Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \sin(3x+1)$ wird mithilfe der Produkt- und Kettenregel gebildet.

$f'(x) = 2x \cdot \sin(3x+1) + x^2 \cdot \cos(3x+1) \cdot 3 = 2x \sin(3x+1) + 3x^2 \cos(3x+1)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Für die Funktion f, die integriert werden muss, gilt:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - 1 = 2x^{-\frac{1}{2}} - 1.$$

Nach der Potenzregel kann die Funktion nun leicht integriert werden:

$$\begin{aligned}\int_4^9 (2x^{-\frac{1}{2}} - 1)dx &= \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x\right]_4^9 = \left[4x^{\frac{1}{2}} - x\right]_4^9 = [4\sqrt{x} - x]_4^9 \\ &= (4\sqrt{9} - 9) - (4\sqrt{4} - 4) = (12-9) - (8-4) \\ &= -1.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3VP)

Bei der Gleichung $(2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6) = 0$ gilt: Das Produkt ist Null, wenn mindestens einer der Faktoren $(2x^2-8)$ und $(e^{2x}-6)$ gleich Null ist. Daraus ergeben sich alle Lösungen dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 \quad && | +8 \\ 2x^2 &= 8 && |: 2 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1/2} &= \pm 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} e^{2x} - 6 &= 0 \quad && | +6 \\ e^{2x} &= 6 && | \ln(\ldots) \\ 2x &= \ln 6 && |: 2 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\ln 6 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{-2;\, 2;\, \frac{1}{2}\ln 6\right\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

Der Wendepunkt der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ ergibt sich aus der notwendigen Bedingung $f''(x) = 0$.

Für die ersten drei Ableitungen von f ergibt sich nach der Potenzregel:

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1;$

$f''(x) = -6x + 6;$

$f'''(x) = -6.$

Nun wird $f''(x) = 0$ gesetzt, um den Wendepunkt zu bestimmen:

$f''(x) = -6x + 6 = 0$, also $-6x = -6$ und damit $x = 1$.

Der Nachweis, dass hier tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, kann hier noch mit der dritten Ableitung bestimmt werden. Es muss $f'''(1) \neq 0$ gelten.

Wegen $f'''(1) = -6 \neq 0$ ist dies aber tatsächlich der Fall. An der Stelle $x = 1$ liegt ein Wendepunkt vor. Seine y-Koordinate lautet

$y_W = f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = -2.$

Der Wendepunkt W lautet also $W(1\,|\,-2)$.

In diesem Punkt, also an der Stelle $x = 1$, soll nun die Tangente t aufgestellt werden. Sie hat allgemein an dieser Stelle die Gleichung

$t\colon\, y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1).$

Mit $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1 = 2$ und $f(1) = -2$ ergibt sich letztlich:

$t\colon\, y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) - 2 = 2x - 2 - 2 = 2x - 4.$

Aufgabe 5 (5VP)

a) Wenn F eine Stammfunktion von f ist, heißt das, dass f die Ableitung der gesuchten Funktion F ist.

Das Schaubild von F hat überall dort Extremstellen, wo die Ableitung f Nullstellen (mit Vorzeichenwechsel) besitzt, also an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$.

Das Schaubild von F hat überall dort Wendestellen, wo die Ableitung f Extremstellen hat. Dies ist an der Stelle $x = 0$ der Fall.

Wenn G eine weitere Stammfunktion von f ist, gilt allgemein $F(x) = G(x) + c$ (Unbestimmtheit der Stammfunktion).

Für unsere Stammfunktion bedeutet das: Wir können zwar Aussagen machen, an welchen Stellen die Stammfunktion Extremstellen bzw. Wendestellen hat, allerdings nicht über die y-Koordinaten dieser Punkte (der Wert c verschiebt nämlich das Schaubild von F beliebig weit nach oben oder unten). Über mögliche Nullstellen von F lassen sich daher keine Aussagen treffen.

b) Die Differenz $F(6)-F(2)$ bezeichnet **ein Integral** über der Funktion f. Es gilt nämlich:

$$F(6) - F(2) = \int_2^6 f(x)\,dx.$$

Dieses Integral beschreibt den Inhalt der Fläche unter des Schaubilds von f, und zwar im Bereich von $x = 2$ bis $x = 6$. Wir können diesen Flächeninhalt durch Auszählen der Kästchen grob bestimmen, er umfasst etwa 2 Kästchen mit je 1 FE Flächeninhalt, insgesamt also etwa 2 FE.

Damit ist $F(6) - F(2) \approx 2 > 1$ und die Aussage ist begründet.

Aufgabe 6 (3VP)

Die drei Vektoren sind genau dann linear **unabhängig**, wenn die Linearkombination

$$a\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

nur die Lösung $a = b = c = 0$ besitzt.

Um dies zu überprüfen, wird die Gleichung als lineares Gleichungssystem geschrieben und dieses dann gelöst.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & -2a + 4b + 2c & = 0 & \\
\text{II} & -3a + 3b - 2c & = 0 & \\
\text{III} & 4a - 2b + c & = 0 & \\
\hline
\text{I} & -2a + 4b + 2c & = 0 & \\
\text{IIa} & -5a + 7b & = 0 & \mid \text{I} + \text{II} \\
\text{IIIa} & -10a + 8b & = 0 & \mid \text{I} - 2 \cdot \text{III} \\
\hline
\text{I} & -2a + 4b + 2c & = 0 & \\
\text{IIa} & -5a + 7b & = 0 & \\
\text{IIIb} & 6b & = 0 & \mid 2 \cdot \text{IIa} - \text{IIIa}
\end{array}$$

Aus Gleichung (IIIb) folgt sofort $b = 0$. Einsetzen in Gleichung (IIa) liefert:

$-5a + 0 = 0$, also $a = 0$.

$a = 0$ und $b = 0$ werden nun in Gleichung (I) eingesetzt:

$0 + 0 + 2c = 0$, also $c = 0$.

Damit ist die Gleichung nur für $a = b = c = 0$ lösbar, die Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 7 (4VP)

a) Um die Ebene in einem Koordinatensystem darzustellen, werden die Schnittpunkte von E mit den drei Koordinatenachsen, also die **Spurpunkte** benötigt.

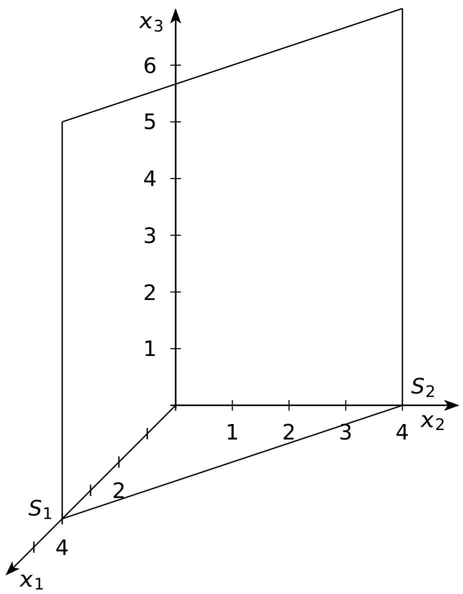
Auf der x_1-Achse gilt für alle Ebenenpunkte $x_2 = x_3 = 0$, der x_1-Wert ist gesucht. Setzt man $x_2 = x_3 = 0$ in die Ebenengleichung ein, so erhält man:

$x_1 + 0 = 4$, also $x_1 = 4$ und damit $S_1(4\,|\,0\,|\,0)$.

Entsprechend setzt man $x_1 = x_3 = 0$, um den Spurpunkt S_2 mit der x_2-Achse zu berechnen:

$0 + x_2 = 4$, also $x_2 = 4$ und damit $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$.

Da die Ebene in ihrer Gleichung keine x_3-Koordinate aufweist, kann die Gleichung auch nicht nach x_3 aufgelöst werden. Einen Schnittpunkt S_3 mit der x_3-Achse gibt es nicht, die Ebene verläuft parallel zur x_3-Achse.



b) Um die gegenseitige Lage von g und E zu bestimmen, versucht man zuerst, einen Schnittpunkt zwischen g und E zu finden.

Dazu liest man aus der Geradengleichung die drei Koordinaten $x_1 = 1 + r$ (erste Zeile), $x_2 = 3 - r$ (zweite Zeile) und $x_3 = 3$ ab und setzt diese in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned}
g \cap E\colon (1 + r) + (3 - r) &= 4 \\
1 + r + 3 - r &= 4 \\
4 &= 4
\end{aligned}$$

Es entsteht eine wahre Aussage, also erfüllt jeder Punkt von g auch die Ebenengleichung. g liegt somit in E.

c) Um den Abstand des Koordinatenursprungs $O(0 \mid 0 \mid 0)$ von der Ebene E zu bestimmen, muss zunächst die Hesse'sche Normalenform von E aufgestellt werden:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{x_1 + x_2 - 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{x_1 + x_2 - 4}{\sqrt{2}} = 0.$$

Den Abstand d von O zur Ebenen erhält man nun einfach durch Einsetzen der Koordinaten von O in die HNF:

$$d = \left| \frac{0 + 0 - 4}{\sqrt{2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

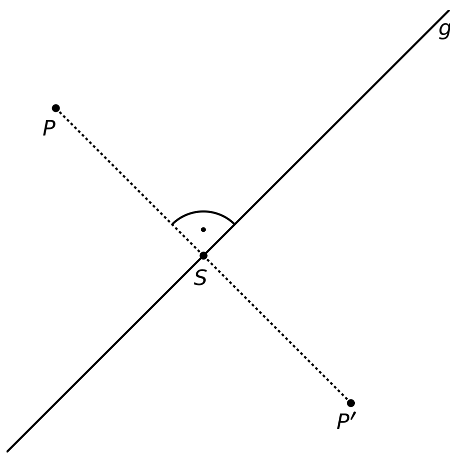
Der Ursprung hat von der Ebene E einen Abstand von $2\sqrt{2}$ LE.

Aufgabe 8 (3VP)

Um einen Punkt P an einer Geraden g zu spiegeln, in der er selbst nicht liegt, eignet sich das folgende Standardverfahren mithilfe des Lotfußpunktes.

Dabei wird von P aus der Lotfußpunkt S auf der Geraden g ermittelt. Dies ist derjenige Geradenpunkt, für den die Verbindungsstrecke $\overline{PS}$ senkrecht zur Geraden (bzw. zu deren Richtungsvektor) steht.

Über die Vektorkette $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS}$ oder auch $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS}$ ergibt sich letztlich der gesuchte Spiegelpunkt.



Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

a) ▸ **Angabe aller Asymptoten des Schaubilds von f** (6VP)

Das Schaubild hat wegen

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[6-\frac{100}{(x^2-16)^2}\right] = 6-0=6$$

die waagrechte Asymptote $y=6$ (dies ist auch am Schaubild mit dem GTR erkennbar).

Hinweis: Es gilt $\dfrac{100}{(x^2-16)^2} \to 0$ für $x\to\pm\infty$ wegen Zählergrad < Nennergrad.

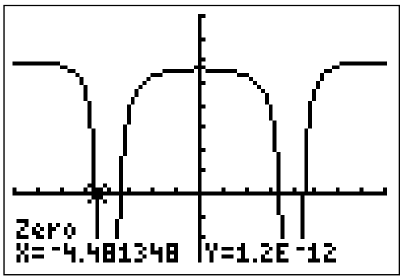
Senkrechte Asymptoten liegen dort vor, wo f Definitionslücken aufweist, also wo der **Nenner** des Bruchs gleich Null ist:

$(x^2-16)^2=0$, also $x^2-16=0$ und damit $x=\pm4$.

Das Schaubild hat die senkrechten Asymptoten $x=-4$ und $x=4$ (Dass die Geraden tatsächlich Asymptoten von K_f sind muss man nicht nachweisen, da in der Aufgabenstellung nur von „angeben" die Rede ist. Mit dem GTR erkennt man aber sofort, dass es tatsächlich Asymptoten sind.)

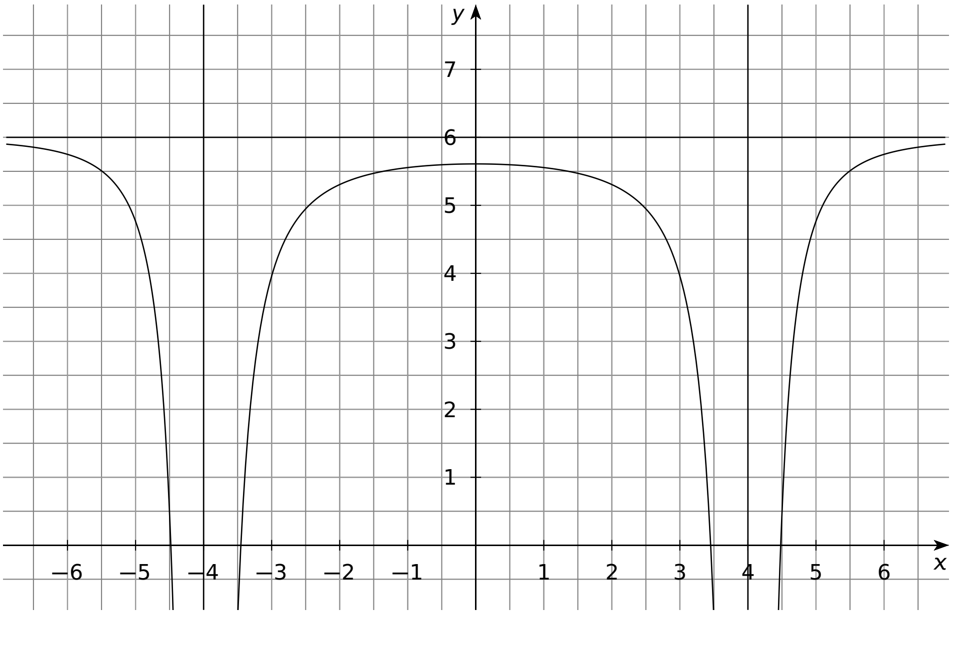
▸ **Angabe der Nullstellen von f**

Die Nullstellen werden mithilfe des GTR über $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{2: zero}}$ mit dem Graphen von f berechnet.
Es ergeben sich insgesamt vier Nullstellen mit den Näherungswerten $x_1\approx-4{,}48$, $x_2\approx-3{,}45$, sowie $x_3\approx3{,}45$ und $x_4\approx4{,}48$.



▸ **Skizze des Schaubilds von f**

Das Schaubild ergibt sich mithilfe des GTR und mit den bisherigen Ergebnissen.



▸ Nachweis, dass f genau eine Extremstelle besitzt

Extremstellen sind Stellen, an denen $f'(x) = 0$ gilt und f' dazu das Vorzeichen wechselt oder $f''(x) \neq 0$ ist. Gezeigt werden muss hier, dass f nur eine einzige solche Stelle besitzt.

Für die erste Ableitung von f gilt nach Quotienten- und Kettenregel:

$$f'(x) = 0 - \frac{0 \cdot (x^2-16)^2 - 100 \cdot 2(x^2-16)^1 \cdot 2x}{(x^2-16)^4} = \frac{400x \cdot (x^2-16)}{(x^2-16)^4} = \frac{400x}{(x^2-16)^3}.$$

Hierbei gilt $f'(x) = 0$, wenn der Zähler des Bruches gleich Null ist:

$f'(x) = 0$, also $400x = 0$ und damit $x = 0$.

Mit dem GTR erkennt man, dass die erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ das Vorzeichen wechselt, da das Schaubild von f' hier die x-Achse schneidet. Damit liegt an der Stelle $x = 0$ eine Extremstelle vor, f hat also genau eine Extremstelle.

Alternativer Lösungsweg

Alternativ kann man nachweisen, dass an der Stelle $x = 0$ tatsächlich eine Extremstelle vorliegt, indem man den Wert in die zweite Ableitung einsetzt.

Die zweite Ableitung wird dabei ebenfalls nach Quotienten- und Kettenregel gebildet:

$$f''(x) = \frac{400 \cdot (x^2-16)^3 - 400x \cdot 3(x^2-16)^2 \cdot 2x}{(x^2-16)^6} = \frac{(x^2-16)^2[400(x^2-16) - 2400x^2]}{(x^2-16)^6}$$

$$= \frac{400x^2 - 6400 - 2400x^2}{(x^2-16)^4} = \frac{-2000x^2 - 6400}{(x^2-16)^4}.$$

Nun gilt:

$$f''(0) = \frac{-2000 \cdot 0^2 - 6400}{(0-16)^4} = -\frac{25}{256} \neq 0.$$

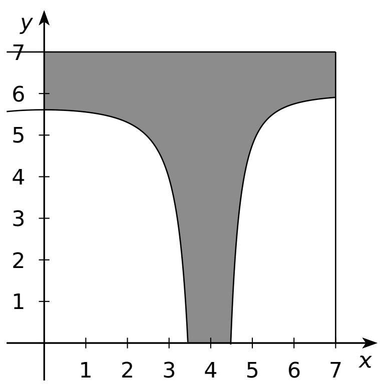
An der Stelle $x = 0$ liegt also eine Extremstelle vor.

b) **▸ Berechnung des Volumens der Brücke** (4VP)

Wegen der Symmetrie des Schaubildes reicht es aus, nur den rechten Teil der Brücke zu betrachten.

Die graue Querschnittsfläche lässt sich hier folgendermaßen berechnen: Wir berechnen den Inhalt des Quadrates mit der Seitenlänge 7 und ziehen davon die beiden Flächen ab, die unter der Kurve von f liegen und von der x-Achse begrenzt werden.

Die Integrationsgrenzen sind teilweise die Nullstellen von f, die bereits im Teil a) berechnet wurden.



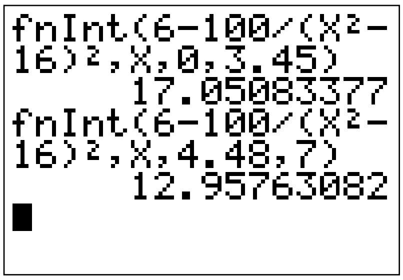
$$A_H = 7^2 - \int_0^{3,45} f(x)\,dx - \int_{4,48}^{7} f(x)\,dx.$$

Die beiden Integrale lassen sich über die Befehlsfolge $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR berechnen. Für die Fläche folgt:

$A_H \approx 49 - 17{,}05 - 12{,}95 = 19 \text{ m}^2$.

Die Gesamtfläche hat dann den Flächeninhalt

$A = 2 \cdot 19 A_H = 38 \text{ m}^2$.



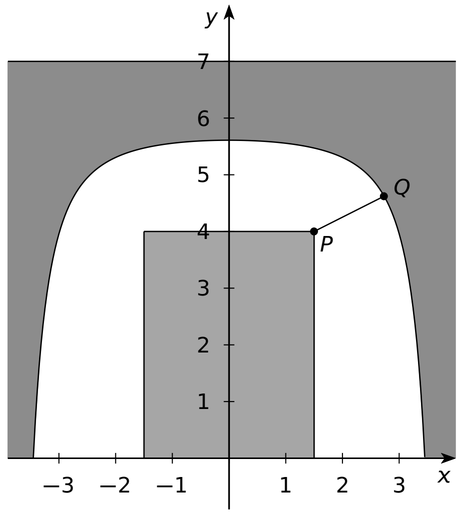
Wenn die Brücke zu diesen Maßen in der Seitenansicht (Höhe auf Länge) eine Querschnittsfläche von 38 m^2 hat und 10 m breit ist, folgt für ihr Volumen:

$V = A \cdot b = 38 \,\text{m}^2 \cdot 10 \,\text{m} = 380 \text{ m}^3$.

Für die Brücke wurden etwa 380 Kubikmeter Stein verbaut.

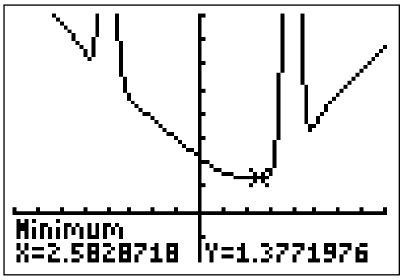
c) ► **Berechnung des minimalen Abstands zur Wandfläche** (4VP)

Wenn der Zug mittig durch die Brücke hindurchfährt, hat der Eckpunkt P seines Querschnitts mit 3 m Breite und 4 m Höhe die Koordinaten $P(1{,}5 \mid 4)$.
Von einem beliebigen Punkt $Q(x \mid f(x))$ auf der Wandfläche, also auf dem Schaubild von f, hat er den Abstand



$$d(x) = \sqrt{(x-1{,}5)^2 + (f(x)-4)^2}$$
$$= \sqrt{(x-1{,}5)^2 + \left(6 - \frac{100}{(x^2-16)^2} - 4\right)^2}$$
$$= \sqrt{(x-1{,}5)^2 + \left(2 - \frac{100}{(x^2-16)^2}\right)^2}.$$

Im Bereich $0 \leq x \leq 3{,}45$ muss diese Funktion nun auf Minima untersucht werden.
Dazu zeichnet man im GTR den Graphen von d und bestimmt dann über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ das Minimum von d.



Es ergibt sich der minimale Abstand, für $x \approx 2{,}58$. Er beträgt dann $d_{\min} \approx 1{,}38$.
Der Zug kommt der gewölbten Wandfläche etwa 1,38 m nah.

Aufgabe I 1.2

Der Nachweis, dass die Gleichung $5^0 + 5^1 + 5^2 + \ldots + 5^n = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$ für $n \geq 1$ gültig (4BE)

ist, soll über das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** geführt werden.

► **Induktionsanfang**

Zunächst muss gezeigt werden, dass die Gleichung für $n = 1$ gültig ist.
Auf der linken Seite erhält man hierbei

$5^0 + 5^1 = 1 + 5 = 6$,

die rechte Seite ergibt

$$\frac{5^2-1}{4}=\frac{24}{4}=6.$$

Die Gleichung ist für $n=1$ also erfüllt, der Induktionsanfang ist gesichert.

▶ **Induktionsschritt**

Angenommen, die Gleichung gilt für eine beliebige Zahl $k\geq 1$:

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^k=\frac{5^{k+1}-1}{4}.$$

Für die Folgezahl $k+1$ muss dann automatisch auch gelten:

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^k+5^{k+1}=\frac{5^{k+2}-1}{4}.$$

Um dies zu beweisen, wird die linke Seite dieser Gleichung mithilfe der Annahme für k auf die rechte Seite umgeformt:

$$\begin{aligned}\underbrace{5^0+5^1+5^2+\ldots+5^k}_{}+5^{k+1}&=\frac{5^{k+1}-1}{4}+5^{k+1}=\frac{5^{k+1}-1}{4}+\frac{4\cdot 5^{k+1}}{4}\\&=\frac{5^{k+1}-1+4\cdot 5^{k+1}}{4}=\frac{5\cdot 5^{k+1}-1}{4} \qquad \mid 5\cdot 5^{k+1}=5^1\cdot 5^{k+1}=5^{k+2}\\&=\frac{5^{k+2}-1}{4}.\end{aligned}$$

Dabei wird der Teil, der unterklammert ist mit der Annahme für k, die oben gemacht wurde, durch den Bruch auf der rechten Seite ersetzt.

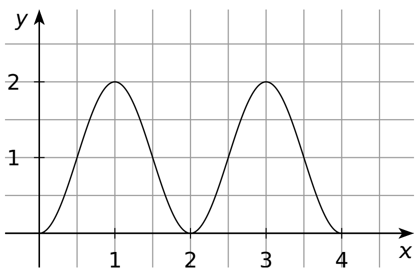
Letztlich ist so gezeigt, dass die Gleichung für alle $n\geq 1$ gilt.

Aufgabe I 2.1

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) ▶ **Skizze des Schaubilds** K (5VP)

Das Schaubild ergibt sich mit dem GTR und ist nebenstehend abgebildet.



▶ **Angabe der Periode von** f

Die Periode kann man sofort dem Schaubild entnehmen, sie ist $p=2$.

▶ **Angabe aller Hoch- und Tiefpunkte auf ganz** $\mathbb{R}$

Aus der Skizze oben sieht man, dass $H(1\mid 2)$ ein Hoch- und $T(0\mid 0)$ ein Tiefpunkt von K ist.

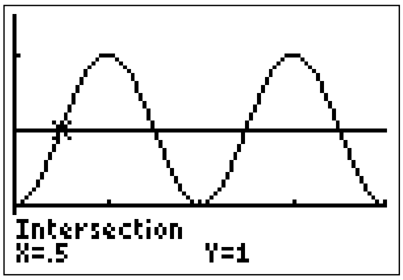
Wegen der Periode von $p=2$ ergeben sich alle weiteren Extrempunkte, indem zu den x-Koordinaten jeweils ganzzahlige Vielfache von 2 addiert werden.

Die Hochpunkte von K sind also $H_k(1+k\cdot 2\mid 2)$ mit $k\in\mathbb{Z}$, die Tiefpunkte lauten $T_k(k\cdot 2\mid 0)$ mit $k\in\mathbb{Z}$.

▶ **Berechnung der** x**-Werte, für die** f **den Funktionswert 1 hat**

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $f(x)=1$.

Dazu wird mit dem GTR das vorhandene Schaubild von f mit der Geraden $y = 1$ über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{5: intersect}}$ geschnitten und die Lösungen für $0 \leq x \leq 2$ dann entsprechend abgelesen.
Der GTR liefert für das Intervall $0 \leq x \leq 2$ die Lösungen $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$.



b) ▸ **Bestimmung der beiden Parameter** a **und** b (4VP)

Wenn der Funktionsterm auch in der Gestalt $f(x) = a - \cos(bx)$ dargestellt werden kann, muss für alle x aus dem Definitionsbereich gelten:

$$2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 = a - \cos(bx).$$

Nun wählt man einfache Werte von x, für die die Gleichung nach einem der beiden Parameter aufgelöst werden kann, z.B. $x = 0$:

$$2(\sin 0)^2 = a - \cos(b \cdot 0).$$

Mit $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ folgt daraus:

$2 \cdot 0 = a - 1$, also $a - 1 = 0$ und damit $a = 1$.

Den Parameter b erhält man aus der Bedingung, dass die Periode von f gleich 2 ist.
Für die Periode von $f(x) = 1 - \cos(bx)$ gilt dazu allgemein $p = \dfrac{2\pi}{b}$. Daraus folgt:

$p = \dfrac{2\pi}{b} = 2$ und damit $b = \pi$.

Die Funktion f kann also durch $f(x) = 1 - \cos(\pi x)$ dargestellt werden.

▸ **Exakte Berechnung des gesuchten Flächeninhalts**

Der Operator „exakt berechnen“ fordert, dass der Flächeninhalt handschriftlich ohne GTR berechnet werden muss.
Mit der neuen Form von f lässt sich die Funktion leicht integrieren. Mögliche Nullstellen, zwischen denen ein solcher gesuchter Flächeninhalt existiert, sind beispielsweise $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.
Für seinen Inhalt gilt dann:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (1 - \cos(\pi x))\,dx = \left[x - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^2 \\ &= \left(2 - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{\pi}\sin 0\right) = (2-0) - (0-0) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 2 FE.

c) ▸ **Bestimmung eines Funktionsterms der Funktion** g (5VP)

Als ganzrationale Funktion dritten Grades hat g die Gleichung

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ihre erste Ableitung lautet $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Um vier Parameter a, b, c und d zu bestimmen ist ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen notwendig. Diese ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

Der Punkt $P(1\,|\,2)$ soll auf K_g liegen, also muss $g(1)=2$ sein:

$g(1)=a+b+c+d=2$ (I).

Da dieser Punkt ein Hochpunkt von K_g sein soll, muss weiterhin $g'(1)=0$ sein:

$g'(1)=3a+2b+c=0$ (II).

Weiterhin muss $Q(2\,|\,0)$ auf K_g liegen, d.h. $g(2)=0$:

$g(2)=8a+4b+2c+d=0$ (III).

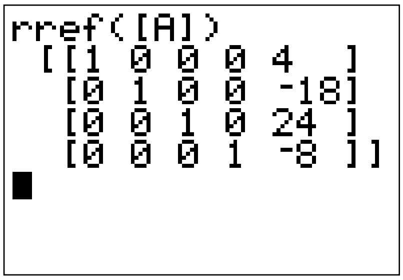
Da Q Tiefpunkt von K_g ist, folgt letztlich $g'(2)=0$:

$g'(2)=12a+4b+c=0$ (IV).

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llllllllll} \text{I} & a & + & b & + & c & + & d & = & 2 \\ \text{II} & 3a & + & 2b & + & c & & & = & 0 \\ \text{III} & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ \text{IV} & 12a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Im Matrix-Menü des GTR wird das Gleichungssystem nun als 4 × 5-Matrix eingegeben. Im normalen Rechnerfenster kann die Matrix nun über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow x^{-1} \text{ (MATRX)} \rightarrow \text{MATH} \rightarrow \text{B: rref}}$ auf reduzierte Stufenform gebracht werden. Es ergibt sich $a=4$, $b=-18$, $c=24$ und $d=-8$.



Die Funktion g hat also die Gleichung $g(x)=4x^3-18x^2+24x-8$.

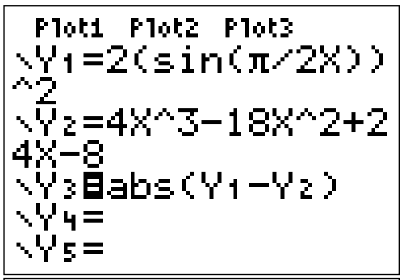
▶ **Berechnung der Stellen, an denen f und g am stärksten abweichen**

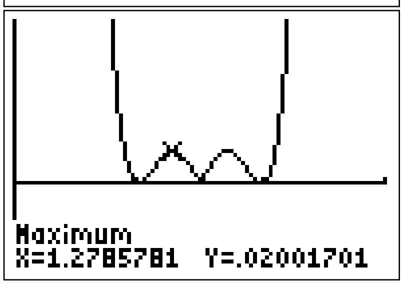
Der betragsmäßige Unterschied zwischen den Funktionswerten von f und g wird durch $d(x) = |f(x)-g(x)|$ beschrieben. Gesucht sind die Stellen, an denen diese „Unterschiedsfunktion" Maxima besitzt.

Dazu werden im Graph-Menü unter Y_1 und Y_2 die Funktionsgleichungen von f und g eingegeben, unter Y_3 schließlich abs(Y_1–Y_2). abs steht hierbei für „Absolutbetrag" und ist unter $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{rechte Pfeiltaste (NUM)} \rightarrow \text{1: abs}}$ aufrufbar.

Nun können die Maxima von d über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ bestimmt werden, sie liegen an den Stellen $x_1 \approx 1{,}28$ und $x_2 \approx 1{,}72$. Die maximale Abweichung beträgt dort jeweils $d_{min} \approx 0{,}02$.

Die Funktionswerte von f und g weichen an den Stellen $x_1 \approx 1{,}28$ und $x_2 \approx 1{,}72$ am stärksten voneinander ab.





Aufgabe I 2.2

▸ Bestimmung der optimalen Lampenhöhe (4VP)

Um die Lampenhöhe h für eine größtmögliche Helligkeit auf der Straße zu berechnen, muss zunächst ein Zusammenhang zwischen der Helligkeit H und der Lampenhöhe h aufgestellt werden. Dazu werden die beiden Parameter d und $\cos\alpha$ in der gegebenen Formel für die Helligkeit eliminiert.

Nach dem Satz des Pythagoras erhält man zum einen für den Abstand d:

$d^2 = h^2 + 5^2$, also $d = \sqrt{h^2 + 25}$.

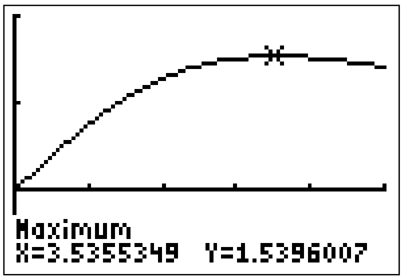
Für den Ausdruck $\cos\alpha$ gilt weiterhin:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 25}}.$$

Nun werden die beiden gefunden Ausdrücke für d und $\cos\alpha$ un die Formel für die Helligkeit eingesetzt:

$$H = 100 \cdot \frac{\cos\alpha}{d^2} = 100 \cdot \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+25}}}{h^2 + 25} = 100 \cdot \frac{h}{(h^2 + 25)\sqrt{h^2 + 25}} = \frac{100h}{\sqrt{h^2 + 25}^3}.$$

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ wird das Maximum der Helligkeit für $0 \leq h \leq 5$ bestimmt, es ergibt sich für eine Lampenhöhe von $h \approx 3{,}54$.
Die Lampen müssen in einer Höhe von 3,54 m befestigt werden, damit der Weg in der Mitte möglichst hell beleuchtet wird.

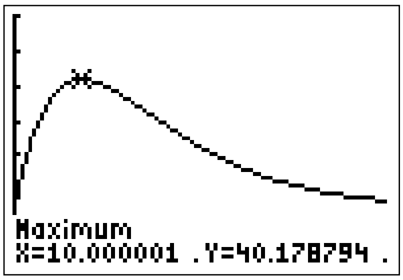


Aufgabe I 3

a) **▸ Bestimmung des Zeitpunkts, zu dem die Temperatur am höchsten ist** (6VP)

Gesucht ist hier das Maximum der Fiebertemperatur $f(t)$.

Dazu wird das Schaubild von f mit dem GTR gezeichnet und anschließend über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ das Maximum der Funktion berechnet.
Es ergibt sich für $t = 10$ und beträgt $f_{max} \approx 40{,}2$.
10 Stunden nach Ausbruch der Krankheit ist die Körpertemperatur mit $40{,}2^\circ$C maximal.



▶ Skizze der Fieberkurve in den ersten 48 Stunden

Die Kurve ergibt sich mit dem GTR. Für die Zeichnung bietet sich es an, auf der y-Achse nur Werte von $36{,}5°\text{C} \leq f(t) \leq 41°\text{C}$ zu betrachten.

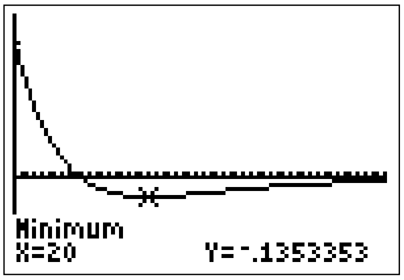
▶ Bestimmung der minimalen/maximalen Temperaturänderung

Die Änderung der Temperatur wird durch die erste Ableitung von f beschrieben. Für diese gilt nach Produkt- und Kettenregel:

$$f'(t) = 0 + (1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t} + t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1)) = (1 - 0{,}1t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t}.$$

Gesucht sind nun die Stellen $t \geq 0$, für die f' maximal bzw. minimal wird.

Das Minimum der Ableitungsfunktion für $t \geq 0$ lässt sich mit dem GTR über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ bestimmen, es liegt an der Stelle $t = 20$.



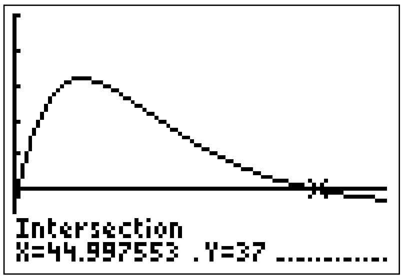
Das Maximum von f' liegt laut Schaubild direkt an der Stelle $t = 0$, da sich das Schaubild für $t \rightarrow \infty$ der x-Achse nähert. Es handelt sich um ein Randmaximum.

Die Temperaturänderung ist somit beim Ausbruch der Krankheit ($t = 0$) maximal und 20 Stunden danach minimal.

b) ### ▶ Berechnung des Zeitpunkts, ab dem die Temperatur unter 37°C sinkt (7 VP)

Die Stellen, an denen die Körpertemperatur genau 37°C beträgt, lassen sich mit dem GTR bestimmen.

Dazu wird das Schaubild von f gezeichnet und mit der Geraden $y = 37$ über die Befehlsfolge $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten. Es ergeben sich die beiden Schnittstellen $t_1 \approx 0{,}5$ und $t_2 \approx 45$.



Am Schaubild von f erkennt man, dass die Fiebertemperatur $f(t)$ erst nach $t = 45$ unter 37°C sinkt.

(Nach $t = 0{,}5$ steigt sie über die Grenze von 37°C, daher ist diese Stelle hier uninteressant.)

45 Stunden nach Ausbruch der Krankheit sinkt die Körpertemperatur wieder unter 37°C.

▶ Nachweis, dass die Körpertemperatur jetzt unter 37°C bleibt

Gezeigt werden muss hier, dass die Funktion f nach den vergangenen $t = 45$ Stunden von oben streng monoton fallend ist und damit nicht wieder über 37°C steigen kann. Dass die Funktion f streng monoton fallend ist ist gleichwertig mit der Bedingung $f'(t) < 0$.

Für $f'(t) = (1-0{,}1t)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t}$ gilt dann:

Da $\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ als Exponentialfunktion immer positiv ist, hängt das Vorzeichen von $f'(t)$ allein von $(1-0{,}1t)$ ab. Es ist negativ, wenn gilt:

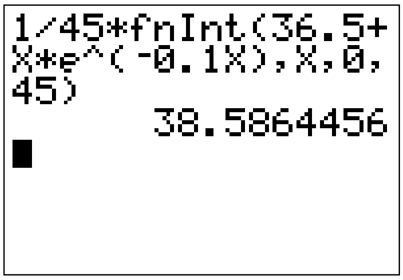
$1-0{,}1t < 0$, also $1 < 0{,}1t$ und damit $10 < t$.

Für $t > 10$ (und damit erst recht für $t \geq 45$) gilt $f'(t) < 0$. Die Körpertemperatur bleibt damit nach 45 Stunden dauerhaft unter 37°C.

▶ Berechnung der mittleren Körpertemperatur

Die mittlere Körpertemperatur entspricht dem mittleren Funktionswert von $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = 45$:

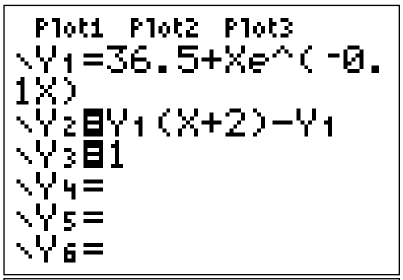
$$\overline{T} = \frac{1}{45-0}\cdot\int_0^{45} f(t)\,dt = \frac{1}{45}\cdot\int_0^{45} f(t)\,dt \approx 38{,}6.$$

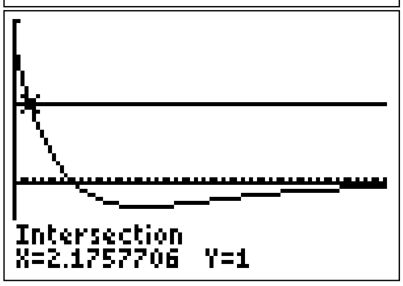


Das Integral lässt sich über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR berechnen.
Die mittlere Körpertemperatur in den ersten 45 Stunden nach Ausbruch der Krankheit beträgt etwa 38,6°C.

▶ Berechnung des 2-Stunden-Zeitraums

Gesucht ist ein Zeitraum, in dem der Unterschied der Temperaturen gleich 1 ist.





Im Klartext bedeutet dies: Ist $f(t)$ die Körpertemperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt t, so ist $f(t+2)$ die Körpertemperatur zwei Stunden später. Der Unterschied in diesen Funktionswerten, also der Unterschied $d(t) = f(t+2) - f(t)$ soll gleich 1 sein.
Wie nebenstehend wird dazu die Funktion $d(t)$ eingegeben und ihr Schaubild gezeichnet. Anschließend wird es mit der Geraden $y = 1$ über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten.
Es ergibt sich die Schnittstelle $t \approx 2{,}18$. Somit gilt:

In dem Zeitraum zwischen $t = 2{,}2$ und $t+2 = 4{,}2$ Stunden nach Ausbruch der Krankheit nimmt die Körpertemperatur um exakt 1°C zu.

c) **▶ Bestimmung der Funktion** g (5VP)

Der Verlauf der Körpertemperatur nach Einnahme des Medikaments wird nun durch eine Funktion g beschrieben, welche dem beschränkten Wachstum zugrunde liegt. Sie hat die Funktionsgleichung $g(t) = S - c\cdot \mathrm{e}^{-kt}$.

Dabei gibt t hier die Zeit nach Einnahme des Medikaments an (also immer fünf Stunden später als die Zeit t der Körpertemperatur $f(t)$ ohne Medikament) und $g(t)$ die Körpertemperatur in °C.

Da sich die Körpertemperatur der normalen Temperatur von 36,5°C nähern soll, muss die Schranke $S = 36{,}5$ und damit $g(t) = 36{,}5 + c \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ sein.

Das Medikament wird nach 5 Stunden eingenommen. Der Erkrankte hat zu diesem Zeitpunkt eine Körpertemperatur von

$f(5) = 36{,}5 + 5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 5} \approx 39{,}5$°C.

Dies entspricht der Anfangstemperatur $g(0)$ bei Einnahme des Medikaments:

$$\begin{aligned} g(0) = 36{,}5 + c \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot 0} &= 39{,}5 \\ 36{,}5 + c &= 39{,}5 \\ c &= 3. \end{aligned}$$

Beachten Sie hier, dass $\mathrm{e}^0 = 1$ gilt.

Zwei Stunden nach der Einnahme soll die Körpertemperatur 38,4°C betragen:

$$\begin{aligned} g(2) = 36{,}5 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-2k} &= 38{,}4 \\ 3 \cdot \mathrm{e}^{-2k} &= 1{,}9 \\ \mathrm{e}^{-2k} &= \frac{19}{30} \\ -2k &= \ln \frac{19}{30}, \text{ also } k = -\frac{1}{2} \ln \frac{19}{30} \approx 0{,}228. \end{aligned}$$

Die Funktion g hat also die Gleichung $g(t) = 36{,}5 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}228t}$.

▶ Zeitpunkt, zu dem die Temperatur mit Medikament 1°C niedriger ist

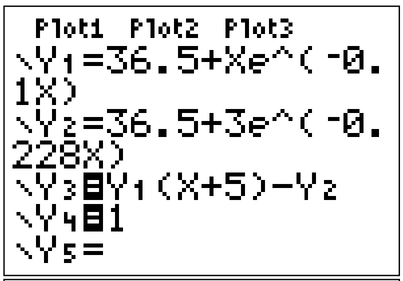
Da die Zeitpunkte von Ausbruch der Krankheit und Einnahme des Medikaments um 5 Stunden zeitlich verschoben sind, muss die Funktion f der Körpertemperatur ohne Medikament um $t = 5$ Stunden nach links „verschoben“ werden, um sie mit der Körpertemperatur mit Medikament g vergleichen zu können. Sie hat dann jeweils den Funktionswert $f(t+5)$.

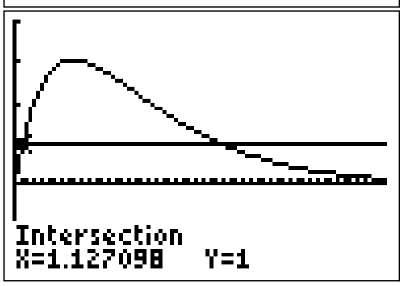
Der Unterschied zwischen den beiden möglichen Körpertemperaturen mit und ohne Medikament wird dann durch $d(t) = f(t+5) - g(t)$ beschrieben. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem der Unterschied erstmals mehr als 1°C beträgt.

Dazu wird mit dem GTR das Schaubild der Funktion d gezeichnet und mit der Geraden $y = 1$ geschnitten. Es ergeben sich die beiden Lösungen $t_1 \approx 1{,}13$ und $t_2 \approx 30{,}73$.

Zwischen diesen Zeitpunkten ist der Unterschied sogar noch größer als 1°C. Daher gilt:

Etwa 1,1 Stunden nach der Einnahme des Medikaments ist der Unterschied größer als 1°C, d.h.





ab diesem Zeitpunkt ist die Körpertemperatur mit Einnahme des Medikaments um 1°C niedriger, als sie ohne Medikament wäre.

Wahlteil II

Aufgabe II 1.1

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.
Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1\,(6|3|0)$.
Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P\,(7|29|7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km.})$$

a) **Position des Flugzeugs um 7.01 Uhr** (6VP)

Die Geradengleichung von oben gibt uns die Position des Flugzeugs an, wobei t in Minuten nach 7.00 Uhr ist. Um die Position des Flugzeugs um 7.01 Uhr zu bestimmen, setzen wir für $t = 1$ ein.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow Q\,(10|27|6)$$

Um 7.01 Uhr befindet sich das Flugzeug im Punkt $Q\,(10|27|6)$.

Begründung des Sinkflugs

Wir sehen uns den Richtungsvektor der Geraden an. Mit jeder Minute wird die x_3 Koordinate des Flugzeugs um eine Einheit verringert. Somit verliert das Flugzeug durchgehend an Höhe und befindet sich somit im Sinkflug.

Geschwindigkeit des Flugzeugs bestimmen

Da die Flugbahn des Flugzeugs eine Gerade ist, bleibt die Geschwindigkeit immer gleich, sie verändert sich nicht.
Wir wissen, wo sich das Flugzeug um 7.00 Uhr befindet, nämlich im Punkt $P\,(7|29|7)$.
Um 7.01 befindet es sich im Punkt $Q\,(10|27|6)$.
Somit lässt sich durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ die Strecke beschreiben, die das Flugzeug in einer Minute zurückgelegt hat. Wir bestimmen also die Länge dieses Vektors und wissen, wie weit das Flugzeug in einer Minute fliegt:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 10-7 \\ 27-29 \\ 6-7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

In einer Minute legt das Flugzeug $\sqrt{14}$ Kilometer zurück. In einer Stunde legt es also $60 \cdot \sqrt{14}$ Kilometer zurück. Seine Geschwindigkeit beträgt also $60\sqrt{14}\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 224,49\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Winkel zwischen Flugbahn und Boden bestimmen

Der Boden wird beschrieben durch die x_1x_2-Ebene. Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

$$\sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-1|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\alpha\approx 15,5^\circ$$

Das Flugzeug fliegt unter einem Winkel von etwa $15,5^\circ$ auf den Boden zu.

Zeitpunkt und Position des Aufsetzens bestimmen

Das Flugzeug setzt auf, sobald seine x_3-Koordinate Null wird. Wenn wir uns die Geradengleichung ansehen, können wir erkennen, dass dies bei $t=7$ geschieht, d.h. um 7.07 Uhr.

Zur Bestimmung der Position, setzen wir einfach $t=7$ in die Geradengleichung ein.

$$\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\15\\0\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow A(28|15|0)$$

Das Flugzeug setzt um 7.07 Uhr im Punkt $A(28|15|0)$ auf dem Boden auf.

b) **Auf Lage in einer Ebene überprüfen** (6VP)

Wir benutzen zunächst den Stützvektor der Geraden f_1 als Stützvektor unserer Ebene, und den Richtungsvektor der Geraden f_1 als ersten Spannvektor unserer Ebene. Als zweiten Spannvektor benutzen wir den Verbindungsvektor zwischen Stützvektor und der Position der ersten Radarstation.

$$\begin{aligned}E:\overrightarrow{x}&=\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6-7\\3-29\\0-7\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-26\\-7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir haben nun die Gleichung einer Ebene aufgestellt, in der die Flugbahn f_1, sowie die Radarstation R_1 liegen. Wir überprüfen nun, ob auch die Radarstation R_2 in dieser Ebene liegt. Dazu machen wir eine Punktprobe und setzen die Koordinaten von R_2 für das $\overrightarrow{x}$ in der Ebenengleichung ein.

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -26 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llrl}
\text{I} & 17 = & 7 + 3r - s & \mid -7 \\
\text{II} & 9 = & 29 - 2r - 26s & \mid -29 \\
\text{III} & 0 = & 7 - r - 7s & \mid -7 \\
\hline
\text{I} & 10 = & 3r - s & \mid \Longrightarrow s = 3r - 10 \\
\text{II} & -20 = & -2r - 26s & \\
\text{III} & -7 = & -r - 7s &
\end{array}$$

Wir setzen $s = 3r - 10$ ein in II und erhalten:
$-20 = -2r - 26 \cdot (3r - 10) \quad \Longleftrightarrow \quad -20 = -2r - 78r + 260 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 3,5$

Daraus ergibt sich $s = 3 \cdot 3,5 - 10 = 0,5$.

Wir setzen $r = 3,5$ und $s = 0,5$ ein in III und prüfen unser Ergebnis:

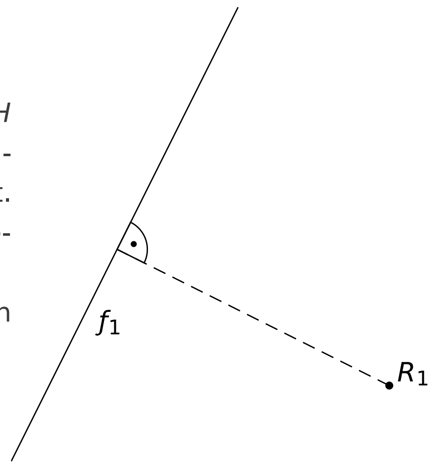
$-7 = -3,5 - 7 \cdot 0,5 \quad \Longleftrightarrow \quad -7 = -7$

Dies ist eine **wahre Aussage**. Somit liegt R_2 in der Ebene E, d.h. die Flugbahn und die beiden Radarstationen liegen alle in einer Ebene, der Anflug ist somit optimal.

Zeitpunkt der Übernahme bestimmen

Wir müssen uns zunächst klar machen, was in der Aufgabenstellung genau gefragt ist. Das Flugzeug nähert sich zunächst der Radarstation R_1 und hat in einem gewissen Punkt den kleinstmöglichen Abstand zu ihr. Nach diesem Punkt entfernt sich das Flugzeug wieder von der Radarstation. Wir bestimmen also den Punkt auf f_1, der den kleinsten Abstand zu R_1 besitzt.

Hierzu stellen wir die Gleichung einer Hilfsebene H auf, in der der Punkt R_1 liegt und die als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden f_1 besitzt. Somit verläuft die Hilfsebene **orthogonal** zur Geraden f_1.
Anschließend bestimmen wir den Schnittpunkt von f_1 und H und erhalten den Punkt, den wir suchen



$$H: \left[\left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Schnittpunkt bestimmen

Zur Bestimmung des Schnittpunktes bestimmen wir zunächst die Koordinatengleichung von H. Wir wissen, dass die Koeffizienten vor x_1, x_2 und x_3 die Koordinaten des Normalenvektors sind:

$H: 3x_1 - 2x_2 - x_3 + d = 0$

Um d zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten des Stützvektors ein:

$3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 - 0 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 18 - 6 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = -12$

Wir erhalten also die Koordinatengleichung $H: 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 12 = 0$

Nun spalten wir die Geradengleichung von f_1 zeilenweise auf und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + 3t \\ x_2 &= 29 - 2t \\ x_3 &= 7 - t \end{aligned}$$

Jetzt können wir x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung von H einsetzen und unseren Schnittpunkt bestimmen.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (7 + 3t) - 2 \cdot (29 - 2t) - (7 - t) - 12 &= 0 \\ 21 + 9t - 58 + 4t - 7 + t - 12 &= 0 \\ -56 + 14t &= 0 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

Um 4 Minuten nach 7.00 Uhr hat das Flugzeug also den kleinsten Abstand zur Radarstation R_1 und entfernt sich von diesem Zeitpunkt an von dieser Radarstation.
Die Radarstation R_2 übernimmt also um 7.04 Uhr die Flugüberwachung.

c) **Abstand der Flugzeuge um 7.04 Uhr bestimmen** (4VP)

Wir bestimmen zunächst die Position der Beiden Testflugzeuge um 7.04 Uhr.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow S_1\,(19|21|3)$$

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow S_2\,(26|19|7)$$

Der Abstand d zweier Punkte $P\,(p_1|p_2|p_3)$ und $Q\,(q_1|q_2|q_3)$ wird stets bestimmt mit der Formel $d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$.

$d\,(S_1; S_2) = \sqrt{(26 - 19)^2 + (19 - 21)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{49 + 4 + 16} = \sqrt{69} \approx 8,3$

Um 7.04 Uhr sind die beiden Flugzeuge etwa 8, 3 Kilometer von einander entfernt.

Kleinsten Abstand der Flugzeuge bestimmen

Betrachten wir die Flugzeuge als Punkte, so können wir jedem Flugzeug in Abhängigkeit von der Zeit t einen bestimmten Punkt zuordnen. Dies sind einfach die einzelnen Zeilen der Geradengleichungen aufgespalten:

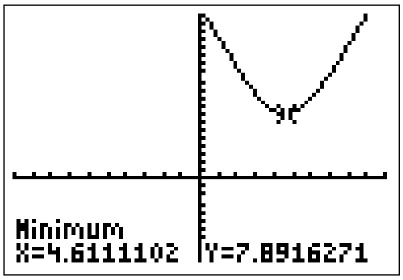
$F_1\,(7+3t|29-2t|7-t)$ und $F_2\,(18+2t|11+2t|7)$.

Der Abstand der beiden Punkte lässt sich bestimmen wie folgt:

$$\begin{aligned} d\,(F_1;F_2) &= \sqrt{(7+3t-(18+2t))^2+(29-2t-(11+2t))^2+(7-t-7)^2} \\ &= \sqrt{(-11+t)^2+(18-4t)^2+(-t)^2} \end{aligned}$$

Wir wollen nun den minimalen Abstand bestimmen. Dies ist genau am Tiefpunkt dieser Funktion d:

Wir zeichnen d und bestimmen mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MINIMUM}}$ den Tiefpunkt.

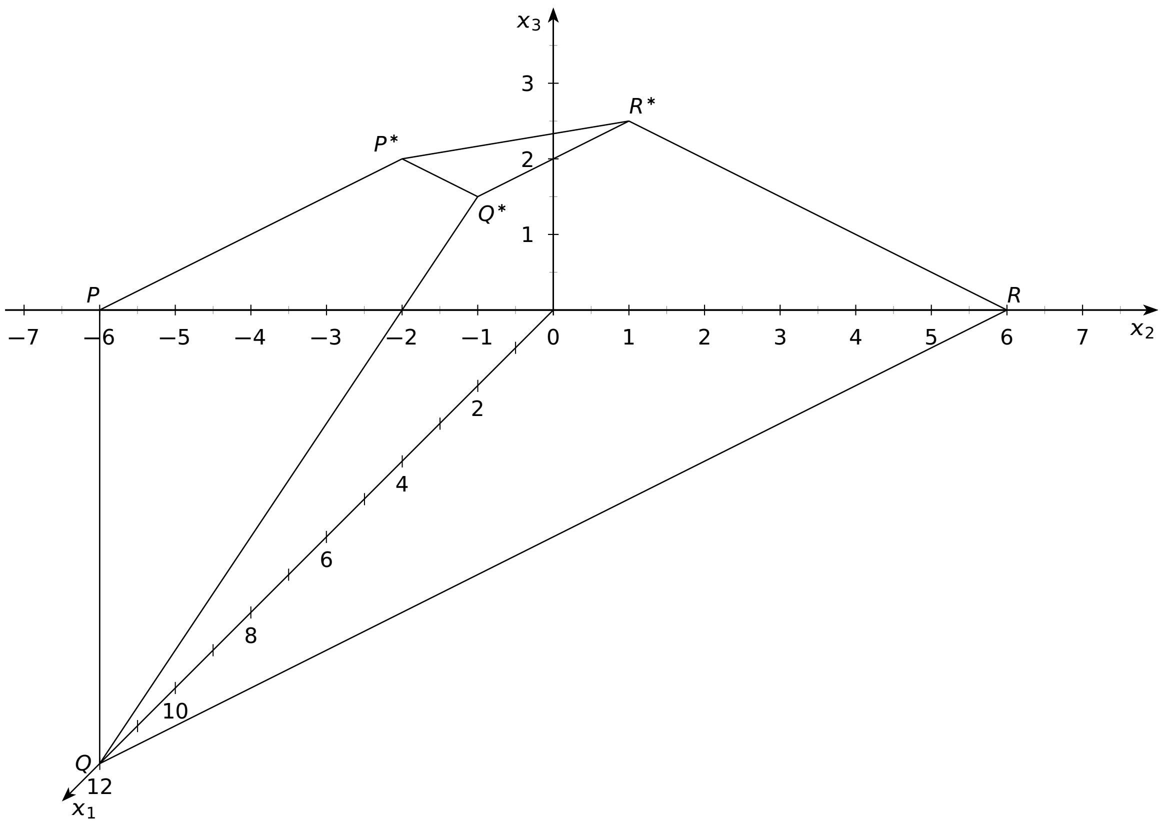


Die beiden Flugzeuge kommen bei $t=4,6$ sich also $7,89$ Kilometer nah.

Aufgabe II 2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P\,(0|-6|0)$, $Q\,(12|0|0)$ und $R\,(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfes hat die Eckpunkte $P^*\,(0|-2|2)$, $Q^*\,(2|0|2,5)$ und $R^*\,(0|1|2,5)$.

a) **Skizze des Pyramidenstumpfes** (6VP)



Begründung, dass die Flächen nicht parallel sind

Wir sehen uns die Koordinaten der Punkte der Boden- bzw. der Dachfläche an.
Die Punkte der Bodenfläche haben als x_3-Koordinate alle $x_3 = 0$, sie liegen also in der x_3-Ebene.

Die Punkte der Dachfläche hingegen weisen unterschiedliche x_3-Koordinaten auf: P^* hat eine andere x_3-Koordinate als Q^* und R^*.
Somit liegen diese drei Punkte in einer Ebene, die nicht parallel zur x_1x_2-Ebene ist, und somit auch nicht zur Bodenfläche.

Winkel berechnen

Wir stellen zunächst eine Gleichung der Geraden auf, in der die Kante QQ^* liegt. Als Stützvektor benutzen wir $\overrightarrow{OQ}$, als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{QQ^*}$.

$$(QQ^*): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-12 \\ 0-0 \\ 2,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Die x_1-Achse lässt sich darstellen als die Gerade $x_1 : \overrightarrow{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-10|}{\sqrt{100+6,25} \cdot 1} = \frac{10}{\sqrt{106,25}}$$

$$\alpha \approx 14,04^\circ$$

Die Kante QQ^* schneidet die x_1-Achse unter einem Winkel von etwa $14,04^\circ$.

Nachweis der ursprünglichen Spitze

Wenn die einzelnen Kanten des Pyramidenstumpfes verlängert würden, würden sie sich ja wieder in der Spitze schneiden. Wir bestimmen also die Gleichungen der Geraden, in der die Kanten liegen und prüfen, ob der Punkt $S(0|0|3)$ auf den einzelnen Geraden liegt.

$$(PP^*): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ -2+6 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(RR^*): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-6 \\ 2,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Liegt S auf (PP)?*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 0 \\ \text{II} & 0 & = & -6 + 4s \quad |\Longrightarrow s = 1,5 \\ \text{III} & 3 & = & 0 + 2s \quad |\Longrightarrow s = 1,5 \end{array}$$

Für $s = 1,5$ liegt $S(0|0|3)$ auf der Geraden (PP^*).

Liegt S auf (QQ)?*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 12 - 10r \quad | r = 1,2 \\ \text{II} & 0 & = & 0 \\ \text{III} & 3 & = & 0 + 2,5r \quad |\Longrightarrow r = 1,2 \end{array}$$

Für $r = 1,1$ liegt $S(0|0|3)$ auf der Geraden (QQ^*).

Liegt S auf (RR)?*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 0 & = & 0 \\ \text{II} & 0 & = & 6 - 5t \quad | t = 1,2 \\ \text{III} & 3 & = & 0 + 2,5t \quad |\Longrightarrow t = 1,2 \end{array}$$

Für $t = 1,1$ liegt $S(0|0|3)$ auf der Geraden (RR^*).

$S(0|0|)$ liegt also auf allen drei Geraden. Damit ist nachgewiesen, dass S die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

b) **Abstand bestimmen** (6VP)

Wir bestimmen zunächst die Gleichung der Geraden durch Q und R.

$$(QR): \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die Gleichung einer Hilfsebene H, die den Punkt Q^* enthält und deren Normalenvektor der Richtungsvektor von (QR) ist. Somit verläuft H orthogonal zur Geraden durch Q und R.

$$H: \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Normalengleichung wandeln wir zunächst in eine Koordinatenform um:

$H: -12x_1 + 6x_2 + d = 0$

Um d zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten des Stützvektors ein:

$-24 + 0 + d = 0 \quad \Longrightarrow d = 24$

$H: -12x_1 + 6x_2 + 24 = 0$

Wir spalten nun die Geradengleichung von (QR) zeilenweise auf:

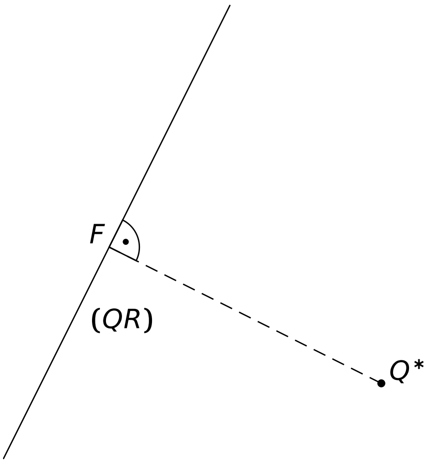
$$\begin{aligned} x_1 &= 12 - 12k \\ x_2 &= 6k \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatenform von H ein und bestimmen so den Schnittpunkt der Hilfsebene und der Geraden (QR).

$-12 \cdot (12 - 12k) + 36k + 24 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -144 + 144k + 36k + 24 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{2}{3}$

Setzen wir $k = \frac{2}{3}$ ein in die Geradengleichung von (QR), so erhalten wir den Punkt $F(4|4|0)$.

Sehen wir uns zunächst an, was wir genau bestimmt haben:



Die Länge des Vektors $\overrightarrow{FQ^*}$ ist der Abstand von Q^* zur Geraden (QR).

$$\left|\begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-4 \\ 2,5-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + 16 + 6,25} = \sqrt{26,25} \approx 5,12$$

Der Punkt Q^* hat einen Abstand von etwa 5,12LE von der Geraden durch Q und R.

Trapez nachweisen

Ein Trapez hat zwei parallele Seiten. Aus der Skizze können wir ersehen, dass höchstens die Kanten QR und Q^*R^* parallel sein können. Dies überprüfen wir nun.

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0-12 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 2,5-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass $\overrightarrow{QR} = 6 \cdot \overrightarrow{Q^*R^*}$ ist. Somit sind die Kanten parallel und es ist nachgewiesen, dass die Seitenfläche ein Trapez ist.

Flächeninhalt berechnen

Für den Flächeninhalt eines Trapezes gilt immer $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die beiden parallelen Kanten sind.
Die Höhe h scheint noch unbekannt zu sein. Wenn wir uns allerdings die Skizze ansehen, dann merken wir, dass die Höhe des Trapezes genau der Abstand des Punktes Q^* zur Geraden durch Q und R ist. Diesen haben wir eben bestimmt.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left|\overrightarrow{QR}\right| + \left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|}{2} \cdot 5,12 \\ &= \frac{\sqrt{144+36} + \sqrt{4+1}}{2} \cdot 5,12 \\ &\approx 40 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt etwa 40 FE.

Aufgabe I 2.2

Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. (4VP)
Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.

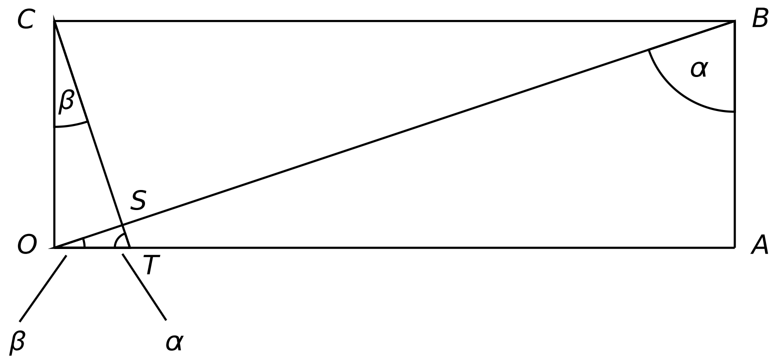
Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.

1. Beweismöglichkeit (Winkelsumme im Dreieck)

Wir wissen aus der Aufgabenstellung, dass für $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt:

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right|$ und $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Außerdem gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.



Die Dreiecke OTC und OAB sind rechtwinklig. Für die Seitenverhältnisse gilt nach Voraussetzung:

$$\frac{\left|\overrightarrow{OT}\right|}{\left|\overrightarrow{OC}\right|} = \frac{1}{3} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$$

Die beiden Dreiecke sind damit ähnlich. Ähnliche Dreicke stimmen in Ihren Winkeln überein.

Es gilt $\measuredangle OCT = \measuredangle AOB = \beta$ und $\measuredangle CTO = \measuredangle OBA = \alpha$.

Schaut man sich das Dreieck OTS an, so sind damit α und β auch Winkel dieses Dreiecks (siehe Zeichnung). Wir wissen, dass $\alpha + \beta = 90^\circ$ ergibt. Also muss aufgrund der Winkelsumme 180° im Dreieck, das Dreieck OTS bei S einen rechten Winkel haben.

Damit gilt $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = 0$.

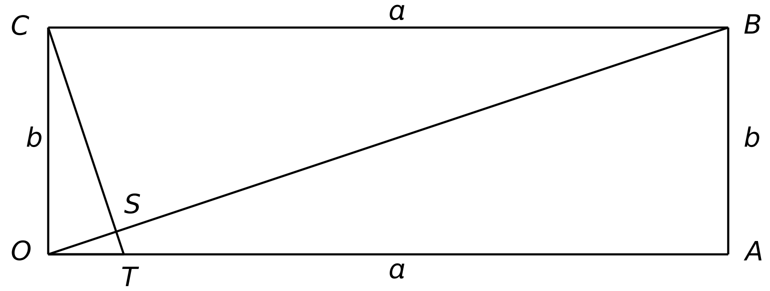
2. Beweismöglichkeit (Strahlensätze und Satz des Pythagoras)

Wir wissen aus der Aufgabenstellung, dass für $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt:

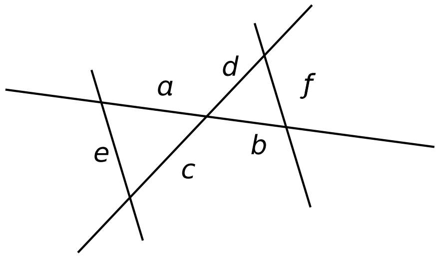
$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right|$ und $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

Außerdem gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.

Für unser Rechteck unten bedeutet dies $b = \frac{1}{3}a$ und $\overline{OT} = \frac{1}{9}a$.



Hier hat sich ein Strahlensatz versteckt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ (siehe Zeichnung unten). Da wir uns in einem Rechteck befinden, sind $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{CB}$ parallel.



Es gilt somit nach dem Strahlensatz oben und der Voraussetzung:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{CB}} = \frac{1}{9}$$

Daraus lässt sich Schlussfolgern: $\overline{SB} = \frac{9}{10} \cdot \overline{OB}$ und $\overline{SC} = \frac{9}{10} \cdot \overline{CT}$.

Nun kommt der Satz des Pythagoras zur Hilfe. Wir wissen, dass $a^2 + b^2 = c^2$ in einem rechwinkligen Dreieck gilt. Können wir also dies auch für das Dreieck CSB nachweisen, so ist dies rechtwinklig und wir haben gezeigt, dass $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{TC} = 0$ gilt.

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich damit:

$$\overline{OB}^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{10}{9}a^2$$

$$\overline{CT}^2 = \frac{1}{81}a^2 + b^2 = \frac{1}{81}a^2 + \frac{1}{9}a^2 = \frac{10}{81}a^2$$

$$\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 = \frac{81}{100}\overline{OB}^2 + \frac{81}{100}\overline{CT}^2 = \frac{81}{100} \cdot \frac{10}{9}a^2 + \frac{81}{100} \cdot \frac{10}{81}a^2 = \frac{9}{10}a^2 + \frac{1}{10}a^2 = a^2$$

Damit ist mit Hilfe des Satz des Pythagoras gezeigt, dass das Dreieck CSB einen rechten Winkel besitzt.

Damit gilt was laut Aufgabenstellung zu zeigen war: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{TC} = 0$.