Pflichtteil

Aufgabe 1 (2 VP)

► Erste Ableitung von f bilden

$f'(x) = 5 \cdot (\sin(x) + 7)^4 \cdot \cos(x)$

Aufgabe 2 (2 VP)

► Stammfunktion von f bestimmen

$F(x) = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{x}$

Aufgabe 3 (3 VP)

► Gleichung lösen

Es folgen die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

Aufgabe 4 (4 VP)

► Gemeinsame Punkte bestimmen

Es folgen die beiden Schnittpunkte $S_1\,(2 \mid 1)$ und $S_2\left(-\frac{1}{2} \mid -4\right)$.

Die beiden Graphen schneiden sich im Punkt S_1 senkrecht.

Aufgabe 5 (5 VP)

a) **► Zuordnung der Graphen begründen**

Versuche, die Funktion f mit Abbildung 2 über eine einfache Eigenschaft von f in Verbindung zu setzen. Eine Möglichkeit ist z.B. den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ zu berechnen und mit den Graphen zu vergleichen:

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$

Damit folgt: Der Graph von f verläuft auf jeden Fall durch den Punkt $P(0 \mid -2)$. Ein Vergleich mit den Abbildungen zeigt: Nur der Graph in Abbildung 2 verläuft durch diesen Punkt. Also muss das Schaubild in Abbildung 2 zur Funktion f gehören.

b) **► Graphen zuordnen**

1. Schritt: Funktion g einem Graphen zuordnen

Funktion g gehört zum Schaubild in Abbildung 4. Dabei ist $a = 2$.

2. Schritt: Funktion h einem Graphen zuordnen

Funktion h gehört zum Schaubild in Abbildung 3. Dabei ist $b = -\frac{1}{2}$.

c) **► Funktion k bestimmen**

$k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$

Aufgabe 6 (3 VP)

▶ Schnittgerade der Ebenen

Die Schnittgerade der beiden Ebenen hat die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (4 VP)

a) **▶ Besondere Lage der Ebene *E***

Die Ebene E verläuft parallel zur x_2-Achse.

b) **▶ Spiegelpunkt von *A* an *E***

Der Spiegelpunkt A' hat die Koordinaten $A'(7\,|\,1\,|\,-3)$.

Aufgabe 8 (3 VP)

▶ Verfahren beschreiben

g liegt in E. Gesucht ist die Gleichung einer Geraden h, die ebenfalls in E liegt und senkrecht zu g steht. Wir wollen mit $\vec{n}$ den Normalenvektor der Ebene bezeichnen und nehmen an, dass für g gilt: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$.

Unsere Gerade h soll eine Gleichung der Form $h: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v}$ bekommen.

Du kannst so vorgehen:

- Betrachte den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, weil g in der Ebene liegt und $\vec{n}$ senkrecht auf E und damit auch senkrecht auf g steht.
- Überlege nun, welche Eigenschaften der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden h erfüllen muss. Er muss zum einen senkrecht auf den Vektor $\vec{u}$ sein, damit h senkrecht zu g ist. Gleichzeitig muss er auch senkrecht zu $\vec{n}$ sein, damit h in der Ebene E liegt. Gesucht ist also ein Vektor, der sowohl senkrecht auf $\vec{n}$ als auch auf Vektor $\vec{u}$ steht.
- Diesen kannst du z.B. mit dem Kreuzprodukt berechnen: $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$. Dieser Vektor $\vec{v}$ steht dann parallel auf $\vec{u}$ und $\vec{n}$.
- Bilde nun eine Gerade h, welche den gleichen Stützvektor wie die Gerade g hat und den Vektor $\vec{v}$ als Richtungsvektor. $\vec{v}$ haben wir so bestimmt, dass er senkrecht auf $\vec{n}$ steht. Also liegt die Gerade h in der Ebene. Zugleich haben wir $\vec{v}$ so bestimmt, dass er senkrecht auf $\vec{u}$ steht. Also liegt h in der Ebene E und ist senkrecht auf Gerade g.

Somit erhalten wir zuletzt die Gleichung $h: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot (\vec{n} \times \vec{u})$.

Wahlteil I Aufgabe I 1

a) ▶ **Koordinaten des nördlichsten Punktes** (6 VP)

$P(0,53\mid 3,31)$

▶ **Abstand von *M* und *P***

$d(M,P)\approx 2,86$

▶ **Übergang von Linkskurve in Rechtskurve**

$W(-1\mid 2,6)$.

▶ **Übergang der Umgehungsstraße in die Ortsdurchfahrt**

$f'(-3)=m$.

$m=\dfrac{-1-2}{3-(-3)}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$

$f'(-3)=-0,3\cdot(-3)^2-0,6\cdot(-3)+0,4=-\dfrac{1}{2}$

Somit gilt $f'(-3)=-\dfrac{1}{2}$, sodass die Straßen ohne Knick in einander übergehen.

b) ▶ **Größe des Gebiets bestimmen** (4 VP)

$A_u=10,8\,\text{FE}$.

▶ **Prozentualen Anteil bestimmen**

Es liegen $67,3\%$ der Fläche außerhalb des Gemeindegebiets.

c) ▶ **Punkt auf der Umgehungsstraße** (4 VP)

$Q(2\mid 2)$.

d) ▶ **Zeitpunkt der parallelen Fahrtrichtung bestimmen** (4 VP)

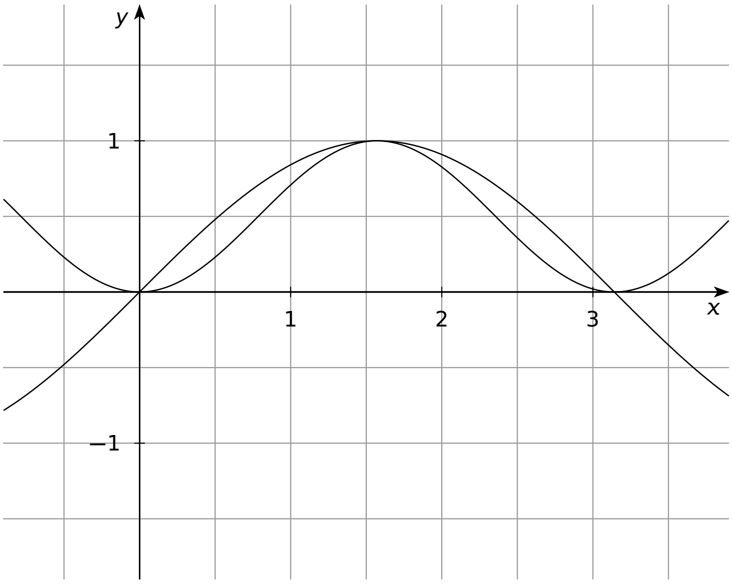
Der Graph von f besitzt nur an der Stelle $x_2=1$ eine Tangente, die parallel zur Geraden, die die Ortsdurchfahrt beschreibt, verläuft.

▶ **Größter Abstand der Ortsdurchfahrt von der Umgehungsstraße**

$d(U,R)\approx 2,862$

Aufgabe I 2

a) ▶ **Graphen von f und g_1 skizzieren** (6 VP)



▶ **Periode von f angeben**

$p = \pi$

▶ **Amplitude von f angeben**

$A = \frac{1}{2}$

▶ **Stellen des größten Unterschiedes**

$x_1 \approx 0,524;\ x_2 \approx 2,618.$

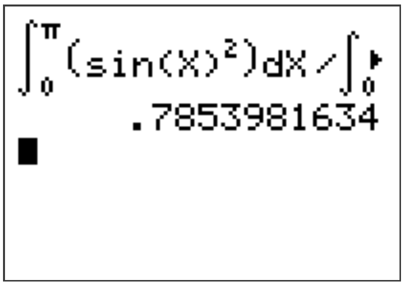
$y_1 = y_2 = 0,25$

b) ▶ **Schnittwinkel im Ursprung** (6 VP)

$t = 1$

▶ Gleichheit der Flächen bestimmen

$$t = \frac{\int\limits_0^{\pi} \sin(x)^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_0^{\pi} \sin(x) \mathrm{d}x}$$



$t \approx 0,785$

c) **▶ Spiegelung der Funktion g_1** (6 VP)

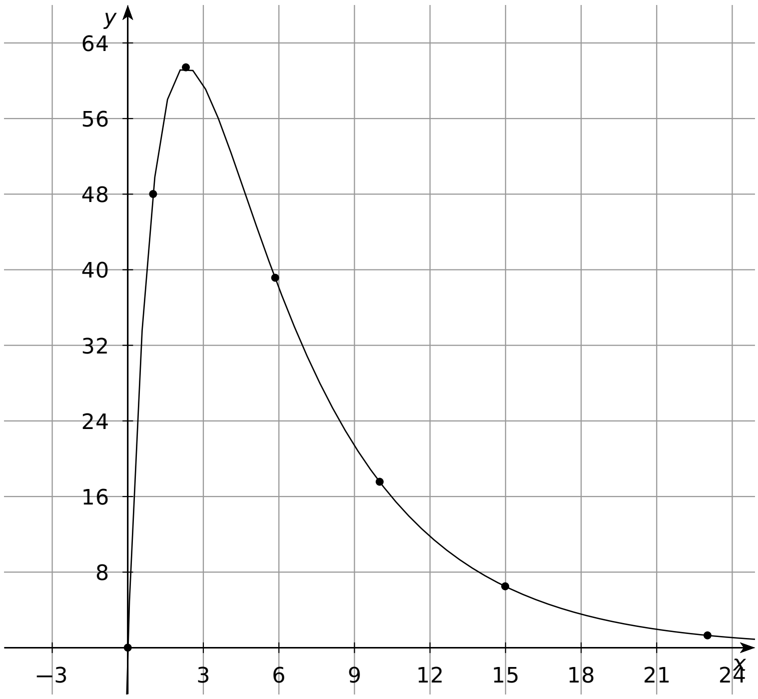
$q(x) = -\sin(x) + 4$

▶ Rotation von K um h

$903,86\,\mathrm{cm}^3 = 903,86\,\mathrm{ml} < 1\,\mathrm{l}$

Aufgabe I 3

a) ▶ **Graphen von f skizzieren** (7 VP)



▶ **Wirkzeit des Medikaments**

$0,63 \leq x \leq 6,3.$

▶ **Stärkste Ab- bzw. Zunahme bestimmen**

Es ergeben sich die maximale Zunahme an der Stelle $t = 0$ und die maximale Abnahme an der Stelle $t \approx 4,62$.

▶ **Durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut**

Die durchschnittliche Menge beträgt 35,71 mg.

b) ▶ **Langfristige Wirkstoffmenge im Blut bestimmen** (7 VP)

Es ergibt sich eine langfristige Wirkstoffmenge im Blut von 80 mg.

▶ **Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge begründen**

$g'(t) = 80 \cdot \left(0,05 \cdot e^{-0,05 \cdot t}\right)$

$80 > 0;\ 0,05 > 0;\ e^{-0,05 \cdot t} > 0; \qquad t \geq 0$

$g'(t) > 0; \qquad t \geq 0$

▶ **Zeitpunkt bestimmen**

$t \approx 27,73$

▶ **Zeitraum der Änderung um 30 mg bestimmen**

$6,80 \leq t \leq 21,80$

c) ▶ **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums angeben** (4 VP)

$g'(t) = 0,05 \cdot (80 - g(t))$

▶ **Konstante Zufuhr bestimmen**

$4\,\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}.$

▶ **Wirkstoffmenge pro Minute bestimmen**

$4{,}5\,\dfrac{\text{mg}}{min}$

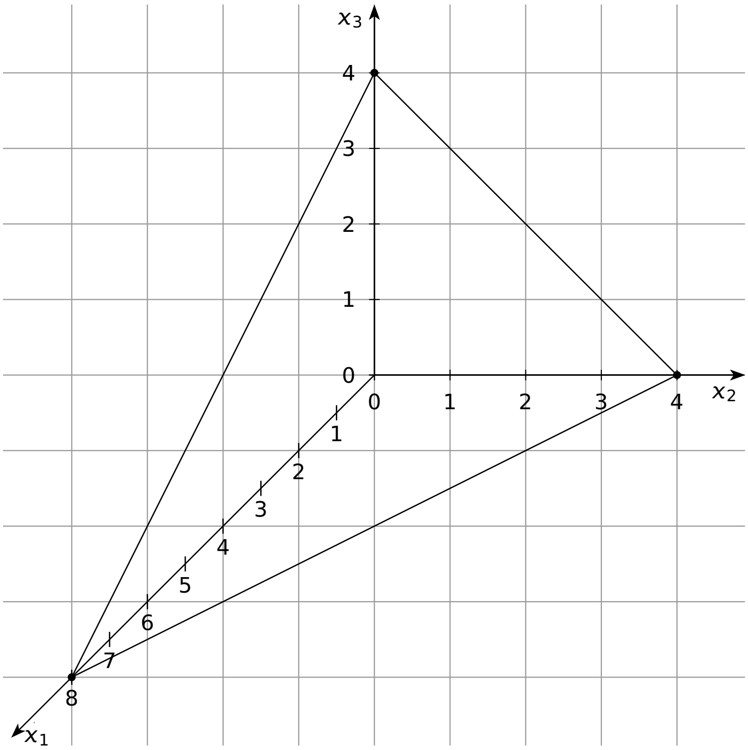
Wahlteil II Aufgabe II 1

a) ▶ **Koordinatengleichung von *E*** (4P)

Die Koordinatengleichung von E lautet:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8.$

▶ **Darstellung der Ebene *E* im Koordinatensystem**



▶ **Schnittwinkel von *E* mit der x_1-Achse**

Der Schnittwinkel mit der x_1-Achse ergibt sich zu

$\alpha \approx 19,4712^\circ.$

b) ▶ **Nachweis, dass das Dreieck △*ABP* gleichschenklig ist** (6P)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind. Die Seitenlängen von $\triangle ABD$ kannst du über die Länge der Verbindungsvektoren, also von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ der einzelnen Seiten berechnen.

$l_{AB} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$

$l_{AP} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2,5^2} = \sqrt{16,25}$

$l_{BP} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2,5^2} = \sqrt{16,25}$

Die Seiten AP und BP sind gleich lang, damit ist gezeigt: Das Dreieck $\triangle ABP$ ist gleichschenklig.

▸ **Koordinaten von *C* und *D***

Die Koordinaten von C und D lauten:

$C(0\,|-1\,|\,5)$ und $D(4\,|-3\,|\,5)$.

▸ **Koordinaten der Pyramidenspitzen**

Die Spitzen der Pyramiden haben die Koordinaten

$S_1(7\,|\,8\,|\,10,5)$ und $S_2(-1\,|-8\,|-5,5)$.

c) ▸ **Punkte auf der x_1-Achse, die ein rechtwinkliges Dreieck mit *A* und *B* bilden** (3P)

Die Koordinaten der gesuchten Punkte lauten:

$N_1(5\,|\,0\,|\,0)$ und $N_2(3\,|\,0\,|\,0)$.

d) ▸ **Prüfung, ob der Punkt *R* sich innerhalb des Kegels befindet** (3P)

Der Abstand des Punktes R von der x_3-Achse ist kleiner als der Radius r des Kegelschnitts in der Höhe $x_3 = 3$. Damit befindet sich R im Kegel.

Aufgabe II 2

a) ► **Bewegung in einer Minute bestimmen** (4 VP)

$d \approx 112,25$

► **Merkmal, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche entfernt**

Der Richtungsvektor der Geraden besitzt eine negative x_3-Koordinate, sodass die Gerade ins negative strebt, während die Meeresoberfläche mit $x_3 = 0$ beschrieben werden kann.

► **Winkel zwischen der Meeresoberfläche und der Route von U_1**

$\beta = 15,5^\circ$.

b) ► **Geschwindigkeit von U_2 bestimmen** (4 VP)

$v = 210 \,\frac{\text{m}}{\text{min}}$

► **Begründung, dass die Gerade die Bewegung von U_2 beschreibt**

Stützvektor$\widehat{=}\overrightarrow{OA}$

Richtungsvektor$\widehat{=}\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OA}$

► **Zeitpunkt gleicher Tiefe feststellen**

$t = 3,4$

c) ► **Abstand der U-Boote bei Beobachtungsbeginn** (4 VP)

$d(A, X) \approx 128,41$

► **Einhaltung des Mindestabstands prüfen**

Es gilt $d_{min} = 123,20 > 100$. Somit wird der Mindestabstand zwischen den U-Booten immer eingehalten.