \quad \cancel{b_3}
 \end{array}
 \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

## 2.1 Umformung Ebenen

- Parameterform:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_{s_1} \\ r_{s_2} \\ r_{s_3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_{t_1} \\ r_{t_2} \\ r_{t_3} \end{pmatrix}$

→ Normalvektor:  $\vec{n} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t$

- Normalform:  $(\vec{x} - \vec{p} \cdot \vec{n}) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$  (Koordinatenform)

Hesse'sche Normalform:  $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 = d; \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

- Koordinatenform:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$

- Spurpunkte: KF nach 1 auflösen:  $\frac{x_1}{x_{1_0}} + \frac{x_2}{x_{2_0}} + \frac{x_3}{x_{3_0}} \Rightarrow$  Spurpunkte sind  $(x_{1_0}|0|0)$ ,  $(0|x_{2_0}|0)$  und  $(0|0|x_{3_0})$ .

Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, Richtungsvektoren zu den anderen bilden

## 2.2 Lagebeziehungen

- Gerade–Gerade:  $\vec{u} = s \cdot \vec{v}$ ? Richtungsvektoren vielfache?

✓: Liegt Aufpunkt auf der Gerade?  $\vec{a} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ ? ✓: identisch, ✗: parallel

✗:  $\vec{a} + r \cdot \vec{u} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$  – Gleichung geht auf  $\rightarrow r$  einsetzen und Schnittpunkt *oder* Gleichung unlösbar  $\rightarrow$  windschief

- Ebene–Ebene:  $\vec{n}_1 = s \cdot \vec{n}_2$ ? Normalenvek. Vielfache?

✓: gleiche Normalform? ✓: identisch, ✗: parallel

✗: in Koordinatenform umwandeln, ein Parameter in Abhängigkeit von anderen, in PF der anderen einsetzen  $\rightarrow$  Schnittgerade

- Gerade–Ebene:  $g$  in KF von  $E$  einsetzen, auflösen:

–  $r = x \rightarrow$  Schnittpunkt ( $r$  in  $g$  einsetzen)

–  $x \neq y \rightarrow$  parallel

–  $x = y \rightarrow g$  liegt in  $E$

## 2.3 Abstände

- Punkt–Punkt:  $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_1)^2}$

- Punkt–Gerade: Ebene durch  $P$  mit  $\vec{n} = \vec{u}$  (Richtungsvek.), NF in KF umrechnen,  $g$  in  $E$  einsetzen (schneiden), nach  $r$  auflösen,  $r$  in  $g$  einsetzen  $\rightarrow$  Punkt  $Q$ ,  $d(P, g) = d(P, Q)$

- Gerade–Gerade: parallel: (Stütz-)Punkt–Gerade  
windschief: Ebene mit beiden Richtungsvektoren und  $P$  von  $g$ ,  $d(P_h, E)$

- Punkt–Ebene:  $P(p_1|p_2|p_3), \vec{n} \cdot \vec{x} = d : \quad d(P, E) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p} - d}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$

- Gerade–Ebene: parallel:  $P$  von  $g \rightarrow d(P, E)$

- Ebene–Ebene: parallel:  $P$  von  $E \rightarrow d(P, F)$