Übungsblatt 7B

Lineare Algebra für Informatiker, PD Dr. Viktor Levandovskyy, SS 2016

Für Matrikelnummer: 357358
Abgabezeitpunkt: Thu 16 Jun 2016 10:00:00 AM CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 20 Jul 2016 01:33:40 AM CEST

Die Lösungen der folgenden beiden Aufgaben sind online abzugeben.

45 Es seien Basen $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ und $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ von $\mathrm{Map}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$ gegeben durch

$$s_j \colon \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5, x \mapsto x^{j-1}$$

für $j \in [1,5]$ und

$$t = (\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_{-1}, \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_{-2}, \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_{-1}, \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_{-2}),$$

wobei für $a \in \mathbb{F}_5$ wie üblich $\mathrm{e}_a \colon \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5, x \mapsto \delta_{x,a}$ sei. Ferner sei ein $\mathbb{F}_5$-Vektorraumendomorphismus φ von $\mathrm{Map}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$ gegeben mit

$$\varphi(x \mapsto c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4) = (x \mapsto d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 x^4)$$

und

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$$

für $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{F}_5$.
Bestimmen Sie die folgenden Zeilen und Spalten. Verwenden Sie für Ihre Ergebnisse Repräsentanten im Intervall $[-2,2]$ für die Elemente von $\mathbb{F}_5$.
[Einige Ergebnisse dieser Aufgabe sind Zeilen oder Spalten mit Einträgen in $\mathbb{F}_5$. Geben Sie einen Vektor von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

als `[a,b,c,d,e]` ein, ohne Leerzeichen.]

$\mathrm{M}_{t,t}(\varphi)_{-,2}$	________
$\mathrm{M}_{s,t}(\mathrm{id}_{\mathrm{Map}(\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_5)})_{1,-}$	________
$\mathrm{M}_{s,s}(\varphi)_{-,3}$	________
$\kappa_t(\varphi(-\mathrm{e}_{-2} + \mathrm{e}_{-1} + \mathrm{e}_0 + \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2))$	________
$\mathrm{M}_{t,s}(\mathrm{id}_{\mathrm{Map}(\mathbb{F}_5,\mathbb{F}_5)})_{-,2}$	________

46	Es seien ein Körper K, $A,B \in K^{4\times 4}$, $C,D \in K^{3\times 4}$ und $E,F \in K^{3\times 2}$ gegeben durch $$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 & 5 \\ 7 & -3 & -6 & 8 \\ 5 & -2 & -4 & 6 \\ -5 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & -3 \\ -6 & 2 & 5 & 6 \\ -5 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$ $$D = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$ Bestimmen Sie die Ränge der folgenden Matrizen.

D^{tr}, falls $K = \mathbb{F}_5$	______________
$A^{\mathrm{tr}}D^{\mathrm{tr}}$, falls $K = \mathbb{R}$	______________
$EF^{\mathrm{tr}}C$, falls $K = \mathbb{F}_{11}$	______________
$B^{\mathrm{tr}}D^{\mathrm{tr}} + C^{\mathrm{tr}}$, falls $K = \mathbb{F}_5$	______________
$C^{\mathrm{tr}}C$, falls $K = \mathbb{F}_3$	______________

Die folgende Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.

47	#StarWars #Spoiler #oderauchnicht #nichtzuernstnehmen

Es sei $\text{Force} = \{\text{none}, \text{light}, \text{dark}\}$ ein dreielementiger Körper mit Null none und Eins light, es sei StarWars ein Force-Vektorraum und es sei $\text{OldGen} = (\text{OldGen}_j)_{j \in [1,5]}$ eine Basis von StarWars gegeben durch

$$\text{OldGen} = (\text{Anakin}, \text{C-3PO}, \text{Obi-Wan}, \text{Padmé}, \text{Palpatine}).$$

Ferner seien $\text{Ben}, \text{BB-8}, \text{Finn}, \text{Han}, \text{Leia}, \text{Luke}, \text{R2-D2}, \text{Rey} \in \text{StarWars}$ gegeben mit

$$\begin{aligned}
\text{Ben} &= \text{Han} + \text{Leia},\\
\text{BB-8} &= (\text{light} + \text{light})^{-1}\text{R2-D2},\\
\text{Finn} &= \text{Anakin} + \text{dark}\,\text{Han},\\
\text{Han} &= -\text{Anakin} + \text{C-3PO} + \text{Palpatine},\\
\text{Leia} &= \text{Anakin} + \text{Padmé} + \text{Padmé},\\
\text{Luke} &= \text{Anakin} + \text{Padmé} + \text{Obi-Wan},\\
\text{R2-D2} &= \text{C-3PO} - \text{Anakin},\\
\text{Rey} &= \text{Han} + (\text{light} + \text{light})^{-1}\text{Luke},
\end{aligned}$$

und es seien Quintupel $\text{MidGen} = (\text{MidGen}_j)_{j \in [1,5]}$, $\text{NewGen} = (\text{NewGen}_j)_{j \in [1,5]}$ und $\text{Jedi} = (\text{Jedi}_j)_{j \in [1,5]}$ in StarWars gegeben durch

$$\begin{aligned}
\text{MidGen} &= (\text{Anakin}, \text{Han}, \text{Leia}, \text{Luke}, \text{R2-D2}),\\
\text{NewGen} &= (\text{BB-8}, \text{Ben}, \text{Finn}, \text{Han}, \text{Rey}),\\
\text{Jedi} &= (\text{Anakin}, \text{Leia}, \text{Luke}, \text{Obi-Wan}, \text{Rey}).
\end{aligned}$$

Schließlich sei Falcon der eindeutige Force-Vektorraumendomorphismus von StarWars mit

$$\begin{aligned}
\text{Falcon}(\text{Anakin}) &= \text{Ben} - \text{Luke},\\
\text{Falcon}(\text{C-3PO}) &= \text{BB-8} + \text{R2-D2},\\
\text{Falcon}(\text{Obi-Wan}) &= \text{Luke} - \text{Anakin},\\
\text{Falcon}(\text{Padmé}) &= \text{Leia} + \text{Luke},\\
\text{Falcon}(\text{Palpatine}) &= \text{Anakin} + \text{Ben}.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dark das Negative zu light in Force ist.

(b) Zeigen Sie, dass MidGen eine Basis von StarWars ist und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix von OldGen nach MidGen.

(c) Zeigen Sie, dass NewGen eine Basis von StarWars ist und bestimmen Sie die Basiswechselmatrix von MidGen nach NewGen sowie die Basiswechselmatrix von OldGen nach NewGen.

(d) Zeigen Sie, dass Jedi keine Basis von StarWars ist.

(e) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Falcon zur Basis OldGen (für den Start- und Zielvektorraum).

(f) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von Falcon zu den Basen MidGen und NewGen.

(g) Bestimmen Sie die Koordinatenspalten von Luke und Falcon(Rey), jeweils zur Basis NewGen.

(h) Bestimmen Sie den Defekt von Falcon.

Alle Aufgaben sind Bonusaufgaben. Aufgabe 45 und Aufgabe 46 ergeben jeweils maximal 5 Punkte. Aufgabe 47 ergibt maximal 10 Punkte. Abgabe bis Donnerstag, 16.06.2016, 10:00 Uhr.