Pflichtteil

Aufgabe 1
(2VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (1 + \sin x)^2$.

Aufgabe 2
(2VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$.

Aufgabe 3
(3VP)

Lösen Sie die Gleichung $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$.

Aufgabe 4
(4VP)

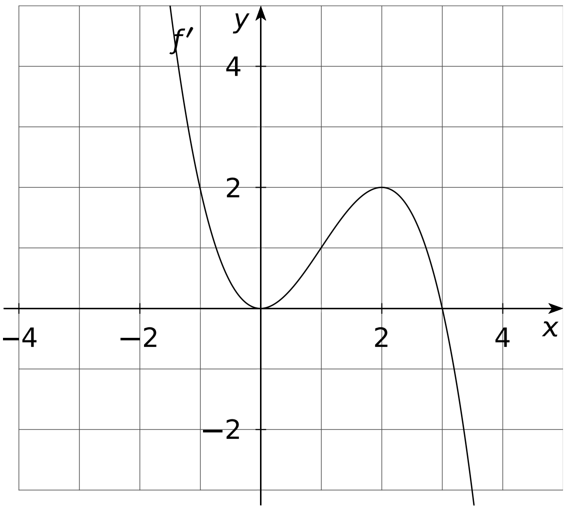
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $x \neq -1$.

a) Bestimmen Sie die Punkte des Schaubildes von f mit waagrechter Tangente.

b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$ die Normale n.
Ermitteln Sie eine Gleichung von n.

Aufgabe 5
(5VP)

Gegeben ist das Schaubild der Ableitung f' der Funktion f.



a) Welche Aussagen über die Funktion f ergeben sich daraus im Hinblick auf
- Monotonie
- Extremstellen
- Wendestellen?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Es gilt $f(0) = 2$. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Aufgabe 6 (3VP)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 7 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 14 \\ \text{III} & x_1 - 5x_2 - 4x_3 & = & -21 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 7 (4VP)

Gegeben sind die Ebenen E und F mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \ r, s \in \mathbb{R}$$

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.

Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Aufgabe 8 (3VP)

Von einem senkrechten Kegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

Die Herstellungskosten eines neuen Rheumamittels werden durch eine Funktion f mit

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+5};\ \ x\in\mathbb{R}_0^+$$

modellhaft kalkuliert.

Hierbei gibt $f(x)$ die Kosten in 10.000 Euro für die x-te Produktionseinheit an, wobei die Einheiten nacheinander produziert werden. Die fünfte Produktionseinheit kostet in der Herstellung 950.000 Euro, die zwanzigste Produktionseinheit kostet nur noch 560.000 Euro.

a) Bestimmen Sie a und b. (7VP)

Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Weisen Sie nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken.

Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400.000 Euro?

Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen?

(Teilergebnis: $f(x)=\dfrac{30x+800}{x+5}$)

b) Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinander folgenden Produktionseinheiten um weniger als 10.000 Euro? (5VP)

Jede Produktionseinheit besteht aus 10.000 Packungen. Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen?

Bei klinischen Studien wird dieses Rheumamittel Patienten, die den Wirkstoff bisher nicht im Blut hatten, zugeführt und die Menge des Wirkstoffes im Blut gemessen.

c) Ein Patient erhält alle 6 Stunden eine Spritze mit 50 mg Wirkstoff. Bis zur nächsten Spritze hat der Körper 18% des im Blut vorhandenen Wirkstoffs abgebaut. Beschreiben Sie mittels einer rekursiv definierten Folge, wie viel Wirkstoff sich jeweils direkt nach Verabreichung einer Spritze im Blut befindet. (6VP)

Welche Wirkstoffmenge befindet sich direkt nach der 5. Spritze im Blut?

In welchem Bereich schwankt die Wirkstoffmenge im Blut langfristig?

Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der im Blut vorhandenen Wirkstoffmenge für die ersten 24 Stunden.

Aufgabe I 2

Die Funktion f ist durch

$$f(x)=\frac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

für $x\in\mathbb{R}$ gegeben. Ihr Schaubild ist K.

a) Skizzieren sie K im Intervall $[-4;\,4]$. (7VP)
Begründen Sie, dass $\mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge von f ist.
Geben Sie die Wertemenge von f an.
Bestimmen Sie die Periode von f.
Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K an.

b) Im Intervall $[-2;\,2]$ soll f durch eine ganzrationale Funktion g vom Grad 2 angenähert werden, die mit f an den Stellen -2, 0 und 2 übereinstimmt. (6VP)
Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für g.
An welchen Stellen des Intervalls $[-2;\,2]$ weicht die Näherungsfunktion g am stärksten von der Funktion f ab?
Wie groß ist die Abweichung an diesen Stellen?
Wie groß ist im Mittel der Betrag der Abweichung von f und g im angegebenen Intervall?

c) Das Schaubild K rotiert im Intervall $[0;\,4]$ um die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{4}{3}$. (5VP)
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
Das Schaubild K wird an der durch die Gleichung $y=\frac{4}{3}$ gegebenen Geraden gespiegelt.
Geben Sie die Gleichung des gespiegelten Schaubilds an.

Aufgabe I 3

Die momentane Ankunftsrate an einem Kino — also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute — soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x)=0,27\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-0,12x}.$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.
Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f. (5VP)
Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?

Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino?

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit $g(x)=312,5-\left(2,25x^2+37,5x+312,5\right)\cdot\mathrm{e}^{-0,12x}$ beschrieben wird. (4VP)

Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden. (6VP)

Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?

Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?

Wie viele Besucher warten dann?

Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr. (3VP)

Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?

Wahlteil II

Aufgabe II 1.1

Die Ebene $E\colon x_1+x_2+2x_3=8$ stellt für $x_3\geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.

Im Punkt $H(6\,|\,4\,|\,0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene (1 LE entspricht 10 m).

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar. (6VP)
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.

Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.

Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.

Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

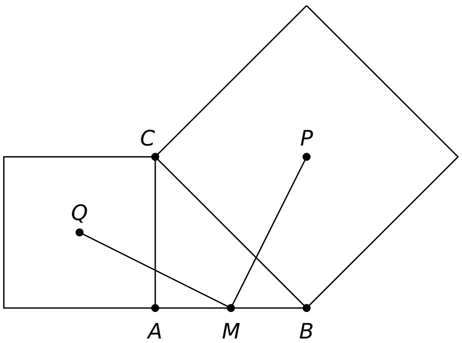
b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs. (3VP)
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6\,|\,4\,|\,k)$ um. (3VP)
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4\,|\,0\,|\,2)$.

Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

Aufgabe II 1.2

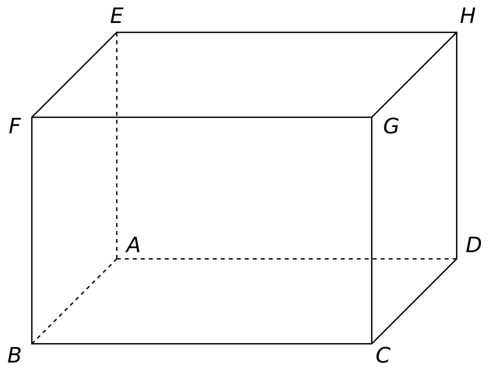
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig. P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB. Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ orthogonal und gleich lang sind. (4VP)



Aufgabe II 2

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(3\,|\,0\,|\,0)$, $D(0\,|\,5\,|\,0)$ und $F(3\,|\,0\,|\,4)$ festgelegt.
Die Fläche $EFGH$ stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH.

Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch die Gleichung
E_t: $tx_1 - x_3 = -4$.



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH. (5VP)
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?
Liegt der Deckel in eine Ebene E_t, wenn er um 90° geöffnet ist?

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel. (3VP)
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt? (4VP)
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt?
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90^\circ$.

d) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0\,|\,2{,}5\,|\,20)$ belechtet die Kiste. (4VP)
Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt?