Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}\sin\left(4x^2\right)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ an.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ hat die Nullstelle $x_1 = 1$.

Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen.

Aufgabe 4 (4VP)

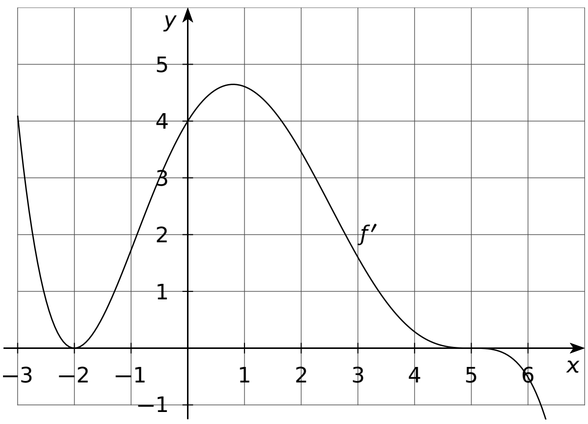
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1\mid 1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 5 (5VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.

Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



1. Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.
4. $f(0) > f(5)$

Aufgabe 6 (4VP)

Gegeben sind die Ebene $E: -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass g zu E parallel ist.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

Aufgabe 7 (3VP)

Gegeben sind die Ebenen $E_1: 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$ und $E_2: 3x_1 + 2x_2 = 6$.
Stellen Sie die beiden Ebenen in einem Koordinatensystem dar.
Zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ohne weitere Rechnung ein.

Aufgabe 8 (3VP)

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) Gegeben ist die Funktion f durch (5VP)

$$f(x)=\frac{120(x-120)^2}{(x-120)^2+7200}+10 \quad \text{mit} \quad 0\leq x\leq 130.$$

Ihr Schaubild sei K.

Skizzieren Sie K.

Das Schaubild C einer weiteren Funktion g mit $g(x)=ax^2+bx+c$ enthält die Punkte $P_1(0\,|\,95)$, $P_2(10\,|\,95)$ und $P_3(20\,|\,92)$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c.

Skizzieren Sie C im ersten Feld des vorhandenen Koordinatensystems.

(Teilergebnis: $g(x)=-0,015x^2+0,15x+95$)

Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang.
Das Schaubild K beschreibt das Profil des Aufsprunghangs, die Kurve C die Flugbahn des Skispringers. Der Absprung erfolgt bei $x=0$ (alle Angaben in Meter).

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt. (5VP)

Wie groß ist die maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Aufsprunghang? b)

c) Der Wendepunkte $W(71\,|\,40)$ von K entspricht dem „kritischen Punkt" des Aufsprunghangs. (4VP)

Mögliche Flugbahnen des Skispringers werden nun durch die Schaubilder der Funktionen g_k mit $g_k(x)=-0,015x^2+kx+95$ beschrieben.

Welchen Wert darf der Parameter k höchstens annehmen, damit der Springer mit dieser Flugbahn nicht hinter dem kritischen Punkt landet? b)

d) Beim Umbau dieser Schanze soll das Profil des Aufsprunghanges verändert werden. (4VP)

Er soll nach dem Umbau durch die Funktion h mit

$$h(x)=0,0001\cdot(1,25x^3-225x^2+2.150x+900.000) \quad \text{mit} \quad 0\leq x\leq 130$$

beschrieben werden.

Muss zur Realisierung des neuen Profils insgesamt Erde weggefahren oder angeliefert werden, wenn angenommen wird, dass der Aufsprunghang überall gleich breit ist? b)

Aufgabe I 2.1

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) \text{ für } 0 \leq x \leq 12.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Skizzieren Sie K. (4VP)

Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K mit der Geraden $y = mx$ in Abhängigkeit von m an.

b) Bestimmen Sie die Seitenlängen des flächengrößten Rechtecks, bei dem zwei Ecken auf der x-Achse und die beiden anderen Ecken auf K liegen. (5VP)

Aufgabe I 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\sin(ax) \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

a) Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf das Schaubild von f_a aus? (4VP)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f_a mit der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt.

b) Das Schaubild von $f_{0,5}$ schließt im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ mit der x-Achse eine Fläche ein. Eine Parallele zur x-Achse durch den Kurvenpunkt $P(z \mid f_{0,5}(z))$ halbiert diese Fläche. (5VP)

Bestimmen Sie z.

Aufgabe I 3

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ gemessen.

Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration. (5VP)

Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?

Wie groß ist dieser höchste Wert?

Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\ \frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt.

Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden?

b) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut? (4VP)

Wie groß ist zum Zeitpunkt $t = 4$ die momentane Änderungsrate der Konzentration?

Ab diesem Zeitpunkt wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben.

Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet. Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. (5VP)

Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut des Patienten addiert.

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration fur $0 \leq t \leq 12$.

Die Konzentration des Medikaments im Blut darf 20 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ nicht übersteigen. Wird diese Vorgabe in diesem Fall eingehalten?

d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert. (4VP)

Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot \mathrm{e}^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.

Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ gemessen.

Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ erreicht.

Wahlteil II

Aufgabe II 1.1

Die Punkte $A(3\,|\,5\,|\,-4)$, $B(4\,|\,1\,|\,4)$ und $D(-4\,|\,9\,|\,0)$ legen eine Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. (5VP)

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M dieser Raute.

(Teilergebnisse: E: $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$; $M(0\,|\,5\,|\,2)$)

b) Gegeben ist ein weiterer Punkt $S(8\,|\,15\,|\,6)$. (7VP)

Die Raute $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide.

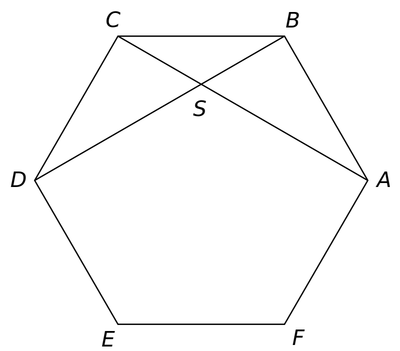
Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt.

Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels.

Aufgabe II 1.2

Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$. (4VP)
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.



Aufgabe II 2.1

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden.

Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck $ABCD$ mit $A(0\mid 0\mid 0)$, $B(6\mid 6\mid 0)$, $C(0\mid 18\mid 0)$ und $D(-8\mid 4\mid 0)$ und als Deckfläche das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ mit $A^*(4\mid 1\mid 20)$, $B^*(7\mid 4\mid 20)$ und $C^*(4\mid 10\mid 20)$

(Koordinatenangaben in Meter).

a) Zeigen Sie, dass $S(8\mid 2\mid 40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist. (5VP)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D^*.
Zeichnen Sie den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wand ABB^*A^*. (6VP)
Untersuchen Sie, ob die Wand ABB^*A^* nach außen überhängt.

Aufgabe II 2.2

Gegeben sind die Geraden (5VP)

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \vec{v} \text{ mit } s,\, t \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie zu jeder der folgenden Lagebeziehungen von g und h jeweils einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an und begründen Sie Ihre Antworten:

(1) g und h schneiden sich im Punkt $S(-4\mid 0\mid -1)$;

(2) g und h sind windschief;

(3) g und h schneiden sich orthogonal.