Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x}$.

Aufgabe 2 (2VP)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^4\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3 (3VP)

Lösen Sie die Gleichung $4\mathrm{e}^{2x}+6\mathrm{e}^{x}=4$.

Aufgabe 4 (4VP)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=\mathrm{e}^x$ und $g(x)=-\mathrm{e}^{-x}+2$.

a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild von f entsteht.

b) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt $P(0\,|\,1)$ berühren.

Aufgabe 5 (5VP)

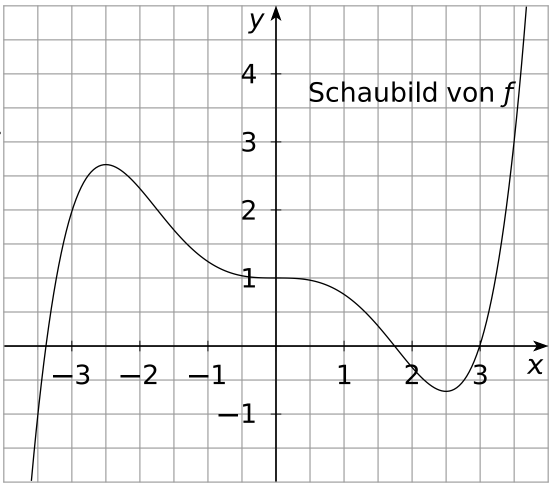
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Begründen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind:

(1) F ist im Bereich $-3\le x\le 1$ monoton wachsend.

(2) f' hat im Bereich $-3{,}5\le x\le 3{,}5$ drei Nullstellen.

(3) $\displaystyle\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=-1$

(4) $O(0\,|\,0)$ ist Hochpunkt des Schaubilds von f'.



Aufgabe 6 (4VP)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
-5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7\\
5x_1 - 3x_2 - x_3 &= -11\\
x_1 + x_3 &= -1
\end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 7

(3VP)

Gegeben sind die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.

b) Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Aufgabe 8

(3VP)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf g bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a mit

$$f_a(x) = \frac{4}{x^3 + 4a} \qquad \text{gegeben.}$$

Ihr Schaubild ist K_a.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_2. (7VP)
Geben Sie die Asymptoten von K_2 an.
Das Schaubild K_2 besitzt genau zwei Wendepunkte.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.
Welcher Punkt $P(u\,|\,v)$ von K_2 mit $0 \leq u \leq 2$ hat vom Punkt $A(1\,|\,0)$ den kleinsten Abstand?

b) Zeigen Sie, dass K_2 mit keinem anderen Schaubild K_a einen gemeinsamen Punkt besitzt. (5VP)
Bestimmen Sie den Punkt Q_a, in dem K_a eine waagrechte Tangente besitzt.
Wo liegen alle Punkte Q_a?

c) Die Schaubilder K_1 und K_2 schließen mit der y-Achse und der Geraden $x = 2$ eine Fläche ein. (6VP)
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper, der als Düse benutzt wird (Längeneinheit 1 cm).
Berechnen Sie die Masse einer solchen Düse, die aus Titan mit einer Diche von 4,5 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ besteht.
Diese Düse wurde aus einem massiven Kegel mit der Höhe 3 cm und der x-Achse als Rotationsachse ausgefräst.
Welchen Radius hatte der Grundkreis dieses Kegels mindestens?

Aufgabe I 2.1

Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit

$$w(t) = 50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60; \quad 0 \leq t \leq 24$$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$).

a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als 100 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$? (4VP)
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken 5000 m^3 Wasser. (5VP)
Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden?
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.
Nach welcher Zeit sind 6000 m^3 Wasser im Becken?

Aufgabe I 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a; \quad x \in \mathbb{R}.$$

f_a hat das Schaubild K_a und die Periode p_a.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H_a von K_a für $0 \leq x < p_a$. (4VP)
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte H_a liegen.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat. (5VP)
Die Tangente in W_a an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist.

Aufgabe I 3

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}; \quad t \geq 0.$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f. (6VP)

Wann erkranken die meisten Personen?

Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.

Wann nimmt sie am stärksten ab?

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet. (6VP)

Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.

Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet?

Die Funktion F mit $F(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ ist eine Stammfunktion von f.

Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.

Wann wird die Zahl von 20.000 gemeldeten Personen erreicht?

Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40.000 bleiben wird.

In einer benachbarten Stadt mit 30.000 Einwohnern ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an. (6VP)

Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.

Bestimmen Sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.

Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein?

Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22.000 Personen.

Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$ $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|4)$ gegeben.
Das Viereck $PQRS$ beschreibt den Deckel der Truhe.

a) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinatensystem dar. (5VP)

Berechnen Sie das Volumen der Truhe.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.

(Teilergebnis: $E_{\text{Deckel}}: x_2 - 2x_3 = -4$)

Gegeben ist eine Ebenenschar durch $E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a; \quad a \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand $BCRQ$ liegt, zur Ebenenschar gehören. (7VP)

Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.

Berechnen Sie den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2.

Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein?

c) Der Deckel der Truhe ist um die Kante QR drehbar. (4VP)

Durch die Drehung des Deckels um 90° wird die Truhe geöffnet.

In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann?

Der Punkt P geht bei dieser Drehung in den Punkt P^* über.

Berechnen Sie die Koordinaten von P^*.

Aufgabe II 2

Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $ABCD$ mit $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(0|0|0)$ und als Dachfläche das Viereck $EFGH$ mit $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

a) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar. (8VP)

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche $EFGH$ liegt.

Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?

Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.

Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.

(Zwischenergebnis: E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$)

b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d|d|d)$ angebracht werden. (4VP)

Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben.

Bestimmen Sie d.

c) Eine Person mit 1,7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2-Richtung. (4VP)

Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?