Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Anwendung der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4x(2x^2-3)-2x^2\cdot 4x}{(2x^2-3)^2} && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
&= \frac{8x^3-12x-8x^3}{(2x^2-3)^2} && \mid \text{zusammenfassen}\\
f'(x) &= \frac{-12x}{(2x^2-3)^2}
\end{aligned}
$$

(Aufbau und Herleitung der Quotientenregel siehe Skript)

Aufgabe 2 (2VP)

Nullstellen bestimmen

Für die Stammfunktion G von g gilt:

$$
\begin{aligned}
G(x) &= 2x-3\cdot(-\cos(4x))\cdot\frac{1}{4}+c && \mid \text{zusammenfassen}\\
G(x) &= 2x+\frac{3}{4}\cos(4x)+c
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion von Sinus- und Kosinusfunktionen wird nach folgender Regel bestimmt:

$$
\begin{tikzcd}
 & \sin(x)' \arrow[dl, bend right] & \\
-\cos(x)' \arrow[dr, bend right] & & \cos(x)' \arrow[ul, bend right] \\
 & -\sin(x)' \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

Merkhilfe Trig-Kreis

Dabei muss die innere „Hochleitung“ beachtet werden.

Die Integralkonstante wird mit Hilfe einer Punktprobe berechnet.

Dazu wird der Punkt P in die Gleichung eingesetzt.

$$
\begin{aligned}
G(0) &= 1\\
2\cdot 0+\frac{3}{4}\cos(4\cdot 0)+c &= 1 && \mid \text{zusammenfassen}\\
\frac{3}{4}+c &= 1 && \mid -\frac{3}{4}\\
c &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion hat die Gleichung $G(x)=2x+\frac{3}{4}\cos(4x)+\frac{1}{4}$.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Gleichung wird zunächst umgeformt:

$$\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^2}=1 \qquad |\cdot x^4$$
$$6+x^2=x^4$$
$$x^4-x^2-6=0$$

Mit Hilfe der Substitution von $x^2=u$ werden für u die Werte berechnet:

$$u^2-u-6=0$$
$$u_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}$$
$$u_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$
$$u_1=3;\quad u_2=-2$$

Nach Rücksubstitution erhält man die Werte für x:

$$u_1=x^2$$
$$3=x^2$$
$$x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$$
$$u_2=x^2$$
$$-2=x^2 \quad \text{keine Lösung}$$

Die Lösungsmenge beträgt $\mathbb{L}=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades hat die Funktionsgleichung $h(x)=ax^2+bx+c$ und die Ableitung $h'(x)=2ax+b$.

Es ist bekannt, dass der Punkt $T(-1\,|\,-4)$ ein Tiefpunkt des Schaubildes und $Q(2\,|\,5)$ ein weiterer Punkt davon ist. Somit gilt:

$$\begin{array}{lcr} h(-1)=-4 & & a-b+c=-4 \\ h'(-1)=0 & \Leftrightarrow & -2a+b=0 \\ h(2)=5 & & 4a+2b+c=5 \end{array}$$

Das entstehende lineare Gleichungssystem (LGS) kann durch das Gauß-Verfahren (Additionsverfahren) gelöst werden:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & a- & b+ & c= & -4 & \\ \text{II} & -2a+ & b & = & 0 & \\ \text{III} & 4a+ & 2b+ & c= & 5 & \\ \hline \text{I} & a- & b+ & c= & -4 & \\ \text{II} & -2a+ & b & = & 0 & \\ \text{IIIa} & 3a+ & 3b & = & 9 & (\text{III}-\text{I}) \\ \hline \text{I} & a- & b+ & c= & -4 & \\ \text{II} & -2a+ & b & = & 0 & \\ \text{IIIb} & 9a & & = & 9 & (\text{IIIa}-3\cdot\text{II}) \end{array}$$

Aus Gleichung IIIb folgt $a=1$.

Einsetzen dieses Werts in Gleichung II ergibt:

$-2\cdot 1+b=0 \quad\Leftrightarrow\quad b=2$

Diese beiden Werte wiederum eingesetzt in Gleichung I ergeben:

$1-2+c=-4 \quad\Leftrightarrow\quad c=-3$

Somit ist $a=1$, $b=2$ und $c=-3$. Die Funktion h hat damit die Funktionsgleichung $h(x)=x^2+2x-3$.

Aufgabe 5 (5VP)

a) Für die Funktionen f, g und h gilt:

- Da es sich bei der Funktion f um eine gebrochenrationale Funktion handelt, muss ihr Schaubild 2 zugeordnet werden, da dieses als einziges eine Definitionslücke aufweist.
- Der Funktion g muss Schaubild 3 zugeordnet werden, da dieses eine waagerechte Asymptote hat. Schaubild 2 ist nicht möglich, da g vollständig definiert ist.
- Die Funktion h ist eine ganzrationale Funktion zweiten Grades, also eine quadratische Funktion mit dem Schaubild einer Parabel. Schaubild 4 zeigt dies als einziges, daher ist Schaubild 4 das der Funktion h.

b) Für die Werte a bzw. b der Funktionen f und g gilt:

- Die Definitionslücke von f befindet sich an der Stelle $x=-1$, daher gilt $a=1$ und damit $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$.
- Den Wert von b erhält man durch eine Punktprobe: Der Koordinatenursprung $O(0\,|\,0)$ liegt auf dem Schaubild, daraus folgt:

  $0=-2+b\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot 0} \quad\Leftrightarrow\quad 0=-2+b\cdot\mathrm{e}^0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=-2+b \quad\Leftrightarrow\quad b=2,$

  wobei zu beachten ist, dass $\mathrm{e}^0=1$ gilt. Die Funktionsgleichung von g ergibt sich damit zu $g(x)=-2+2\cdot\mathrm{e}^{-0,5x}$.

Aufgabe 6 (4VP)

Für den Abstand der beiden Geraden wird der kürzeste Abstand zweier Punkte auf jeweils einer Gerade bestimmt. Dazu wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die senkrecht zur Gerade h ist und den Punkt $P(2\,|\,9\,|\,4)$ von der Geraden g enthält.
Die Hilfsebene H besitzt den Richtungsvektor von h als einen Normalenvektor. Als Ansatz für sie ergibt sich damit H: $6x_1-8x_2+2x_3=d$.

Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, werden die Koordinaten von P in diese Gleichung eingesetzt, denn dieser Punkt liegt ebenfalls auf der Ebene:

$$\begin{aligned} P \text{ in } H\colon\ 6\cdot 2-8\cdot 9+2\cdot 4 &= d \\ d &= -52 \end{aligned}$$

Es ergibt sich $H\colon\ 6x_1-8x_2+2x=-52$ als Koordinatengleichung von H.

Nun muss diese Hilfsebene noch mit der Geraden h selbst geschnitten werden. Dazu werden die Koordinaten von h in die Ebenengleichung eingesetzt. Beachten Sie dabei, dass beispielsweise die x_1-Koordinate von h der **ersten Zeile** der Parametergleichung entspricht, es ist also z.B. $x_1=1+6t$:

$$\begin{aligned} H\cap h\colon\quad 6(1+6t)-8(2-8t)+2(5+2t) &= -52 \\ 6+36t-16+64t+10+4t &= -52 \\ 104t &= -52 \\ t &= -0,5 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S liegt somit für $t=-0,5$ auf der Geraden h:

$$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}-0,5\begin{pmatrix}6\\-8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad S(-2\,|\,6\,|\,4))$$

Der Abstand der beiden Punkte P und S entspricht dem Abstand der beiden Geraden:

$$d(g;\,h)=d(P;\,S)=|\overrightarrow{PS}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}=5$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt somit 5 LE.

Aufgabe 7 (3VP)

Die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind gegeben, damit kann man die Koordinatengleichung direkt aufstellen:

$E\colon\ 4x_1+2x_2+x_3=6$

Die Gerade g und E sind parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt besitzen. Es wird daher versucht, ein Schnittpunkt zu berechnen:

$$\begin{aligned} 4(-4-2t)+2(2+3t)+(3+2t) &= 6 \\ -16-8t+4+6t+3+2t &= 6 \\ -9 &= 6 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist ein Widerspruch, somit existiert **kein** Schnittpunkt zwischen g und E und die Gerade g ist damit parallel zur Ebene E.

Aufgabe 8

(3VP)

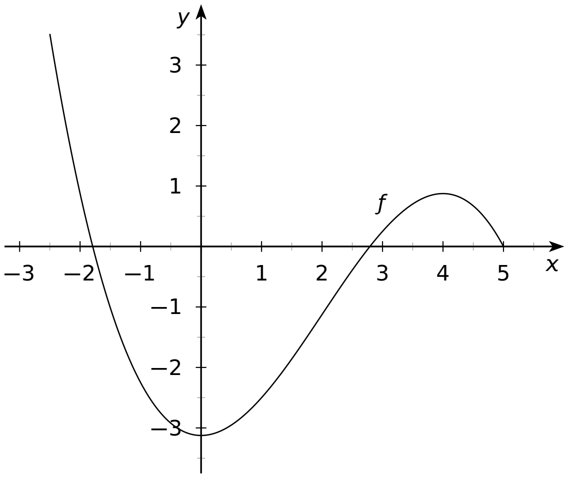
- Ist das Produkt der beiden Normalenvektoren gleich Null (also $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$), dann sind die beiden Ebenen orthogonal zueinander und schneiden sich in Form einer Schnittgeraden.
- Sind $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Vielfache voneinander und liegt ein Punkt, dessen Koordinaten genau dem Ortsvektor $\vec{p}_1$ entsprechen, auf der Ebene E_2, so sind die beiden Ebenen identisch.
- Sind $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Vielfache voneinander und liegt ein Punkt, dessen Koordinaten genau dem Ortsvektor $\vec{p}_1$ entsprechen, **nicht** auf der Ebene E_2, so sind die beiden Ebenen parallel zueinander.
- In allen anderen Fällen schneiden sich die beiden Ebenen in einer Schnittgerade, sind dabei jedoch nicht orthogonal zueinander.

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

a) **Skizze** (8VP)

Das Schaubild der gegebenen Funktion f mit
$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125$
ergibt sich mit dem GTR und ist rechts abgebildet. Die positive x-Achse weist nach Osten, eine Längeneinheit entspricht 100 m.



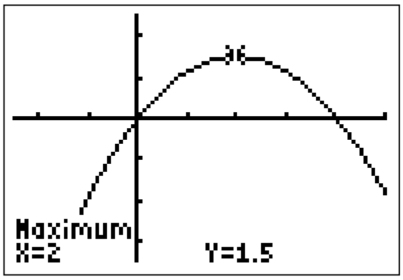
Berechnung der steilsten Stelle der östlichen Talseite

Im Wendepunkt ist die östliche Talseite am steilsten.

Mit dem GTR kann die gesuchte Stelle als **Maximum** der ersten Ableitung von f bestimmt werden. Dazu wird das Schaubild der Ableitung $f'(x) = -0,375x^2 + 1,5x$ gezeichnet und dann über

2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum

anschließend das Maximum von f' berechnet.



Mit dem GTR ergibt sich das Maximum 1,5 an der Stelle $x = 2$. Somit ist die östliche Talseite 200 Meter vom tiefsten Punkt entfernt am steilsten.

Handschriftliche Lösung

Zur Berechnung von Wendepunkten wird die zweite Ableitung gleich Null gesetzt und die berechneten x-Werte in die dritte Ableitung eingesetzt. Ist die dritte Ableitung an einer Stelle ungleich Null, so liegt an dieser Stelle ein Wendepunkt vor.

Zunächst werden die Ableitungen gebildet:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\cdot(-0,125)x^2 + 2\cdot 0,75x \\
&= -0,375x^2 + 1,5x \\
f''(x) &= 2\cdot(-0,375)x + 1,5 \\
&= -0,75x + 1,5 \\
f'''(x) &= -0,75
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird nun gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
-0,75x + 1,5 &= 0 \qquad \mid +0,75x \\
1,5 &= 0,75x \qquad \mid :0,75x \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Dieser Wert wird in die dritte Ableitung eingesetzt:

$f'''(2) = -0,75 \neq 0$, daraus folgt, dass ein Wendepunkt vorliegt.

$x=2$ in die Funktion f eingesetzt ergibt den y-Wert des Wendepunkts:

$f(2)=-0,125\cdot 2^3+0,75\cdot 2^2-3,125=-1,125$

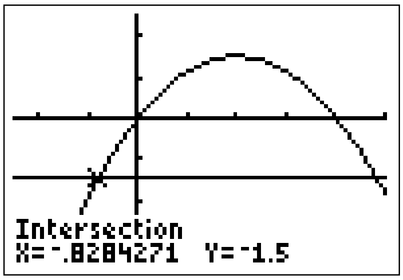
Der Wendepunkt W hat damit die Koordinaten $W(2\,|\,-1,125)$.

Somit ist die östliche Talseite 200 Meter vom tiefsten Punkt entfernt am steilsten.

Berechnung der Stelle mit der gleichen Steilheit auf der Westseite

„Gleiche Steilheit“ bedeutet hier in diesem Kontext, dass das Schaubild von f an der gesuchten Stelle ebenfalls die Steigung $1,5$ oder auch $-1,5$ besitzt. Da das Schaubild von f an der Westseite **fällt**, ist also der Punkt gesucht, an dem die Steigung $f'(x)=-1,5$ ist.

Mit dem GTR lässt sich diese Stelle finden, indem das Schaubild der Ableitung f' mit der Geraden $y=-1,5$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{5: intersect}}$ geschnitten wird. Es ergeben sich zwei mögliche Stellen $x_1\approx 0,828$ und $x_2\approx 4,828$. Die Westseite befindet sich im Koordinatensystem allerdings im negativen Bereich der x-Achse, somit ist x_1 die gesuchte Lösung.



Handschriftliche Lösung

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -1,5 \\
-0,375x^2+1,5x &= -1,5 && \mid +1,5 \\
-0,375x^2+1,5x+1,5 &= 0 && \mid :(-0,375) \\
x^2-4x-4 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{4}{2}\pm\sqrt{\frac{16}{4}+4}=2\pm\sqrt{8} \\
x_1\approx -0,828;\ \ x_2 &\approx 4,828
\end{aligned}
$$

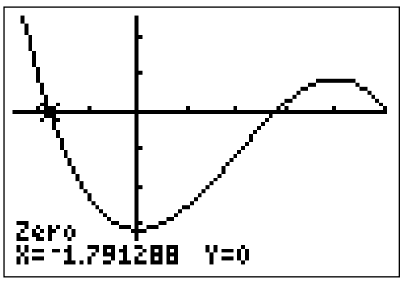
Auch hier ergibt sich $x_1\approx -0,828$ als die gesuchte Stelle, da nur sie auf der **Westseite** des Tals liegt.

Etwa 83 m vom tiefsten Punkt entfernt ist die Westseite genauso steil wie die Ostseite in ihrem steilsten Punkt.

Berechnung der Breite der Staumauer

Der Tiefpunkt T des Schaubilds von f hat laut GTR die Koordinaten $T(0\,|\,-3,125)$. Wenn die Staumauer von diesem Punkt aus gesehen eine Höhe von $312,5$ m besitzt, bedeutet dies, dass ihre Oberkante **mit der x-Achse zusammenfällt**. Die beiden Begrenzungspunkte der Oberkante stellen dabei die **Nullstellen** von f dar.

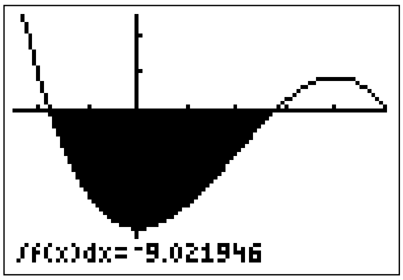
Die Nullstellen des Schaubilds werden über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{2: zero}}$ berechnet. Es ergeben sich die beiden Nullstellen $x_1\approx -1,791$ und $x_2\approx 2,791$.
Die Länge ℓ der Oberkante der Staumauer entspricht dem Abstand der beiden Nullstellen:
$\ell=x_2-x_1\approx 2,791+1,791=4,582$.



Die Oberkante der Staumauer hat somit eine Länge von etwa $458,2$ m.

Berechnung des gesuchten Flächeninhalts

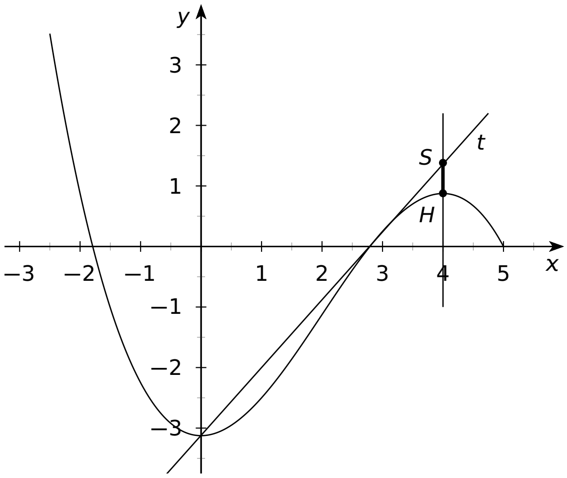
Die zu versiegelnde Fläche der Staumauer entspricht nun dem Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Schaubild von f und unterhalb der x-Achse liegt.



Das entsprechende Integral wird über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow 7\text{: } \int f(x)\,dx}$ berechnet, es ist negativ und hat einen Wert von etwa $-9,02$. Die gesuchte Fläche ist entsprechend positiv.
Da die Längeneinheit zu 100 m festgelegt wurde, muss dieser Wert damit mit $100 \cdot 100 = 10.000$ multipliziert werden, um das Ergebnis in m^2 zu erhalten.

Die zu versiegelnde Fläche besitzt einen Flächeninhalt von etwa $90.200\ \text{m}^2$.

b) **Berechnung der Mindesthöhe des Gerüsts** (6VP)



Das Gerüst befindet sich auf dem höchsten Punkt auf der östlichen Seite des Tals – also auf dem **Hochpunkt** H des Schaubilds von f. Dieser Punkt hat laut dem GTR die Koordinaten $H(4\,|\,0,875)$.
Wenn der Tiefpunkt T noch vom Licht bestrahlt werden soll, legt das Licht einen Weg zurück, der durch die **Tangente** an das Schaubild von f beschrieben wird, die das Schaubild im Tiefpunkt T schneidet. Sie schneidet eine **senkrechte Gerade** durch den Hochpunkt mit der Gleichung $x = 4$ in einem Schnittpunkt S, der über dem Hochpunkt liegt. Dieser Punkt S ist dabei die **Spitze** des Gerüsts.

Für die Tangente t an einer Stelle x_0 gilt allgemein $t\colon y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Da der Berührpunkt $B(x_0\,|\,f(x_0))$ nicht bekannt ist, lässt sich hier lediglich $f(x_0) = -0,125x_0^3 + 0,75x_0^2 - 3,125$ und $f'(x_0) = -0,375x_0^2 + 1,5x_0$ sagen. Damit ergibt sich:

$$t\colon y = (-0,375x_0^2 + 1,5x_0)(x-x_0) + (-0,125x_0^3 + 0,75x_0^2 - 3,125)$$

Es ist weiterhin bekannt, dass die Tangente durch den Tiefpunkt $T(0\,|\,-3,125)$ verläuft. Seine Koordinaten können also für x und y eingesetzt werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-3,125 &= (-0,375x_0^2 + 1,5x_0)(0-x_0) - 0,125x_0^3 + 0,75x_0^2 - 3,125 \quad &&|\ +3,125\\
0 &= 0,375x_0^3 - 1,5x_0^2 - 0,125x_0^3 + 0,75x_0^2\\
0 &= 0,25x_0^3 - 0,75x_0^2 &&|\ 0,25x_0^2 \text{ ausklammern}\\
0 &= 0,25x_0^2(x_0-3)
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die beiden Lösungen $x_{0/1} = 0$ und $x_{0/2} = 3$. Die erste Lösung entfällt jedoch, da sie der Stelle entspricht, an der der Tiefpunkt T liegt. Somit ist die gesuchte Lösung $x_0 = 3$ und der Berührpunkt damit $B(3\,|\,f(3))$ bzw. $B(3\,|\,0,25)$. Die Tangente hat dabei die Gleichung

t: $y = f'(3)(x-3) + f(3)$
$\quad y = 1,125(x-3) + 0,25$
$\quad y = 1,125x - 3,125$

Der Schnittpunkt S liegt auf der Tangenten und gleichzeitig auf der Geraden $x = 4$, somit hat er ebenfalls die x-Koordinate 4. Für seine y-Koordinate gilt:

$y = 1,125 \cdot 4 - 3,125 = 1,375$

Somit ist der Schnittpunkt der Punkt $S(4 \mid 1,375)$.

Die Höhe des Gerüsts entspricht nun dem Abstand von S zum Hochpunkt $H(4 \mid 0,875)$. Dieser Abstand entspricht lediglich dem Unterschied ihrer beiden y-Koordinaten, somit ist $h = 1,375 - 0,875 = 0,5$.

Das Gerüst muss somit 50 m hoch werden.

Berechnung der Höhe des Gerüsts zur Gesamtbeleuchtung des Tals

Wenn das gesamte Tal beleuchtet werden soll, dann müssen die Lichtstrahlen mindestens so steil fallen, wie die Ostwand in ihrem steilsten Punkt ist. Dies ist im **Wendepunkt** $W(2 \mid -1,125)$ (vgl. Teilaufgabe a) der Fall, die hier gesuchte Tangente ist also die **Wendetangente**. Für ihre Steigung gilt weiterhin $f'(2) = 1,5$ (vgl. Teilaufgabe a).

Für die Wendetangente w ergibt sich aus der allgemeinen Tangentengleichung:

w: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$\quad y = 1,5(x-2) - 1,125$
$\quad y = 1,5x - 4,125$

Hier ergibt sich für den Schnittpunkt S die y-Koordinate:

$y = 1,5 \cdot 4 - 4,125 = 1,875$

Als Abstand von diesem Punkt vom Hochpunkt H ergibt sich somit
$h = 1,875 - 0,875 = 1$

Hier müsste das Gerüst also 100 m hoch werden.

Aufgabe I 1.2

Der Nachweis, dass für die n-te Ableitung der Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

$$g^{(n)}(x) = n!\frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}} \quad \text{für } n \geq 1$$

gilt, soll über das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** geführt werden.

Induktionsanfang

Es muss zunächst gezeigt werden, dass die Behauptung für $n = 1$ gilt. Es muss hier $g'(x) = g^{(1)}(x)$ gelten.

Für die Ableitung von g erhält man mithilfe der Quotientenregel (oder auch Kettenregel):

$$g'(x) = \frac{0 \cdot (1-2x) - 1 \cdot (-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

Nach der angegebenen Formel gilt weiterhin:

$$g^{(1)}(x) = 1!\frac{2^1}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

Es gilt also $g'(x) = g^{(1)}(x)$. Damit ist der Induktionsanfang gesichert.

Induktionsschritt

Es wird angenommen, dass die Aussage für irgendeine beliebige Zahl $k \geq 1$ gilt, es muss also

$$g^{(k)}(x) = k!\frac{2^k}{(1-2x)^{k+1}} \text{ gelten.}$$

Es wird angenommen, dass damit automatisch für die Folgezahl $k+1$ auch gilt:

$$g^{(k+1)}(x) = (k+1)!\frac{2^{k+1}}{(1-2x)^{k+2}}$$

Um dies zu beweisen, muss gezeigt werden, dass für diese beliebige Zahl k auch $\left[g^{(k)}(x)\right]' = g^{(k+1)}(x)$ gilt. Dazu wird $g^{(k)}(x)$ nach der Quotientenregel abgeleitet und vereinfacht, was auf den Funktionsterm von $g^{(k+1)}(x)$ führen müsste:

$$\begin{aligned}
\left[g^{(k)}(x)\right]' &= k!\frac{0 \cdot (1-2x)^{k+1} - 2^k \cdot (k+1)(1-2x)^k \cdot (-2)}{((1-2x)^{k+1})^2} \\
&= k!\frac{2 \cdot 2^k \cdot (k+1) \cdot (1-2x)^k}{(1-2x)^{2k+2}} && \mid 2^1 \cdot 2^k = 2^{k+1} \\
&= k! \cdot (k+1)\frac{2^{k+1}(1-2x)^k}{(1-2x)^k \cdot (1-2x)^{k+2}} && \mid k! \cdot (k+1) = (k+1)! \\
&= (k+1)!\frac{2^{k+1}}{(1-2x)^{k+2}} \\
&= g^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung auch für $k+1$.

Damit ist die Behauptung für alle $n \geq 1$ bewiesen.

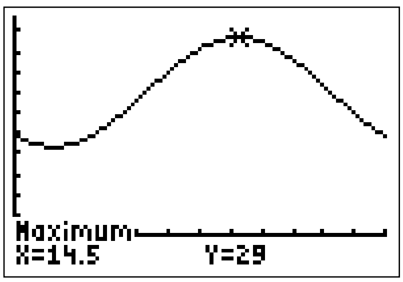
Aufgabe I 2

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Berechnung der Uhrzeiten der maximalen/minimalen Außentemperatur** (5VP)

Die gesuchten Uhrzeiten entsprechen den Stellen, an denen die Funktion f ihr **Maximum** bzw. **Minimum** besitzt.

Das Maximum von f wird über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ berechnet. Es liegt an der Stelle $x = 14,5$.
Entsprechend ergibt sich das Minimum an der Stelle $x = 2,5$.
Um 2.30 Uhr ist die Außentemperatur minimal, um 14.30 Uhr ist sie maximal.



Handschriftliche Lösung

Bedingung: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

Die ersten beiden Ableitungen von f werden nach der Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]\cdot\frac{\pi}{12} \\ &= \frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right] \\ f''(x) &= \frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]\right)\cdot\frac{\pi}{12} \\ &= -\frac{\pi^2}{18}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right] \end{aligned}$$

Zuerst wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right] &= 0 \end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion ist z.B. an den Stellen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{5\pi}{2}$ gleich Null. Allgemein gilt: An den Stellen $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ nimmt die Funktion den Wert Null an, wobei k irgendeine beliebige ganze Zahl ist.

Der obige Ausdruck ist also gleich Null, wenn $\frac{\pi}{12}(x-8,5)$ gleich $\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12}(x-8,5) &= \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \qquad |:\frac{\pi}{12} \\ x-8,5 &= 6+12\cdot k \\ x &= 14,5+12k \end{aligned}$$

Die x-Werte müssen innerhalb des Definitionsbereichs $0\leq x\leq 24$ von f liegen. Die einzigen Lösungen ergeben sich daher nur für $k=0$ mit $x_1=14,5$ und für $k=-1$ mit $x_2=2,5$.

Um die Art dieser Extrema zu bestimmen, werden die Werte in die zweite Ableitung eingesetzt.

$$f''(14,5)=-\frac{\pi^2}{18}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(14,5-8,5)\right]=-\frac{\pi^2}{18}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}=-\frac{\pi^2}{18}<0$$

Somit liegt an der Stelle $x=14,5$ ein Maximum vor. Um 14.30 Uhr ist somit die maximale Außentemperatur erreicht.

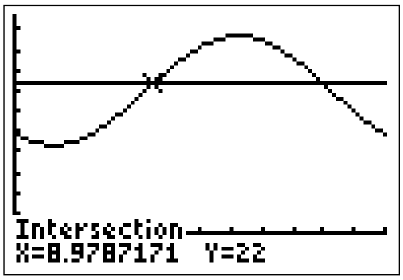
$$f''(2,5)=-\frac{\pi^2}{18}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(2,5-8,5)\right]=-\frac{\pi^2}{18}\cdot\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}=+\frac{\pi^2}{18}>0$$

Damit liegt an der Stelle $x=2,5$ ein Minimum vor. Um 2.30 Uhr ist die Außentemperatur minimal.

Zeitdauer, in der die Außentemperatur höchstens 22°C beträgt

Es sind nun diejenigen Bereiche gesucht, in denen die Außentemperatur $f(x)$ kleiner oder gleich 22 ist. Dazu wird zunächst die Funktion f mit dem GTR mit der Geraden $y=22$ geschnitten.

Dazu wird im Graph-Menü die Gerade $y = 22$ gezeichnet und dann über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ mit dem Schaubild von f geschnitten. Es ergeben sich die zwei Schnittstellen $x_1 \approx 8,98$ und $x_2 \approx 20,02$.



Am Schaubild ist erkennbar, das im Zeitrahmen zwischen diesen beiden Stellen, der $20,02 - 8,98$, also etwa $11,04$ Stunden lang war, die Temperatur höher als 22°C war. Somit war die Temperatur etwa $24 - 11,04 = 12,95$, also etwa 13 Stunden an diesem Tag kleiner als 22°C.

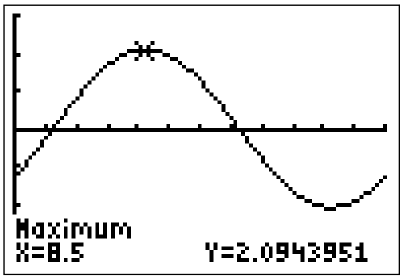
Berechnung des größten Temperaturanstiegs im Freien

Der Temperaturanstieg oder die Temperaturabsenkung wird durch die **Ableitung** von f beschrieben. Für sie gilt

$$f'(x) = \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] \quad \text{(siehe oben).}$$

Der Temperaturanstieg von f ist dabei maximal, wenn $f'(x)$ maximal wird.

Ändern Sie dazu die Window-Einstellungen im Graph-Fenster (die y-Achse etwa auf $-3,5 \leq y \leq 3$) und zeichnen die das Schaubild von f'. Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ wird anschließend das Maximum von f' bestimmt. Es liegt an der Stelle $x = 8,5$.



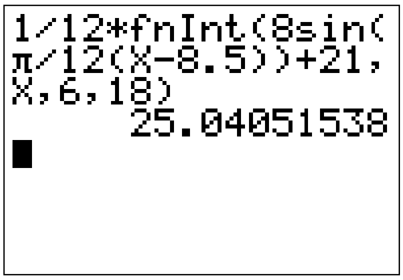
Somit ist der Temperaturanstieg im Freien um 8.30 Uhr am größten.
Alternativ: Zwischen dem Minimum bei $x = 2,5$ und dem Maximum bei $x = 14,5$ hat das Schaubild von f bei $x = 8,5$ eine **Wendestelle**. Diese Wendestelle entspricht genau der Stelle, an der f' ihr Maximum besitzt.

Berechnung der durchschnittlichen Temperatur im Freien

Um die durchschnittliche Temperatur $\overline{T}$ im Freien zwischen 6 und 18 Uhr zu bestimmen, wird der Durchschnittwert von f im Intervall $[6; 18]$ bestimmt. Für ihn gilt:

$$\overline{T} = \frac{1}{18-6} \cdot \int_6^{18} f(x)\,dx = \frac{1}{12} \cdot \int_6^{18} f(x)\,dx$$

Dieses Integral lässt sich über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR berechnen. Es beträgt laut GTR $\overline{T} \approx 25,04$.



Zwischen 6 und 18 Uhr betrug die Durchschnittstemperatur im Freien ca. 25°C.

b) **Bestimmung eines Funktionsterms der Funktion g** (7VP)

Die Funktion g hat die allgemeine Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \sin[b(x - c)] + d$.

Wie aus dem Schaubild von g abzulesen ist, schwanken ihre Funktionswerte zwischen 15 und 21. Für ihre Amplitude gilt damit $a = \dfrac{21-15}{2} = 3$.

Nach dem Schaubild hat g weiterhin die Periode $p = 24$. Für den Parameter b gilt damit $b = \dfrac{2\pi}{p} = \dfrac{\pi}{12}$.

Der Parameter c gibt an, wie weit das Schaubild von g im Vergleich zur normalen Sinusfunktion nach rechts verschoben ist. Dies ist hier um 12 Einheiten der Fall, somit ist $c = 12$.

Der Parameter d gibt letztlich an, wie weit das Schaubild nach oben verschoben wurde. Da es hier um 18 Einheiten nach oben verschoben wurde, ist $d = 18$.

Insgesamt hat g damit den Funktionsterm $\underline{\underline{g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-12)\right] + 18}}$.

Entstehung von K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion

Das Schaubild K_g der Funktion g entsteht aufgrund der Parameter aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ durch

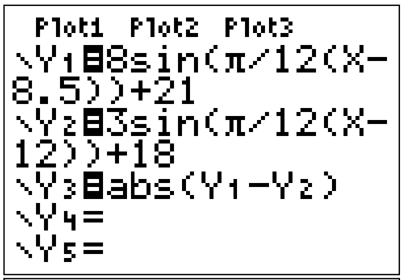
- Streckung in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $a = 3$,
- Streckung in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\dfrac{12}{\pi}$, also mit dem Kehrwert von b,
- Verschiebung in Richtung der x-Achse um 12 Einheiten nach rechts,
- Verschiebung in Richtung der y-Achse um 18 Einheiten nach oben.

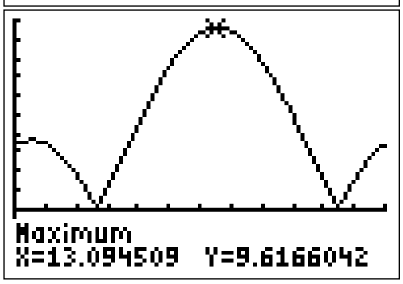
Mögliche Ursache für die Zeitverschiebung von K_f und K_g

Aufgrund der Tatsache, dass das Haus isoliert ist, macht sich eine Temperaturänderung im Freien im Haus erst später, also zeitversetzt bemerkbar.

Größter Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur

Der Unterschied d zwischen der Außentemperatur f und der Innentemperatur g wird beschrieben durch $d(x) = |f(x) - g(x)|$.





Dazu werden im Graph-Menü unter Y_1 und Y_2 die Funktionsgleichungen von f und g eingegeben, unter Y_3 schließlich abs(Y_1–Y_2). abs steht hierbei für „Absolutbetrag“ und ist unter $\boxed{\text{MATH} \to \text{rechte Pfeiltaste (NUM)} \to \text{1: abs}}$ aufrufbar.
Anschließend wird das Window-Fenster auf $Y_{max} = 10$ heruntergesetzt, sodass das Schaubild der Funktion d gut sichtbar ist. Dann kann mit $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{4: maximum}}$ das Maximum von d bestimmt werden, es liegt etwa bei $x \approx 13,1$.
Nach 13,1 Stunden, also etwa um 13:06 Uhr ist der Temperaturunterschied am größten.

c) Jetzt wird die Außentemperatur am Folgetag durch eine Funktion h mit

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right] + ax + b; \quad 12 \le x \le 48$$

beschrieben, die im Folgenden etwas näher untersucht werden soll. Für die Ableitung von h gilt dabei nach der Kettenregel: (6VP)

$$\begin{aligned} h'(x) &= 10\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]\cdot\frac{\pi}{12}+a \\ &= \frac{5\pi}{6}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]+a \end{aligned}$$

Bestimmung der beiden Parameter a und b

Um die zwei Parameter berechnen zu können, werden zwei Bedingungen benötigt.

Zum Zeitpunkt $x = 24$ sollen die beiden Temperaturen von f und h gleich sein, es muss also gelten:

$$\begin{aligned} f(24) &= h(24) \\ 8\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(24-8,5)\right]+21 &= 10\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(24-8,5)\right]+a\cdot 24+b \\ 14,65 &\approx -7,93+24a+b \\ 24a+b &\approx 22,58 \end{aligned}$$

Weiterhin sollen die beiden Funktionen f und h zum Zeitpunkt $x = 24$ in ihrer momentanen Änderungsrate – also ihrer **Ableitung** übereinstimmen:

$$\begin{aligned} f'(24) &= h'(24) \\ \frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(24-8,5)\right] &= \frac{5\pi}{6}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(24-8,5)\right]+a \\ -1,27 &\approx -1,59+a \\ a &\approx 0,32 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $a \approx 0,32$. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich daraus $b \approx 22,58-24a \approx 14,90$.

Begründung der Dominanz des Terms $ax+b$

Um zu begründen, dass die mittlere Temperatur $\overline{T}$ jetzt nur durch den Term $ax+b$ bestimmt wird, muss diese berechnet werden. Für sie gilt:

$$\overline{T} = \frac{1}{48-24}\cdot\int_{24}^{48}\left(10\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]+ax+b\right)dx \qquad |\,\text{Integral auseinanderziehen}$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\int_{24}^{48}\left(10\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]\right)dx+\frac{1}{24}\cdot\int_{24}^{48}(ax+b)\,dx$$

Die Funktion h hat eine Periode von $p = 24$. Das erste Integral verläuft über der **gesamten** Periode und muss damit genau 0 betragen, da das Schaubild der Funktion jeweils zur Hälfte ober- und zur Hälfte unterhalb der x-Achse verläuft.

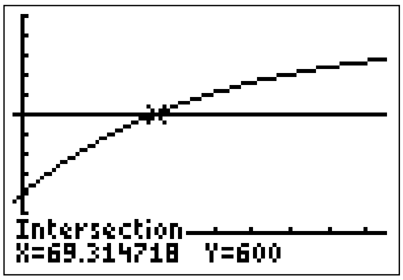
Somit trägt zur mittleren Temperatur am Folgetag tatsächlich **nur** der Term $ax+b$ bei.

Aufgabe I 3.1

a) **Bestimmung des Zeitpunkts, bei dem der Behälter zur Hälfte gefüllt ist** (6VP)

Die im Behälter enthaltene Flüssigkeitsmenge wird durch $f(t)$ beschrieben und soll nun genau 600 betragen — Wir suchen also das t, für das $f(t) = 600$ gilt.

Mit dem GTR kann die gesuchte Stelle bestimmt werden, indem das Schaubild von f gezeichnet und mit der Geraden $y = 600$ mit dem Befehl 2nd → TRACE (CALC) → 5: intersect geschnitten wird.



Es ergibt sich die gesuchte Stelle $t \approx 69,31$, nach knapp 70 Minuten ist der Behälter somit zur Hälfte gefüllt.
Genauso schnell geht es hier jedoch auch von Hand:

Handschriftliche Lösung

$$\begin{aligned} f(t) &= 600 \\ 1000 - 800 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} &= 600 && \mid -1000 \\ 800 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} &= 400 && \mid :800 \\ \mathrm{e}^{-0,01t} &= 0,5 && \mid \ln(\ldots) \\ -0,01t &= \ln 0,5 \\ t &= \frac{\ln 0,5}{-0,01} \approx 69,31 \end{aligned}$$

Nach etwa $69,3$, also nach knapp 70 Minuten ist der Behälter zur Hälfte gefüllt.

Nachweis, dass die Flüssigkeitsmenge stets zunimmt

Wenn die Flüssigkeitsmenge ist, bedeutet dies, dass die Funktion $f(t)$ **streng monoton wachsend** ist. Dies ist wiederum der Fall, wenn ihre Ableitung **stets positiv ist**.

Für die Ableitung von f gilt nach der Kettenregel:

$$f'(t) = -800 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} \cdot (-0,01) = 8 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} > 0$$

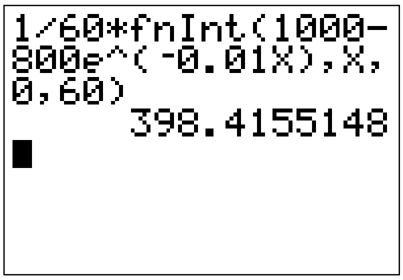
Da die e-Funktion **immer** positiv ist, ist die gesamte Ableitung für alle t auch positiv. f ist somit streng monoton wachsend. Die Flüssigkeitsmenge nimmt daher stets zu.

Bestimmung der mittlere Flüssigkeitsmenge in der ersten Stunde

Die mittlere Flüssigkeitsmenge in der ersten Stunde entspricht dem **mittleren Funktionswert** von f im Bereich $[0; 60]$. Für ihn gilt:

$$\overline{m} = \frac{1}{60-0} \cdot \int_0^{60} f(t)\,dt = \frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} f(t)\,dt$$

Das Integral lässt sich mit GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen. Es ergibt sich $\overline{m} \approx 398,4$.



In der ersten Stunde beträgt die mittlere Flüssigkeitsmenge somit ca. 398 Liter.

Einhaltung der Sicherheitsvorschrift

85% des Fassungsvermögens von 1.200 Litern entspricht $0,85 \cdot 1200 = 1020$ Litern. Es ist also zu überprüfen, ob $f(t)$ jemals diesen Wert übersteigt.

Es ist bekannt, dass f streng monoton wachsend ist (siehe oben). Wir müssen nur noch untersuchen, gegen welchen Wert die Flüssigkeitsmenge $f(t)$ nach langer Zeit strebt, wie bilden also den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1.000 - 800 \cdot \underbrace{e^{-0,01t}}_{\to 0}\right) = 1000 - 0 = 1000$$

Die Funktion und damit die Flüssigkeitsmenge strebt damit gegen einen Wert von 1.000 Litern und kann diesen nie übersteigen. Somit wird die Sicherheitsvorschrift zu jeder Zeit eingehalten.

b) **Bestimmung der beiden Parameterwerte von a und b** (3VP)

In der Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ gibt $B'(t)$ die **Änderungsrate** von $B(t)$ an. Hier gilt:

$$\text{Änderungsrate} = \underbrace{\text{Zuflussrate}}_{=a} - \underbrace{\text{Abflussrate}}_{=b \cdot B(t)}$$

Laut dem Aufgabentext fließen pro Minute 10 Liter hinzu, somit ist die Zuflussrate $a = 10$.

Weiterhin fließt pro Minute jeweils auch **1% der enthaltenen Flüssigkeitsmenge**, also 1% von $B(t)$ ab. Somit ist die Abflussrate $0,01 \cdot B(t)$ und damit wiederum $b = 0,01$.

Für die Differenzialgleichung gilt damit insgesamt $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$.

Nachweis, dass f eine Lösung der Differenzialgleichung ist

Um nachzuweisen, dass f die Differenzialgleichung $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$ erfüllt, wird $f(t)$ für $B(t)$ sowie $f'(t)$ für $B'(t)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 10 - 0,01 \cdot f(t) \\
8 \cdot e^{-0,01t} &= 10 - 0,01(1000 - 800 \cdot e^{-0,01t}) \\
8e^{-0,01t} &= 10 - 10 + 8e^{-0,01t} \\
8e^{-0,01t} &= 8e^{-0,01t}
\end{aligned}$$

Es entsteht eine wahre Aussage, somit erfüllt die Funktion f tatsächlich die gegebene Differenzialgleichung.

c) **Bestimmung eines Funktionsterms zur Beschreibung des Vorgangs** (5VP)

Laut Aufgabentext fließen pro Minute nun **12 Liter** hinzu und **2%** der aktuellen Flüssigkeitsmenge ab, somit ist hier nun $a = 12$ und $b = 0,02$. Hier wird der Vorgang also durch eine Differenzialgleichung beschrieben mit:

$$\begin{aligned} B'(t) &= 12 - 0,02 \cdot B(t) \qquad | \; 0,02 \text{ ausklammern} \\ &= 0,02 \cdot (600 - B(t)) \end{aligned}$$

Dies entspricht der Differenzialgleichung des **beschränkten Wachstums** mit der Schranke $S = 600$.

Die Funktion B, die jetzt die Flüssigkeitsmenge im Behälter beschreibt, hat somit allgemein die Form

$B(t) = 600 - c \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$

Um den fehlenden Faktor c berechnen zu können, brauchen wir eine weitere Bedingung – die ist jedoch auch im Aufgabentext zu finden.
Es sollen nämlich zu Beginn, also nach $t = 0$ Zeitschritten, bereits 200 Liter Flüssigkeit im Behälter vorhanden sein, somit ist $B(0) = 200$:

$$\begin{aligned} B(0) &= 200 \\ 600 - c \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 0} &= 200 \\ 600 - c &= 200 \\ c &= 400 \end{aligned}$$

Beachten Sie hierbei, dass $\mathrm{e}^0 = 1$ gilt.

Die gesuchte Funktion hat somit den Funktionsterm $B(t) = 600 - 400 \cdot \mathrm{e}^{-0,02t}$.

Berechnung der abgeflossenen Flüssigkeitsmenge

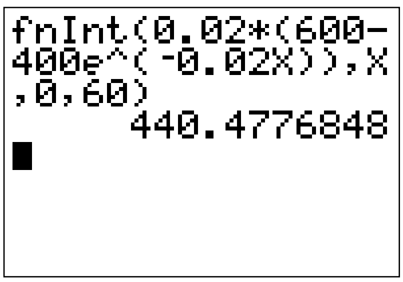
Zum Beginn befinden sich 200 Liter Flüssigkeit im Behälter, in der ersten Stunde sind weiterhin $60 \cdot 12 = 720$ Liter hinzugeflossen. Eigentlich müssten somit jetzt 920 Liter Flüssigkeit im Behälter vorhanden sein.
Tatsächlich befinden sich allerdings nur

$B(60) = 600 - 400 \cdot \mathrm{e}^{-0,02 \cdot 60} \approx 479,5$

Liter nach einer Stunde im Behälter. Somit müssen in dieser Stunde
$920 - 479,5 = 440,5$ Liter Flüssigkeit abgeflossen sein.

Alternativer Lösungsweg

In der Differenzialgleichung $B'(t) = 12 - 0,02 \cdot B(t)$ beschreibt laut Teilaufgabe b) der Term $0,02 \cdot B(t)$ die Abflussrate zum Zeitpunkt t.
In der gesamten ersten Stunde, also von $t = 0$ bis $t = 60$ Minuten, wäre somit eine Menge von $\int_0^{60} 0,02 \cdot B(t)\,dt$ Litern abgeflossen. Dieses Integral lässt sich mit dem GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen, es beträgt etwa 440,5.
Somit ist während der ersten Stunde etwa eine Menge von 440,5 Litern Flüssigkeit abgeflossen.



Aufgabe I 3.2

Nun ist die Folge (a_n) mit $a_0 = 5$ sowie ihrer rekursiven Bildungsvorschrift $a_{n+1} = 10 + 0,8 \cdot a_n$ gegeben. Weiterhin ist $S = 50$ eine obere Schranke dieser Folge. (4VP)

Nachweis der Monotonie der Folge

Die Folge (a_n) ist genau dann monoton wachsend, wenn für jedes Glied a_n und sein Folgeglied a_{n+1} die Beziehung $a_{n+1} \geq a_n$ gilt. Dies ist gleichwertig mit $a_{n+1} - a_n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &\geq 0 \qquad \mid a_{n+1} = 10 + 0,8 \cdot a_n \\ 10 + 0,8 \cdot a_n - a_n &\geq 0 \\ 10 - 0,2 \cdot a_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Da die Folge mit der Schranke $S = 50$ beschränkt, kann kein Folgeglied größer als 50 werden, somit ist stets $a_n \leq 50$. Die obere Gleichung ist dabei stets erfüllt, da mit $a_n \leq 50$ die Gleichung $10 - 0,2 \cdot a_n$ stets größer oder gleich Null ist. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_{n+1} \geq a_n$.
Damit ist die Folge (a_n) monoton wachsend.

Begründung, dass die Folge konvergiert

Die Folge (a_n) ist, wie nun gezeigt wurde, sowohl monoton wachsend als auch beschränkt mit der Schranke $S = 50$. Damit muss sie auch konvergent sein.

Exakte Berechnung des Grenzwerts

Wenn $n \to \infty$ geht, müssen alle Folgeglieder a_n gegen den gesuchten Grenzwert g streben. Ist man einmal im Grenzwert „angelangt“, unterscheiden sich dabei zwei Folgeglieder a_n und a_{n+1} nicht mehr, sie müssten dann beide genau dem Grenzwert entsprechen. Es gilt dann $a_{n+1} = g$ und $a_n = g$:

$$\begin{aligned} g &= 10 + 0,8 \cdot g \\ 0,2 \cdot g &= 10 \\ g &= 50 \end{aligned}$$

Die Folge (a_n) besitzt somit den Grenzwert $g = 50$.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) **Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene** E (6VP)

Die Grundfläche und damit die Ebene E wird durch die drei Punkte $A(10\mid 6\mid 0)$, $B(6\mid 10\mid 0)$ und $C(10\mid 10\mid 5)$ bestimmt. Für sie gilt damit zunächst in Parameterform:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}; \qquad r,s\in\mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ dieser Ebene lässt sich über das **Kreuzprodukt** (Vektorprodukt) ihrer beiden Spannvektoren berechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 5 - 0\cdot 4\\ 0\cdot 0 - (-4)\cdot 5\\ (-4)\cdot 4 - 4\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\20\\-16\end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$$

Als Ansatz für die Koordinatengleichung von E ergibt sich $E\colon 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = d$.

Um den fehlenden Summand d zu bestimmen, werden die Koordinaten des Punktes $A(10\mid 6\mid 0)$ in diese Gleichung eingesetzt:

$$A \text{ in } E\colon\quad 5\cdot 10 + 5\cdot 6 - 4\cdot 0 = d$$
$$80 = d$$

Somit ergibt sich $E\colon 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$ als eine Koordinatengleichung von E.

Berechnung des Winkels zwischen den Grundflächen

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der eben berechneten Ebene E, die Grundfläche des Würfels liegt in der x_1-x_2-Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Der gesuchte Winkel entspricht dem Schnittwinkel der Ebene E mit der x_1-x_2-Ebene:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_E\cdot\vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_E|\cdot|\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5^2+5^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{66}} = \frac{4}{\sqrt{66}} \approx 0{,}4924$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 60{,}5^\circ$

Die beiden Grundflächen schließen einen Winkel von etwa $60{,}5^\circ$ ein.

Untersuchung, ob die Höhe auf der Diagonalen PS **liegt**

Wichtig ist, dass die Höhe der Pyramide **senkrecht** auf ihrer Grundfläche stehen muss. Diejenige Gerade g, die die Höhe der Pyramide enthält, müsste somit den **Normalenvektor** $\vec{n}$ von E als Richtungsvektor besitzen.

Wenn diese Gerade beispielsweise noch durch den Punkt $S(0\mid 0\mid 10)$ verläuft, gilt für sie:

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{n}; \qquad t \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wenn in dieser Geraden gleichzeitig noch die Diagonale PS des Würfels liegt, müsste auf ihr auch der Punkt $P(10 \mid 10 \mid 0)$ liegen. Um dies zu überprüfen, wird sein Ortsvektor in die Geradengleichung eingesetzt:

$$P \text{ in } g: \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow & t = 2 \\ \Rightarrow & t = 2 \\ \Rightarrow & t = \frac{5}{2} \end{matrix}$$

Dem Punkt P ist kein eindeutiger t-Wert der Gerade zugeordnet, daher liegt er nicht auf g.

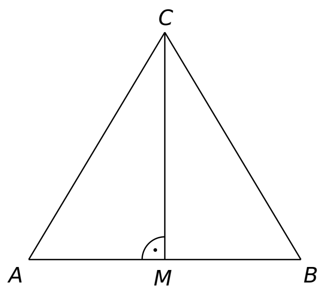
Somit liegt die Höhe der Pyramide **nicht** auf der Diagonalen PS des Würfels.

b) **Berechnung des prozentualen Anteils des Pyramidenvolumens** (5VP)

Um den prozentualen Anteil zu bestimmen, werden 4 Schritte durchgeführt. In den ersten 3 Schritten wird dabei zunächst das Volumen der Pyramide bestimmt:

1. Schritt: Berechnung des Flächeninhalts der Pyramidengrundfläche

Anhand des gegebenen Schaubilds lässt sich bereits vermuten, dass es sich bei der Grundfläche um ein zumindest gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln AC und BC handelt. rechnerisch lässt sich dies nachweisen, indem diese beiden Streckenlängen berechnet werden:



$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Somit ist das Dreieck tatsächlich gleichschenklig, es hat dabei die Basis AB mit der Länge

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32}.$$

Die Höhe des Dreiecks entspricht der Strecke von C zum Mittelpunkt M der Basis AB. Da M Mittelpunkt von AB ist, gilt für seinen Ortsvektor:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(8\,|\,8\,|\,0)$$

Für die Höhe h_1 des Dreiecks ergibt sich damit:

$$h_1 = |\overrightarrow{MC}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{33}$$

Insgesamt ergibt sich damit für den Flächeninhalt G der Grundfläche:

$$G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{33} = \frac{1}{2}\sqrt{1056}$$

2. Schritt: Berechnung der Höhe der Pyramide

Die Höhe h der Pyramide entspricht dem **Abstand** ihrer Spitze $S(0\,|\,0\,|\,10)$ von der Grundfläche.

Da die Grundfläche in der Ebene E liegt, lässt sich die Höhe als Abstand von S zu dieser Ebene deuten. Um diesen zu berechnen, wird E zunächst in ihrer **Hesse'schen Normalform** dargestellt. Der Betrag ihres Normalenvektors beträgt laut Teilaufgabe a) dabei $|\vec{n}| = \sqrt{66}$. Es ergibt sich:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 80}{\sqrt{66}} = 0$$

Der Abstand von S zu E kann nun bestimmt werden, indem die Koordinaten von S in die HNF eingesetzt werden:

$$h = d(S;E) = \left|\frac{5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 10 - 80}{\sqrt{66}}\right| = \frac{|-120|}{\sqrt{66}} = \frac{120}{\sqrt{66}}$$

3. Schritt: Berechnung des Pyramidenvolumens

Mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h ergibt sich letztlich:

$$V_{\text{Pyra}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1056} \cdot \frac{120}{\sqrt{66}} = 80$$

Die Pyramide hat ein Volumen von 80 VE.

4. Schritt: Berechnung des prozentualen Anteils

Der Würfel selbst hat ein Volumen von $V_{\text{Würfel}} = 10^3 = 1000$ VE. Für den prozentualen Anteil p vom Pyramidenvolumen am Würfelvolumen ergibt sich damit:

$$p\% = \frac{V_{\text{Pyra}}}{V_{\text{Würfel}}} \cdot 100\% = \frac{80}{1000} \cdot 100\% = 8\%$$

Die Pyramide füllt 8% des Würfelvolumens aus.

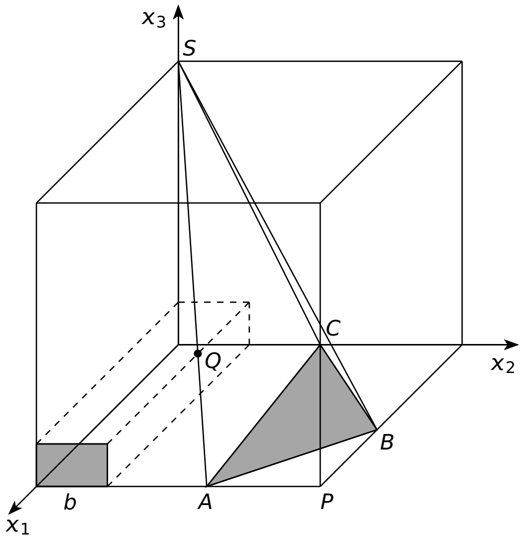
c) **Berechnung des Quadervolumens für $b = 4$** (5VP)

Der einbeschriebene Quader berührt die Pyramidenkante AS im Punkt Q. Die Breite b des Quaders entspricht dabei der x_2-Koordinate von Q, die Höhe a entspricht seiner x_3-Koordinate.

Der Punkt Q liegt zudem immer auf der genannten Pyramidenkante AS. Eine Gerade h durch diese Kante hat dabei die Gleichung:

$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{AS}; \qquad v \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$



Die Breite b ist mit $b = 4$ gegeben und entspricht der x_2-Koordinate von Q. In die zweite Zeile der Geradengleichung eingesetzt ergibt sich daraus:

$$4 = 6 + v \cdot (-6) \quad \Leftrightarrow \quad -6v = -2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{3}$$

Somit liegt Q hier für $v = \frac{1}{3}$ auf der Geraden h.

Die Quaderhöhe entspricht weiterhin der x_3-Koordinate von Q:

$$a = x_3 = 0 + \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3}$$

Die Länge c des Quaders entspricht der vollen Seitenlänge des Würfels, somit ist $c = 10$. Für das Quadervolumen ergibt sich letztlich:

$$V_Q = a \cdot b \cdot c = \frac{10}{3} \cdot 4 \cdot 10 = \frac{400}{3}$$

Mit $b = 4$ hat der Quader ein Volumen von $\frac{400}{3}$ VE.

Bestimmung der möglichen Volumenwerte bei variablem b

Es können nun im Prinzip exakt dieselben Schritte wie oben gemacht werden, mit dem einzigen Unterschied, dass b hier nicht angegeben ist, sondern als Variable bleibt. Die Breite kann hierbei nur Werte zwischen 0 und 6 annehmen.

Die Breite b entspricht der x_2-Koordinate von Q. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich:

$$b = 6 + v \cdot (-6) \quad \Leftrightarrow \quad 6v = 6 - b \quad \Leftrightarrow \quad v = 1 - \frac{1}{6}b.$$

Hier liegt Q somit für $v = 1 - \frac{1}{6}b$ auf der Geraden.

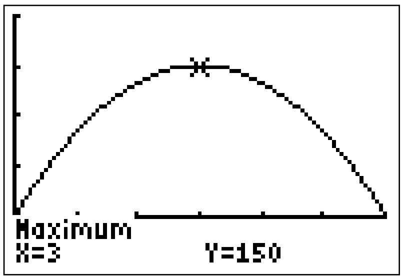
Für die Quaderhöhe a ergibt sich hier als x_3-Koordinate von Q:

$$a = x_3 = 0 + \left(1 - \frac{1}{6}b\right) \cdot 10 = 10 - \frac{10}{6}b.$$

Für das Volumen V in Abhängigkeit von b ergibt sich jetzt:

$$V(b) = a \cdot b \cdot c = \left(10 - \frac{10}{6}b\right) \cdot b \cdot 10 = 100b - \frac{50}{3}b^2.$$

Das Volumen entspricht hier einer **ganzrationalen Funktion** 2. Grades. Es muss nun nur noch untersucht werden, welche Werte diese Funktion für $0 < b < 6$ annehmen kann.



Dazu kann die Zielfunktion im Graph-Menü des GTR gezeichnet werden. Es ist nun erkennbar, dass bei den Randwerten sowohl $V(0) = 0$ als auch $V(6) = 0$ gilt, das (globale) Maximum nimmt die Funktion für $b = 3$ an, es beträgt $V(3) = 150$.
Das Maximum kann dabei über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ bestimmt werden.
Genauso schnell kann die Extremwertuntersuchung hier jedoch auch von Hand durchgeführt werden:

Handschriftliche Lösung

Für die ersten beiden Ableitungen von $V(b)$ gilt:

$$V'(b) = 100 - \frac{100}{3}b$$
$$V''(b) = -\frac{100}{3}$$

Die Extremstellen ergeben sich aus der Rechnung $V'(b) = 0$:

$$\begin{aligned} V'(b) &= 0 \\ 100 - \frac{100}{3}b &= 0 \\ \frac{100}{3}b &= 100 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Die einzige mögliche Extremstelle liegt somit bei $b = 3$. Wegen $V''(3) = -\frac{100}{3} < 0$ ergibt sich, dass es sich hierbei um ein **Maximum** handelt, dessen Wert

$V(3) = 100 \cdot 3 - \frac{50}{3} \cdot 3^2 = 150$ beträgt.

Untersuchung der Randwerte $b = 0$ und $b = 6$:

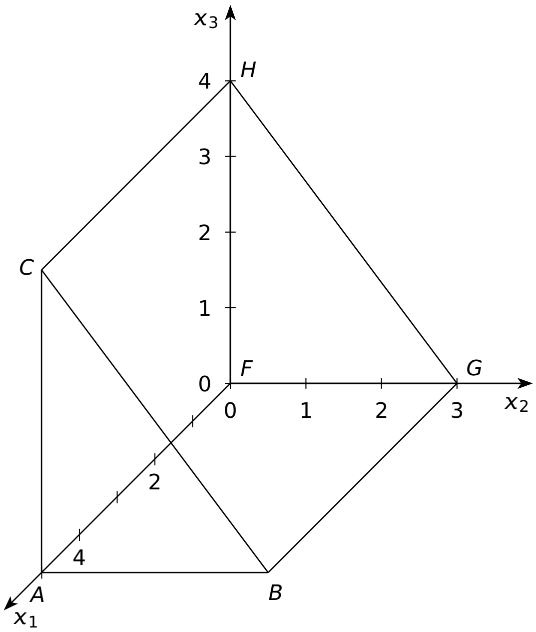
$$V(0) = 100 \cdot 0 - \frac{50}{3} \cdot 0^2 = 0,$$
$$V(6) = 100 \cdot 6 - \frac{50}{3} \cdot 6^2 = 0.$$

Somit hat die Funktion $V(b)$ für $b = 3$ ihr **globales Maximum**. Es ergibt sich:

Wenn die Breite b variabel mit $0 < b < 6$ ist, kann das Volumen $V(b)$ des Quaders Werte mit $0 < V(b) \leq 150$ annehmen.

Aufgabe II 2.1

a) **Schaubild des Prismas in einem Koordinatensystem** (6VP)



Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E

Um eine Parametergleichung der Ebene E aufzustellen, werden stets genau 3 Punkte benötigt. Hier können daher z.B. die drei Punkte $B(5\,|\,3\,|\,0)$, $G(0\,|\,3\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,4)$ verwendet werden. Es ergibt sich als eine Parametergleichung:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BG} + s\cdot\overrightarrow{BH}; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E kann über das **Kreuzprodukt** (Vektorprodukt) ihrer beiden Spannvektoren berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot4-0\cdot(-3)\\0\cdot(-5)-(-5)\cdot4\\(-5)\cdot(-3)-0\cdot(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\20\\15\end{pmatrix} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurde innerhalb des Vektors mit 5 gekürzt. Dies ist allerdings nur zulässig, da es sich beim Normalenvektor um einen Richtungsvektor handelt.

Mit diesem Normalenvektor ergibt sich als Ansatz für eine Koordinatengleichung E: $4x_2 + 3x_3 = d$.

Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, werden die Koordinaten eines Punktes der Ebene, z.B. $B(5\,|\,3\,|\,0)$ eingesetzt:

$$B \text{ in } E\colon \quad 4\cdot3+3\cdot0 = d$$
$$d = 12$$

Eine Koordinatengleichung von E ist somit $E\colon 4x_2 + 3x_3 = 12$.

Berechnung des Winkels zwischen E und der x_1x_2-Ebene

Die x_1x_2-Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich damit:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1|}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 53{,}1^\circ$

Die Ebene E schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $53{,}1^\circ$.

Berechnung des Abstandes des Punktes A von Gerade CG

Bestimme zunächst eine Gleichung der Geraden CG:

$$CG: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CG} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Den Abstand des Punktes $A\,(5\,|\,0\,|\,0)$ von der Geraden CG kannst du auf zwei verschiedene Wege berechnen: Über das Skalarprodukt (Lösungsweg A) oder über eine Hilfsebene (Lösungsweg B).

►► Lösungsweg A: Skalarprodukt

Bestimme zunächst den Punkt Z auf der Geraden CG, der den kleinsten Abstand zu Punkt A besitzt. Da der Abstand immer **orthogonal** gemessen wird, muss der Vektor $\overrightarrow{AZ}$ **senkrecht** auf den Richtungsvektor der Geraden stehen.

Allgemein hat der Punkt Z die Koordinaten $Z\,(5-5t\,|\,3t\,|\,4-4t)$. Für den Vektor $\overrightarrow{AZ}$ gilt also allgemein:

$$\overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 5-5t \\ 3t \\ 4-4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ 3t \\ 4-4t \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor soll senkrecht auf den Richtungsvektor $\overrightarrow{CG}$ der Geraden stehen. Das **Skalarprodukt** dieser beiden Vektoren muss also Null sein:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AZ} \circ \overrightarrow{CG} &= 0 \\
\begin{pmatrix} -5t \\ 3t \\ 4-4t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= 0 \\
(-5t) \cdot (-5) + 3t \cdot 3 + (4-4t) \cdot (-4) &= 0 \\
25t + 9t - 16 + 16t &= 0 \\
50t - 16 &= 0 \qquad |\ +16 \\
50t &= 16 \qquad |\ :50 \\
t &= 0{,}32
\end{aligned}$$

Setze $t = 0{,}32$ in die allgemeinen Koordinaten von Z ein und erhalte den Punkt $Z\,(3{,}4 \mid 0{,}96 \mid 2{,}72)$.

Der Abstand von A zur Geraden CG ist gleich dem Abstand von A und Z:

$$\begin{aligned} d(CG;A) = d(Z;A) = \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-1{,}6\\0{,}96\\2{,}72\end{pmatrix}\right| \\ \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \sqrt{(-1{,}6)^2+(0{,}96)^2+(2{,}72)^2} \\ \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \sqrt{10{,}88} \approx 3{,}3 \end{aligned}$$

Der Punkt A ist von der Geraden CG etwa 3,3 LE entfernt.

►► Lösungsweg B: Hilfsebene

Bestimme zunächst die Gleichung einer Hilfsebene E_H, welche den Punkt A enthält und senkrecht zur Geraden CG verläuft. Wähle dazu den Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ und den Normalenvektor $\overrightarrow{CG}$.

E_H schneidet dann die Geraden CG **orthogonal** in einem Punkt Z. Da der Punkt A in der Ebene E_H liegt, verläuft auch der Vektor $\overrightarrow{AZ}$ orthogonal zur Geraden CG. Deshalb ist dieser Schnittpunkt Z der Punkt auf der Geraden, der am geringsten von Punkt A entfernt ist.

Die Koordinatengleichung der Ebene E_H lautet zunächst:

$E_H: -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = d$. Setze die Koordinaten von A ein und löse nach d auf:

$-5 \cdot 5 + 0 + 0 = -25 = d$. Also lautet die Gleichung von $E_H: -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -25$.

„Teile“ nun die Geradengleichung von CG in die drei „Zeilen“ x_1, x_2 und x_3 auf:

$x_1 = 5 - 5t, \quad x_2 = 3t, \quad x_3 = 4 - 4t$

Setze diese Ausdrücke nun in die Koordinatengleichung von E_H ein und berechne so die Koordinaten des Schnittpunktes Z.

$$\begin{aligned} -5\cdot(5-5t) + 3\cdot 3t - 4\cdot(4-4t) &= -25 \\ -25 + 25t + 9t - 16 + 16t &= -25 \\ 50t - 41 &= -25 \qquad \mid +41 \\ 50t &= 16 \qquad \mid :50 \\ t &= 0{,}32 \end{aligned}$$

Setze $t = 0{,}32$ ein in die Geradengleichung von CG und erhalte den Punkt $Z\,(3{,}4 \mid 0{,}96 \mid 2{,}72)$.

Der Abstand von A zur Geraden CG ist gleich dem Abstand von A und Z:

$$\begin{aligned} d(CG;A) = d(Z;A) = \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \left|\begin{pmatrix}-1{,}6\\0{,}96\\2{,}72\end{pmatrix}\right| \\ \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \sqrt{(-1{,}6)^2+(0{,}96)^2+(2{,}72)^2} \\ \left|\overrightarrow{AZ}\right| &= \sqrt{10{,}88} \approx 3{,}3 \end{aligned}$$

Der Punkt A ist von der Geraden CG etwa 3,3 LE entfernt.

b) **Überprüfung, ob der Zylinder alle drei Seitenflächen berührt** (6VP)

Der Zylinder mit dem Radius $r = 0,5$ berührt genau dann alle drei Seitenflächen von innen, wenn sein Grundkreismittelpunkt $M(0 \mid 0,5 \mid 0,5)$ von allen Seitenflächen denselben Abstand von $d = 0,5$ besitzt.

Die Seitenfläche $ABGF$ liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Abstand d_1 von M zu dieser Seitenfläche entspricht somit genau seiner x_3-Koordinate, es ist $d_1 = 0,5$.

Die Seitenfläche $AFHC$ liegt in der x_1x_3-Ebene. Der Abstand d_2 von M zu dieser Seitenfläche entspricht somit genau seiner x_2-Koordinate, es ist $d_2 = 0,5$.

Der Abstand von M zur dritten Seitenfläche $BGHC$ entspricht dem Abstand von M zur Ebene E. Um diesen zu bestimmen, wird E zunächst in ihrer **Hesse'schen Normalform** dargestellt:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{4x_2 + 3x_3 - 12}{5} = 0$$

Um den Abstand zu bestimmen, werden nun die Koordinaten von $M(0 \mid 0,5 \mid 0,5)$ in die HNF eingesetzt:

$$d_3 = d(M; E) = \frac{|4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 - 12|}{5} = \frac{|-8,5|}{5} = 1,7$$

Wegen $d_1 = d_2 = 0,5$ berührt der Zylinder somit zwar die Seitenflächen $ABGF$ und $AFHC$, wegen $d_3 = 1,7 > 0,5$ allerdings **nicht** die Seitenfläche $BGHC$.

Bestimmung des Radius, sodass der Zylinder alle Seitenflächen berührt

Der Mittelpunkt $M^*(0 \mid r \mid r)$ hat, wie oben, aufgrund seiner Koordinaten von den Seitenflächen $ABGF$ und $AFHC$ jeweils den Abstand r.

Wenn der Zylinder nun auch die dritte Seitenfläche $BGHC$ berühren soll, muss er auch von ihr den Abstand r haben:

$$d_3 = \frac{|4 \cdot r + 3 \cdot r - 12|}{5} = r$$

$$|7r - 12| = 5r$$

Diese **Betragsgleichung** kann beispielsweise durch Quadrieren gelöst werden, was letztlich auf zwei Lösungen führt:

$$(7r - 12)^2 = (5r)^2$$

$$49r^2 - 168r + 144 = 25r^2$$

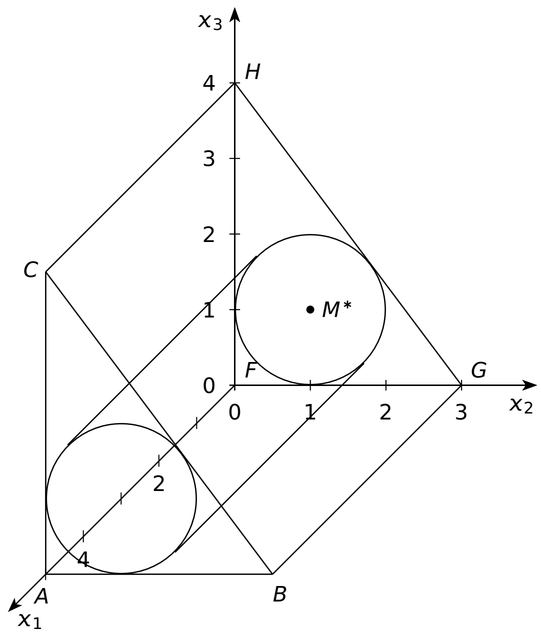
$$24r^2 - 168r + 144 = 0$$

$$r^2 - 7r + 6 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$r_1 = 6;\; r_2 = 1$$

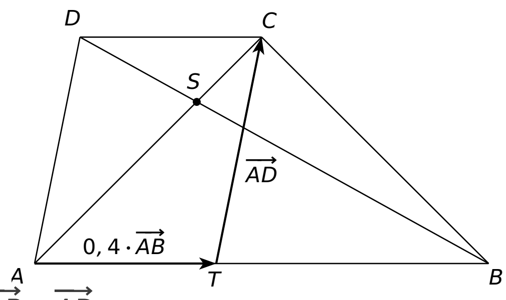
Es ergeben sich die möglichen Zylinderradien $r_1 = 6$ und $r_2 = 1$. Da der Zylinder allerdings **innerhalb** des Prismas liegen muss, entfällt die erste Lösung. Somit hat der Zylinder den Mittelpunkt $M^*(0\,|\,1\,|\,1)$ und den Radius $r = 1$.
Die Lösung lässt sich — wie nebenstehend — ganz einfach überprüfen, indem man den Grundkreismittelpunkt M^* in das Schaubild aus Teilaufgabe a) einzeichnet und den entsprechenden Zylinder ergänzt.



Aufgabe II 2.2

Schaubild eines Vierecks mit der geforderten Eigenschaft (4VP)

Um das geforderte Viereck zu zeichnen, wird zunächst die Seite AB gezeichnet und dann im Verhältnis $0,4 : 0,6$, also $2 : 5$ geteilt. Der Teilungspunkt sei T. Anschließend wird ein beliebiger Punkt D gezeichnet und mit A verbunden. Letztlich wird eine zu AD parallele und gleichlange Strecke an T gelegt, ihr Endpunkt ist der fehlende Punkt C.



Für den Diagonalvektor $\overrightarrow{AC}$ gilt dann $\overrightarrow{AC} = 0,4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Bestimmung des Teilungsverhältnisses der Diagonalen

Die Diagonalen AC und DB schneiden sich in einem Punkt S, der die Diagonalen in einem bestimmten Verhältnis teilt.

Über den so genannten **geschlossenen Vektorzug** wird das Teilverhältnis bestimmt. Dieser Vektorzug muss S enthalten und das Ende muss zum Anfang zeigen:
$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \vec{o}$

Die einzelnen Vektoren müssen nun durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ dargestellt werden, die im Folgenden mit $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ bezeichnet werden. Der Vektor $\overrightarrow{DA}$ entspricht dem Vektor $-\vec{b}$. Um die anderen beiden Vektoren zu bestimmen, müssen Abhängigkeiten erkannt werden.

Als erstes wird der Vektor $\overrightarrow{AS}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= s \cdot \overrightarrow{AC} && \text{(da } \overrightarrow{AS} \text{ ein Bruchteil von } \overrightarrow{AC} \text{ ist)} \\ &= s \cdot (0,4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) && \text{(da sich } \overrightarrow{AC} \text{ durch die Vektoraddition darstellen lässt)} \\ &= s \cdot (0,4 \cdot \vec{a} + \vec{b}) \end{aligned}$$

Als nächstes wird mit dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ ähnlich vorgegangen:

$\overrightarrow{SD} = t \cdot \overrightarrow{BD}$ (da $\overrightarrow{SD}$ ein Bruchteil von $\overrightarrow{BD}$ ist)

$= t \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ (da sich $\overrightarrow{BD}$ durch die Vektoraddition darstellen lässt)

$= t \cdot (-\vec{a} + \vec{b})$

Die berechneten Abhängigkeiten werden nun in den Vektorzug eingesetzt:

$$s \cdot (0,4 \cdot \vec{a} + \vec{b}) + t \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = \vec{o} \quad | \text{ ausmultiplizieren}$$
$$0,4s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} - t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} - \vec{b} = \vec{o}$$

Nun wird der Term so umgestellt, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgeklammert werden können. Damit erhält man folgenden Term:

$$\vec{a} \cdot (0,4s - t) + \vec{b} \cdot (s + t - 1) = \vec{o}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeigen in verschiedene Richtungen, sie sind linear unabhängig. Der Term kann also nur dann den Nullvektor ergeben, wenn die Ausdrücke $0,4s - t$ und $s + t - 1$ jeweils gleich Null sind, dann ergibt sich nämlich $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{o}$:

$$0,4s - t = 0$$
$$s + t - 1 = 0$$

Wird die erste Gleichung z.B. nach t aufgelöst, ergibt sich $t = 0,4s$. Eingesetzt in Gleichung 2 ergibt sich:

$$s + 0,4s - 1 = 0$$
$$1,4s = 1$$
$$s = \frac{1}{1,4} = \frac{5}{7}$$

Daraus ergibt sich wiederum $t = 0,4s = 0,4 \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7}$.

Somit gilt beispielsweise $\overrightarrow{AS} = \frac{5}{7} \cdot \overrightarrow{AC}$. Dies bedeutet, dass die Strecke 7 „Teile“ lang ist und die eine Strecke 5 Teile davon belegt. Somit gilt:

Der Schnittpunkt der Diagonalen teilt diese jeweils im Verhältnis 2 : 5.