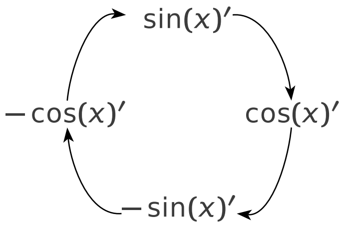
Pflichtteil

Aufgabe 1 (2 VP)

▶ Erste Ableitung von f bilden

Du sollst die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 7)^5$ bilden.

Bei der Funktion handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite sie also nach der **Kettenregel** ab.
Bezüglich der **inneren Ableitung** (sin-Funktion) kannst du dich an der Merkhilfe „Trig-Kreis“ orientieren.



Für die erste Ableitung ergibt sich somit:

$$f'(x) = 5 \cdot (\sin(x) + 7)^4 \cdot \cos(x)$$

Aufgabe 2 (2 VP)

▶ Stammfunktion von f bestimmen

Den Funktionsterm von f kannst du zunächst umformulieren:

$$f(x) = 2e^{4x} + 3 \cdot x^{-2}$$

Bilde nun eine Stammfunktion von F, indem du die beiden Terme **einzeln** integrierst:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \cdot e^{4x} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{(-1)} \cdot x^{-1} \\ &= \frac{2}{4} \cdot e^{4x} - 3 \cdot x^{-1} \\ &= \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 VP)

▶ Gleichung lösen

Dir ist die Gleichung gegeben mit $\sin(x) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) = 0$.

Hier kannst du den Faktor $\cos(x)$ ausklammern, da er in beiden Summanden vertreten ist. Damit ergibt sich die folgende Gleichung.

$$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$$

Nun gilt: Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. (Satz vom Nullprodukt). Betrachte also die beiden Faktoren einzeln und untersuche, für welche Werte von x sie den Wert Null annehmen:

1. $\cos(x) = 0$: Der Kosinus nimmt im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ an den Stellen $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ den Wert Null an. Damit hast du bereits zwei Lösungen der Gleichung gefunden.

2. $\sin(x) - 2 = 0 \qquad | +2$

   $\sin(x) = 2$

   Überlege, wie die Kurve der Sinusfunktion verläuft: sie schwingt zwischen $y = -1$ und $y = 1$ hin und her. Damit nimmt der Sinus **nie** den Wert 2 an. Diese Gleichung hat also **keine Lösung**.

Es folgen die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

Aufgabe 4 (4 VP)

▶ Gemeinsame Punkte bestimmen

Betrachte zunächst die beiden Funktionen f und g: bei f handelt es sich um eine **gebrochenrationale** Funktion, bei g um eine **ganzrationale** Funktion. Untersuche f zunächst auf **Definitionslücken**:

Da der Nenner Funktionsterms von f gerade x ist, erhältst du die Definitionslücke $x = 0$.

Gesucht sind nun die gemeinsamen Punkte der Graphen, also deren **Schnittpunkte**. Diese kannst du berechnen, indem du die Funktionsterme von f und g **gleichsetzt**:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{2}{x} = 2 \cdot x - 3 \qquad | \cdot x$$

$$2 = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x \qquad | -2$$

$$0 = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 2$$

Löse diese Gleichung mittels der *abc*-Formel oder der *pq*-Formel.

▶▶ Lösungsweg A: *abc*-Formel

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{3 \pm 5}{4} \\ x_1 &= \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 &= \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

▶▶ Lösungsweg B: *pq*-Formel

Zunächst musst du die Gleichung auf Normalform $x^2 + p \cdot x + q = 0$ bringen. Dividiere dazu beide Seiten der Gleichung durch zwei:

$$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 2 = 0 \qquad | : 2$$

$$x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - 1 = 0$$

Setze dies nun in die *pq*-Formel ein.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\left(-\frac{3}{4}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1} \\
&= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \\
&= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} \\
&= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} \\
&= \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \\
x_1 &= \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\
x_2 &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Werte $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$. An keiner der beiden Stellen liegt eine Definitionslücke vor, also handelt es sich beide Male um **Schnittstellen** der Funktion f und g.

Berechne nun die zugehörigen y-Koordinate. Setze dazu x_1 und x_2 entweder in den Funktionsterm von f oder von g ein:

$$\begin{aligned}
f(2) &= \frac{2}{2} = 1 \\
f(-\tfrac{1}{2}) &= \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot (-2) = -4
\end{aligned}$$

Es folgen die beiden Schnittpunkte $S_1\,(2 \mid 1)$ und $S_2\left(-\frac{1}{2} \mid -4\right)$.

▸ Prüfen, ob sich die Graphen senkrecht schneiden

Zwei Graphen schneiden sich dann senkrecht in einem Punkt, wenn sich die **Tangenten** an die jeweiligen Graphen in diesem Punkt senkrecht schneiden.
Zwei Tangenten wiederum stehen senkrecht aufeinander, wenn für deren Steigungen m_1 und m_2 gilt:
$m_1 \cdot m_2 = -1$.
Die Tangentensteigungen erhältst du über die **erste Ableitung**.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die erste Ableitung von f und g.
- Berechne die Tangentensteigungen an die Graphen von f und g in den beiden Schnittpunkten.
- Untersuche, ob das Produkt der Steigungen jeweils -1 ergibt oder nicht.

1. Schritt: Ableitung bilden

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} \\ &= -2x^{-2} \\ &= -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

$$g(x) = 2x - 3$$

$$g'(x) = 2$$

2. Schritt: Steigungen berechnen

Setze x_1 und x_2 jeweils in $f'(x)$ und $g'(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{2}{2^2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad g'(2) = 2$$

$$\begin{aligned} f'(-\tfrac{1}{2}) &= -\frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{\frac{1}{4}} \\ &= -2 \cdot \frac{4}{1} \\ &= -8 \end{aligned} \qquad g'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2$$

3. Schritt: Orthogonalität untersuchen

Berechne nun die Produkte der Steigungen:

$$\begin{aligned} f'(x_1) \cdot g'(x_1) &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_2) \cdot g'(x_2) &= -8 \cdot 2 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Damit folgt: Die beiden Graphen schneiden sich im Punkt S_1 senkrecht.

Aufgabe 5 (5 VP)

a) ► **Zuordnung der Graphen begründen**

Versuche, die Funktion f mit Abbildung 2 über eine einfache Eigenschaft von f in Verbindung zu setzen. Eine Möglichkeit ist z.B. den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ zu berechnen und mit den Graphen zu vergleichen:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

Damit folgt: Der Graph von f verläuft auf jeden Fall durch den Punkt $P(0\mid-2)$. Ein Vergleich mit den Abbildungen zeigt: Nur der Graph in Abbildung 2 verläuft durch diesen Punkt. Also muss das Schaubild in Abbildung 2 zur Funktion f gehören.

b) ▸ **Graphen zuordnen**

1. Schritt: Funktion *g* einem Graphen zuordnen

Betrachte zunächst den Funktionsterm von g. Durch $g(x)=f(x-a)$ wird der Graph der Funktion f **verschoben** und zwar in um a Einheiten in **positive x-Richtung**.

Betrachte also die Abbildungen und suche nach einem Schaubild, das aus dem Graphen von f durch eine solche Verschiebung hervorgeht: Solch ein Schaubild zeigt Abbildung 4.

Es geht aus dem Schaubild von f hervor durch Verschiebung um **zwei Einheiten** nach rechts, also in positive x-Richtung.

Damit folgt auch direkt: $a=2$; für $g(x)$ gilt dann: $g(x)=f(x-2)$.

2. Schritt: Funktion *h* einem Graphen zuordnen

Das Schaubild von Funktion h mit $h(x)=b\cdot f(x)$ geht ebenfalls aus dem Schaubild von f hervor und zwar durch **Streckung** um Faktor b in **y-Richtung**. Wenn b negativ ist, wird das Schaubild zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Das bedeutet: Das Schaubild von h hat die **gleichen Nullstellen** wie das Schaubild von f. Auch die **Extremstellen** sind an den gleichen x-Koordinaten zu finden. Nur in y-Richtung ist das Schaubild um Faktor b gestreckt.

Diese Eigenschaften findest du in Abbildung 3:

- gleiche Nullstelle bei $x=2$
- gleiche Extremstelle bei $x=-1$

Ein Vergleich zeigt: Das Schaubild wurde an der x-Achse gespiegelt. Zudem wurden die Funktionswerte insgesamt **halbiert**. Der Tiefpunkt des Schaubildes von f z.B. hat die y-Koordinate $y=-4$; der Hochpunkt des Schaubildes von f hat die y-Koordinate $y=2$.

Also wurde das Schaubild von f an der x-Achse gespiegelt und um Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht. Damit folgt der Wert $b=-\frac{1}{2}$ und $h(x)=-\frac{1}{2}\cdot f(x)$.

c) ▸ **Funktion *k* bestimmen**

Der Funktionsterm von k soll **ohne Rechnung** angegeben werden. Dies legt nahe, dass auch das Schaubild von k durch Verschiebung und/oder Streckung aus dem Schaubild von f hervorgeht. Das letzte übrige Schaubild ist in Abbildung 1 zu finden. Betrachte es zunächst und vergleiche es mit dem Schaubild von f:

- Hoch- und Tiefpunkt befinden sich noch an den gleichen x-Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Es findet also keine Verschiebung und keine Streckung in x-Richtung statt.
- Das Schaubild wurde **nicht** an der y-Achse gespiegelt.

- Der vertikale Abstand zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt ist beim Schaubild von f gerade 4. In y-Richtung sind Hochpunkt und Tiefpunkt 4 LE voneinander entfernt. Das gleiche gilt im Schaubild von k. Also findet auch keine Streckung in y-Richtung statt.
- Zuletzt fällt auf, dass Hochpunkt und Tiefpunkt im Vergleich zum Schaubild von f je 3 LE weiter oben liegen.

Es folgt: Das Schaubild von k geht aus dem Schaubild von f durch **Verschiebung** um 3 LE in y-Richtung hervor. Für den Funktionsterm von k gilt dann:

$$\begin{aligned} k(x) &= f(x) + 3 \\ &= x^3 - 3x - 2 + 3 \\ &= x^3 - 3x + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (3 VP)

▶ Schnittgerade der Ebenen

Die Ebenen sind in Normalen bzw. in Koordinatenform gegeben. Die Gleichung einer Schnittgerade kannst du nur bestimmen, wenn du **beide** in der gleichen Form gegeben hast. Es bietet sich daher an, die Gleichung von E so umzuformen, dass sie in Koordinatenform gegeben ist. Dann kannst du die Gleichung der Schnittgeraden über ein **lineares Gleichungssystem** bestimmen.

1. Schritt: Koordinatengleichung von E bestimmen

Die Koordinatengleichung der Ebene hat allgemein die Form $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Dabei sind a, b und c die Koordinaten des **Normalenvektors** der Ebene.

E ist in Normalenform gegeben. Die Koordinaten des Normalenvektors kannst du also **ablesen**:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Koordinatenform der Ebene liefert vorläufig:

$E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = d.$

Setze nun die Koordinaten des Stützvektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein:

$$\begin{aligned} 4\cdot 1-2+2\cdot 1 &= d \\ 4-2+2 &= d \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Es folgt die Koordinatengleichung $E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$.

2. Schritt: Gleichung der Schnittgeraden ermitteln

Fasse die beiden Koordinatengleichungen von E und F in einem linearen Gleichungssystem zusammen und löse dieses. Das Gleichungssystem ist **unterbestimmt**, weil es zwar drei Unbekannte, aber nur zwei Gleichungen enthält. Setze also z.B. $x_3 = t$ und löse dann nach x_2 und x_1 auf.

$$\begin{array}{llcccccl}
(1) & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \qquad \text{Rechne: (1) + (2)} \\
(2) & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\
\hline
(1)a & 4x_1 & & & + & 4x_3 & = & 12 \qquad \text{Setze } x_3 = t \\
(2) & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \qquad \text{Setze } x_3 = t \\
\hline
(1)a & 4x_1 & & & + & 4t & = & 12 \\
(2) & & & x_2 & + & 2t & = & 8 \\
\hline
\end{array}$$

Aus (1)a folgt:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4t &= 12 && \mid -4t \\ 4x_1 &= 12-4t && \mid :4 \\ x_1 &= 3-t \end{aligned}$$

Aus (2)a folgt:

$$\begin{aligned} x_2 + 2t &= 8 && \mid -2t \\ x_2 &= 8-2t \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt $x_3 = t$. Fasse diese drei Lösungen als **Vektor** auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 8-2t \\ t \end{pmatrix}$$

Forme diesen Vektor nun so um, dass er die Form einer **Geradengleichung** annimmt. So hast du die Gleichung der Schnittgeraden bestimmt:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3-t \\ 8-2t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Schnittgerade der beiden Ebenen hat die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7 (4 VP)

a) ▶ **Besondere Lage der Ebene *E***

Die Frage nach der besonderen Lage einer Ebene im Raum fragt immer nach einer Parallelität zu einer der Koordinatenachsen oder -ebenen.

Allgemein kannst du die Regel anwenden, dass eine Ebene immer zu der Koordinatenachse parallel verläuft, deren Koordinate nicht in der Koordinatengleichung vertreten ist.

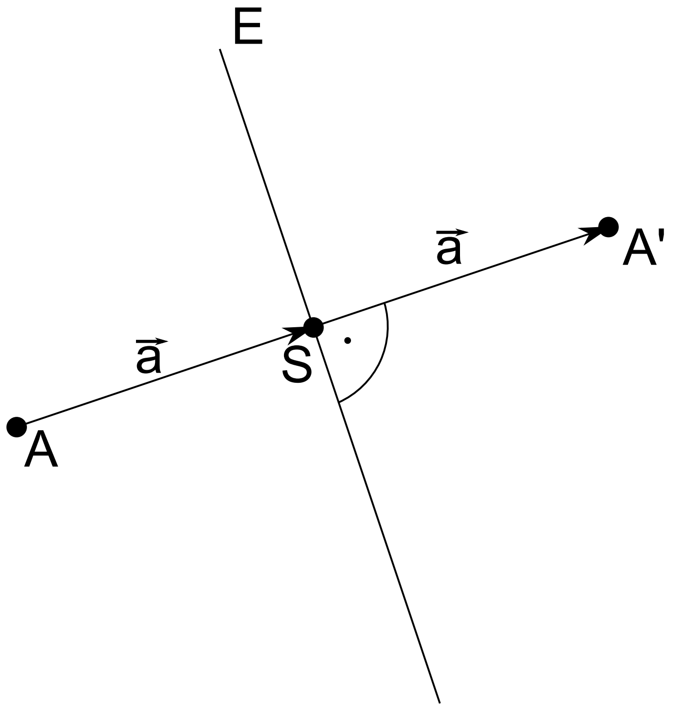
Dies ist darin begründet, dass Ebenen auf allen Achsen Spurpunkte besitzen, die in der Koordinatengleichung vertreten sind.

Betrachte nun die Koordinatengleichung der Ebene E. Du kannst erkennen, dass die x_2-Koordinate nicht in der Koordinatengleichung vertreten ist.

Nach obiger Vorgabe verläuft somit die Ebene E parallel zur x_2-Achse.

b) ▶ **Spiegelpunkt von *A* an *E***

Punkt A soll an der Ebene E gespiegelt werden. Solche eine Spiegelung läuft immer **orthogonal** zur Spiegelebene ab. Zum besseren Verständnis haben wir die Situation in einer Skizze dargestellt:



Du kannst nun so vorgehen:

- Bestimme zunächst einen Vektor, der **senkrecht** zur Ebene E verläuft.
- Bestimme dann die Gleichung einer Geraden g, die diesen Vektor als Richtungsvektor hat und die durch den Punkt A verläuft. Diese Gerade ist dann auch senkrecht zur Ebene E.
- Berechne den Schnittpunkt S von g und E. Dies ist der **Lotfußpunkt** von A auf E.
- Für den Spiegelpunkt A' gilt nun: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$.

1. Schritt: Richtungsvektor und Gerade bestimmen

Gesucht ist ein Vektor, der senkrecht auf die Ebene E steht. Der **Normalenvektor** einer Ebene steht immer senkrecht auf diese. Du kannst also den Normalenvektor von E als Richtungsvektor der Geraden verwenden.
Da die Ebene E in Koordinatenform gegeben ist, kannst du die Koordinaten von $\vec{n}$ direkt ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Gerade g soll nun durch den Punkt A verlaufen und den Vektor $\vec{n}$ als Richtungsvektor besitzen. Wähle also $\overrightarrow{OA}$ als Stütz- und $\vec{n}$ als Richtungsvektor und erhalte die Gleichung:

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Lotfußpunkt *S* berechnen

Gesucht ist der Schnittpunkt von g und E. Da E in Koordinatenform gegeben ist, kannst du die Gleichung von g

- erst in die drei Koordinatenzeilen aufteilen
- die Ausdrücke für x_1 und x_3 dann in die Koordinatenform einsetzen.

Aufgeteilt lautet die Gleichung der Geraden:

$$g: \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 3 - t \end{aligned}$$

Einsetzen in die Koordinatengleichung der Ebene E liefert:

$$\begin{aligned} (1+t) - (3-t) - 4 &= 0 \\ 1 + t - 3 + t - 4 &= 0 \\ 2t - 6 &= 0 \qquad \mid +6 \\ 2t &= 6 \qquad \mid :2 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Setze $t = 3$ ein in die Geradengleichung und erhalte die Koordinaten von S:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Koordinaten des Spiegelpunktes berechnen

Oben haben wir gezeigt, dass gilt: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$. Berechne also zunächst den Vektor $\overrightarrow{AS}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & - & 1 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & - & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit folgt für den Spiegelpunkt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & + & 6 \\ 1 & + & 0 \\ 3 & - & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Spiegelpunkt A' hat die Koordinaten $A'(7 \mid 1 \mid -3)$.

Aufgabe 8 (3 VP)

▸ Verfahren beschreiben

g liegt in E. Gesucht ist die Gleichung einer Geraden h, die ebenfalls in E liegt und senkrecht zu g steht. Wir wollen mit $\vec{n}$ den Normalenvektor der Ebene bezeichnen und nehmen an, dass für g gilt: $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$.

Unsere Gerade h soll eine Gleichung der Form $h : \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v}$ bekommen.

Du kannst so vorgehen:

- Betrachte den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Die beiden Vektoren stehen senkrecht aufeinander, weil g in der Ebene liegt und $\vec{n}$ senkrecht auf E und damit auch senkrecht auf g steht.
- Überlege nun, welche Eigenschaften der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden h erfüllen muss. Er muss zum einen senkrecht auf den Vektor $\vec{u}$ sein, damit h senkrecht zu g ist. Gleichzeitig muss er auch senkrecht zu $\vec{n}$ sein, damit h in der Ebene E liegt. Gesucht ist also ein Vektor, der sowohl senkrecht auf $\vec{n}$ als auch auf Vektor $\vec{u}$ steht.
- Diesen kannst du z.B. mit dem Kreuzprodukt berechnen: $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}$. Dieser Vektor $\vec{v}$ steht dann parallel auf $\vec{u}$ und $\vec{n}$.
- Bilde nun eine Gerade h, welche den gleichen Stützvektor wie die Gerade g hat und den Vektor $\vec{v}$ als Richtungsvektor. $\vec{v}$ haben wir so bestimmt, dass er senkrecht auf $\vec{n}$ steht. Also liegt die Gerade h in der Ebene. Zugleich haben wir $\vec{v}$ so bestimmt, dass er senkrecht auf $\vec{u}$ steht. Also liegt h in der Ebene E und ist senkrecht auf Gerade g.

Somit erhalten wir zuletzt die Gleichung $h: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot (\vec{n} \times \vec{u})$.

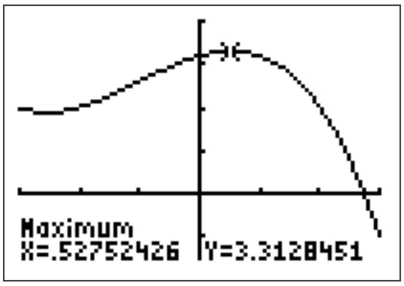
Wahlteil I Aufgabe I 1

a) ▸ **Koordinaten des nördlichsten Punktes** (6 VP)

In der rechten oberen Ecke kannst du eine Windrose erkennen, die dir die Himmelsrichtung Norden, Osten, Süden und Westen im Koordinatensystem angibt. Du kannst sehen, dass Norden in Richtung der positiven y-Richtung liegt und somit der Punkt mit dem größten y-Wert im untersuchten Bereich gesucht ist.

Der Punkt mit dem größten y-Wert im untersuchten Bereich wird lokaler Hochpunkt genannt, das du mittels deines GTR berechnen kannst.

Lasse dir zunächst den Graph von f zeichnen. Wähle dann während du dich im `Graph` befindest über `2nd→ TRACE (CALC)` den Befehl `4: maximum` und lasse dir das Maximum berechnen.



Somit ergibt sich der nördlichste Punkt mit den Koordinaten $P(0,53\,|\,3,31)$

▸ **Abstand von *M* und *P***

Den Abstand zweier Punkte kannst du über die folgende Formel bestimmen.

$d(M,P) = \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2}$

Berechne auf diese Weise den Abstand von M und P.

Es ergibt sich die folgende Gleichung.

$d(M,P) = \sqrt{(0-0,53)^2 + (0,5-3,31)^2} = \sqrt{0,53^2 + 2,81^2} = \sqrt{8,177} \approx 2,86$

Da eine Längeneinheit einem Kilometer entspricht, ist somit der Ortsmittelpunkt M 2,86 km vom nördlichsten Punkt entfernt.

▸ **Übergang von Linkskurve in Rechtskurve**

Der Übergang einer Kurve von einer Linkskurve in eine Rechtskurve zeigt sich am Wendepunkt des Graphen. Folglich musst du diesen berechnen, damit du den gesuchten Punkt erhältst.

Es müssen die notwendige und die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt sein.
Die notwendige Bedingung lautet $f''(x) = 0$ und die hinreichende wird durch $f'''(x) \neq 0$ beschrieben.

Leite die Funktion drei mal ab, um die Bedingungen zu prüfen.

$f(x) = -0,1 \cdot x^3 - 0,3 \cdot x^2 + 0,4 \cdot x + 3,2$

$f'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 0,4$

$f''(x) = -0,6 \cdot x - 0,6$

$f'''(x) = -0,6$

Somit ist die Bedingung $f'''(x) \neq 0$ erfüllt, da gilt $f'''(x) = -0,6$.

Löse somit die Gleichung $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -0,6 \cdot x - 0,6 &= 0 && \mid +0,6 \\ -0,6 \cdot x &= 0,6 && \mid :(-0,6) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich an der Stelle $x = -1$ der Wendepunkt des Graphen von f.

Dieser hat die Koordinaten $W(-1 \mid f(-1))$.

$f(-1) = -0,1 \cdot (-1)^3 - 0,3 \cdot (-1)^2 + 0,4 \cdot (-1) + 3,2 = 0,1 - 0,3 - 0,4 + 3,2 = 2,6$

Somit ergibt sich der Wendepunkt W mit den Koordinaten $W(-1 \mid 2,6)$.

► Übergang der Umgehungsstraße in die Ortsdurchfahrt

Die Ortsdurchfahrt wird durch eine Gerade beschrieben. Allgemein haben Geraden die Form $g(x) = m \cdot x + c$, wobei m die Steigung und c den y-Achsenabschnitt darstellt.

Auf der Gerade sollen die Punkte M, A und B liegen. Du benötigst zwei dieser Punkte, um die Gerade eindeutig zu bestimmen.

Damit dann die Umgehungsstraße ohne Knick in die Ortsdurchfahrt mündet, muss gelten $f'(-3) = g'(-3)$, wobei gilt $g'(x) = m$.
Dies ist darin begründet, dass g als Tangente am Übergangspunkt anliegen muss, damit kein Knick entsteht. Folglich muss g die selbe Steigung wie f an dieser Stelle besitzen, die durch die 1. Ableitung beschrieben wird.

Somit ergibt sich die Bedingung $f'(-3) = m$.

m kannst du über die Formel $m = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ bestimmen. Es ergibt sich der folgende Term.

$m = \dfrac{-1-2}{3-(-3)} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

Somit muss gelten $f'(-3) = -\dfrac{1}{2}$, damit kein Knick beim Übergang der Straßen vorliegt.

Die erste Ableitung hast du bereits zuvor bestimmt.

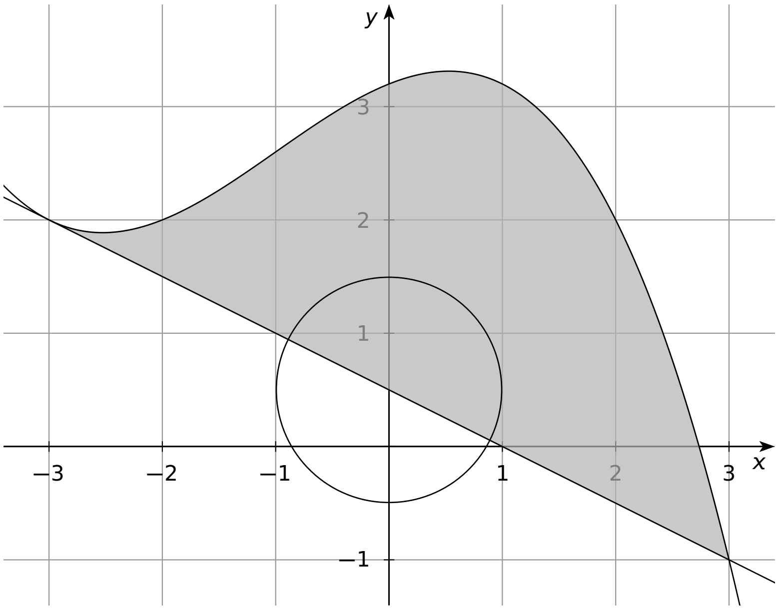
$f'(-3) = -0,3 \cdot (-3)^2 - 0,6 \cdot (-3) + 0,4 = -0,3 \cdot 9 + 1,8 + 0,4 = -2,7 + 2,2 = -0,5 = -\dfrac{1}{2}$

Somit gilt $f'(-3) = -\dfrac{1}{2}$, sodass die Straßen ohne Knick in einander übergehen.

b) **► Größe des Gebiets bestimmen** (4 VP)

Um die Größe des Gebiets zu bestimmen, musst du die Integrale der beiden Kurven bestimmen, da diese den Flächeninhalt unter der Kurve beschreiben und dann von einander abziehen.

Als Grenzen benötigst du die Schnittpunkte der Graphen von f und g, von denen dir bereits einer mit dem Punkt A gegeben ist. Die gesuchte Fläche sieht dann wie folgt aus.



Bestimme diese Fläche nach der folgenden Formel.

$$\int_{-3}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{b} g(x)\mathrm{d}x$$

Du siehst, dass du noch die 2. Schnittstelle und die Geradengleichung von g benötigst.

Für die Schnittstelle benötigst du allerdings auch die Geradengleichung, sodass du diese zuerst bestimmen muss.

1. Schritt: Geradengleichung bestimmen

Die allgemeine Geradengleichung lautet $g(x) = m \cdot x + c$. m hast du bereits im vorangehenden Aufgabenteil mit $m = -\frac{1}{2}$ bestimmt.

c wird über $g(0) = c$ beschrieben. Da gilt $M \in g$ und M die Koordinaten $M(0 \mid 0,5)$ hat, gilt somit

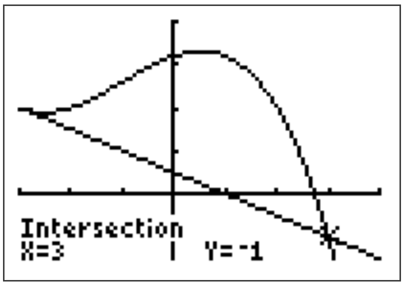
$g(0) = 0,5 = c$.

Somit ergibt sich die folgende Geradengleichung.

$$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 0,5$$

Berechne nun den Schnittpunkt von f und g, indem du die beiden Funktionsterme in den GTR einträgst und sie dir wie folgt berechnen lässt.

Wähle während du dich im Graph befindest über $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{TRACE (CALC)}}$ den Befehl `5: intersect` und lasse dir den Schnittpunkt berechnen, der sich nach dem Schaubild an der Stelle $x \approx 3$ befinden muss.



Somit ergibt sich der zweite Schnittpunkt S mit den Koordinaten $S(3\,|\,-1)$.

Somit hast du nun die zweite Grenze deines Integrals mit $b=3$. Berechne folglich im nächsten Schritt die Differenz der Integrale.

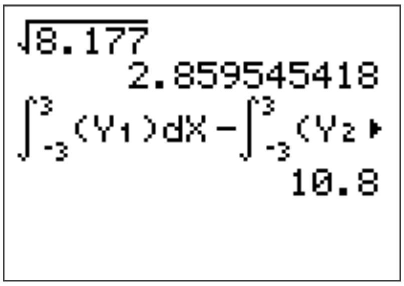
2. Schritt: Integral bestimmen

Die Fläche bestimmst du nun über das Integral in den Grenzen $a=-3$ und $b=3$.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x$$

Diesen Term kannst du dir von deinem GTR berechnen lassen.

Wähle über $\boxed{\texttt{MATH}}$ den Befehl `9: fnInt` aus. Setze die Grenzen des Integrals ein und suche unter $\boxed{\texttt{VARS} \rightarrow \texttt{Y-VARS} \rightarrow \texttt{Functions...}}$ deinen Funktionen aus und subtrahiere die Integrale wie im nebenstehenden Bild dargestellt.



Somit ergibt sich eine Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße mit $A_u = 10,8\,\text{FE}$.

▶ Prozentualen Anteil bestimmen

Den prozentualen Anteil bestimmst du über die folgende Formel, wobei A_k die Fläche des Gemeindegebiets zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße darstellt.

$$p = \frac{A_u - A_k}{A_u} \cdot 100\%$$

Da die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises, der das Gemeindegebiet beschreibt, verläuft, hat das Gemeindegebiet den Flächeninhalt eines Halbkreises, den du über folgende Formel bestimmen kannst.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

r beschreibt den Radius des Kreises, der laut der Aufgabe 1,5 betragen soll.
Somit ergibt sich folgender Term zur Berechnung von A_k.

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1,5)^2 = 1,125 \cdot \pi$$

Setze diesen Wert in die obige Formel ein, um den prozentualen Anteil der Fläche, die sich außerhalb des Gemeindegebiets befindet zu berechnen.

$$p = \frac{10,8 - 1,125 \cdot \pi}{10,8} \cdot 100\% \approx \frac{7,27}{10,8} \cdot 100\% = 0,673 \cdot 100\% = 67,3\%$$

Somit liegen 67, 3% der Fläche außerhalb des Gemeindegebiets.

c) ▶ **Punkt auf der Umgehungsstraße** (4 VP)

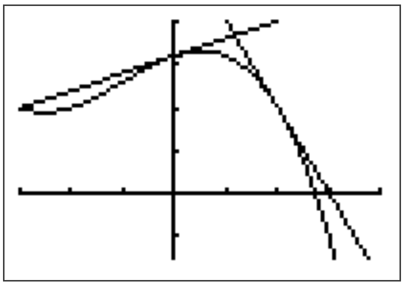
Das Fahrzeug soll von B aus auf der Umgehungsstraße fahren. Somit kannst du das Fahrzeug als Punkt Q, der auf der Kurve von f liegt, beschreiben.

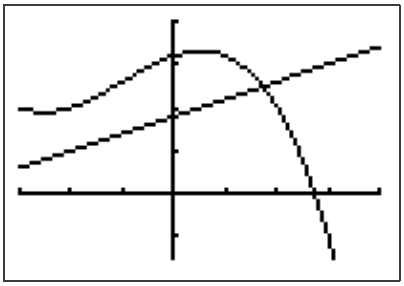
Die Fahrtrichtung kannst du allgemein als Gerade betrachten, die die Kurve von f berührt und somit eine Tangente nach der Form

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$

Dies ist darin begründet, dass die Ableitung von f die Steigung von f angibt. Diese beschreibt den Verlauf des Graphen und somit den Verlauf der Straße.

Die beiden Geraden im linken Bild stellen die Fahrtrichtungen richtig dar, während die Gerade im rechten Bild eine falsche Fahrtrichtung verdeutlicht.





Somit musst du den Punkt Q suchen, der mit dem Punkt P eine Tangente an dem Graphen von f definiert.

Der Punkt Q hat die allgemeinen Koordinaten $Q(x_0 \mid f(x_0))$.

Für Tangenten ist nach der folgenden Tangentengleichung

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$

die Steigung mit $m = f'(x)$ definiert. Die erste Ableitung von f hast du bereits im Aufgabenteil a) bestimmt mit

$f'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 0,4$

Es ergibt sich somit die Tangentengleichung mit der allgemeinen Steigung $m = f'(x)$ wie folgt.

$t(x) = (-0,3 \cdot x_0^2 - 0,6 \cdot x_0 + 0,4) \cdot x + c$

Setze die Koordinaten von P in die Geradengleichung ein und löse nach c auf, sodass sich das folgende Gleichungssystem ergibt.

$$\begin{aligned} t(x) &= (-0,3 \cdot x_0^2 - 0,6 \cdot x_0 + 0,4) \cdot x + c \\ 3 &= (-0,3 \cdot x_0^2 - 0,6 \cdot x_0 + 0,4) \cdot 1,5 + c \\ 3 &= -0,45 \cdot x_0^2 - 0,9 \cdot x_0 + 0,6 + c \qquad \mid -(-0,45 \cdot x_0^2 - 0,9 \cdot x_0 + 0,6) \\ c &= 0,45 \cdot x_0^2 + 0,9 \cdot x_0 + 2,4 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die allgemeine Tangentengleichung für die Tangente an der Kurve von f durch den Punkt P mit

$t(x_0) = f'(x_0) \cdot x + 0,45 \cdot x_0^2 + 0,9 \cdot x_0 + 2,4$

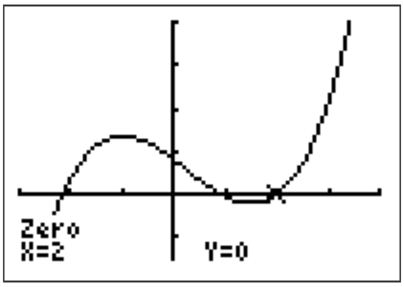
Um den Punkt Q zu bestimmen muss nun noch die letzte Bedingung einer Tangente mit $t(x) = f(x)$ erfüllt werden. Löse diese Gleichung nach x auf, um dann den Punkt Q mit den allgemeinen Koordinaten $Q(x_0 \mid f(x_0))$ zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= t(x_0) \\
-0,1 \cdot x_0^3 - 0,3 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 3,2 &= (-0,3 \cdot x_0^2 - 0,6 \cdot x_0 + 0,4) \cdot x_0 + 0,45 \cdot x_0^2 + 0,9 \cdot x_0 + 2,4 \\
-0,1 \cdot x_0^3 - 0,3 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 3,2 &= -0,3 \cdot x_0^3 - 0,6 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 0,45 \cdot x_0^2 + 0,9 \cdot x_0 + 2,4 \\
-0,1 \cdot x_0^3 - 0,3 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 3,2 &= -0,3 \cdot x_0^3 - 0,15 \cdot x_0^2 + 1,3 \cdot x_0 + 2,4 && \mid +0,3 \cdot x_0^3 \\
0,2 \cdot x_0^3 - 0,3 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 3,2 &= -0,15 \cdot x_0^2 + 1,3 \cdot x_0 + 2,4 && \mid +0,15 \cdot x_0^2 \\
0,2 \cdot x_0^3 - 0,15 \cdot x_0^2 + 0,4 \cdot x_0 + 3,2 &= 1,3 \cdot x_0 + 2,4 && \mid -1,3 \cdot x_0 \\
0,2 \cdot x_0^3 - 0,15 \cdot x_0^2 - 0,9 \cdot x_0 + 3,2 &= 2,4 && \mid -2,4 \\
0,2 \cdot x_0^3 - 0,15 \cdot x_0^2 - 0,9 \cdot x_0 + 3,2 &= 2,4 \\
0,2 \cdot x_0^3 - 0,15 \cdot x_0^2 - 0,9 \cdot x_0 + 0,8 &= 0
\end{aligned}
$$

Gib diesen Term als Funktion mit dem folgenden Funktionsterm in deinen Rechner ein und berechne die Nullstellen des zugehörigen Graphen.

$q(x) = 0,2 \cdot x^3 - 0,15 \cdot x^2 - 0,9 \cdot x + 0,8$

Es ergibt sich der nebenstehende Graph. Untesuche diesen über `2nd→ TRACE (CALC)→2: zero` auf Nullstellen. Diese müssen im Bereich $1,5 \leq x \leq 3$ liegen, da er von B losfährt und die Windkraftanlage nur bis $x = 1,5$ vor ihm liegt.



Somit ergibt sich die Stelle x_0 mit $x_0 = 2$, sodass der Punkt Q die Koordinaten $Q(2 \mid f(2))$ besitzt.
Setze $f(2)$ und berechne diesen Wert, um die Koordinaten von Q zu erhalten.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= -0,1 \cdot 2^3 - 0,3 \cdot 2^2 + 0,4 \cdot 2 + 3,2 \\
&= -0,8 - 1,2 + 0,8 + 3,2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Somit hat der Punkt Q, an dem der Fahrer des Wagens die Windkraftanalge genau vor sich sieht die Koordinaten $Q(2 \mid 2)$.

d) ▶ **Zeitpunkt der parallelen Fahrtrichtung bestimmen** (4 VP)

Aus der vorherigen Aufgabe haben wir die Bedingung, dass die Fahrtrichtung durch die Steigung der Tangente an der Kurve von f beschrieben wird.

Die Steigung der Tangente wird wiederum beschrieben über $m = f'(x)$.

Zwei Geraden verlaufen parallel, wenn gilt $m_1 = m_2$, wobei m_1 in diesem Fall die Steigung der Geraden, die die Ortsdurchfahrt beschreibt, darstellt, während m_2 die Steigung der Geraden beschreibt, die die Fahrtrichtung des Wagens zeigt.

Nach oben stehenden Bedingungen musst du also Prüfen für welches x_1 gilt $m_1 = m_2$ mit $m_2 = f'(x_1)$.

Die erste Ableitung f' der Funktion f hat den folgen Term, den du auch bereits zuvor bestimmt hast.

$f'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 0,4$

Die Steigung m_1 beträgt $m_1 = -\dfrac{1}{2}$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} m_1 &= f'(x_1) \\ -\frac{1}{2} &= -0,3 \cdot x_1^2 - 0,6 \cdot x_1 + 0,4 \qquad \Big|\ +\frac{1}{2} \\ -0,3 \cdot x_1^2 - 0,6 \cdot x_1 + 0,9 &= 0 \\ -0,3 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot x_1 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Hier kannst du den Satz vom Nullprodukt anwenden, der aussagt, dass ein Produkt immer dann gleich Null wird, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

Da gilt $-0,3 \neq 0$, musst du somit nur noch folgende Gleichung lösen.

$x_1^2 + 2 \cdot x_1 - 3 = 0$

Da es sich hierbei um eine quadratische Gleichung handelt, musst du die *abc*-Formel oder die *pq*-Formel anwenden.

▸▸ Lösungsweg A: *pq*-Formel

Die *pq*-Formel hat die folgende allgemeine Form für Funktionen der Form $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Setze die Werte für p und q ein, sodass sich die folgende Gleichung ergibt.

$x_{1,2} = -\dfrac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - (-3)}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4}$

$x_{1,2} = -1 \pm 2$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

Betrachtest du das Schaubild, so siehst du, dass die Funktionen sich an der Stelle $x_1 = -3$ berühren und somit identisch sind. Folglich verlaufen sie nur an der Stelle $x_2 = 1$ parallel

▸▸ Lösungsweg B: *abc*-Formel

Die abc-Formel hat die folgende allgemeine Form für Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Setze die Werte für a, b und c ein, sodass sich die folgende Gleichung ergibt.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

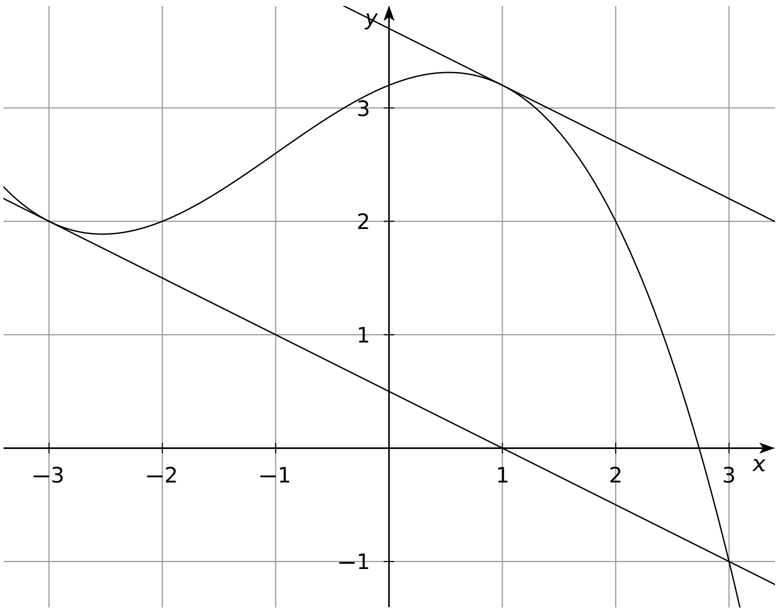
$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{-6}{2} = -3$$

Betrachtest du das Schaubild, so siehst du, dass die Funktionen sich an der Stelle $x_1 = -3$ berühren und somit identisch sind. Folglich besitzt der Graph von f nur an der Stelle $x_2 = 1$ eine Tangente, die parallel zur Geraden, die die Ortsdurchfahrt beschreibt, verläuft.

▶ Größter Abstand der Ortsdurchfahrt von der Umgehungsstraße

Oben haben wir bestimmt, an welcher Stelle die Kurve von f eine zu g parallele Tangente besitzt. Lasse dir das Schaubild von deinem GTR zeichnen. Es ergibt sich folgendes Bild.



Du kannst erkennen, dass es sich bei dem maximalen Abstand um den Abstand des Berührpunktes zur Geraden g handeln muss, da die Kurve zwischen den Parallelen eingeschlossen ist.

1. Schritt: Berührpunkt bestimmen

Wir haben die Stelle des Berührpunktes R mit $x = 1$ bestimmt, sodass sich R mit den folgenden Koordinaten ergibt $R(1\,|\,f(1))$ und vereinfacht $R(1\,|\,3,2)$.

Nun benötigst du noch einen Punkt U auf der Geraden g, der zusammen mit R eine zu g senkrechte Gerade definiert. Die Gerade muss senkrecht zu g stehen, da sie dann den kürzesten Abstand der beiden Parallelen beschreibt.
Wie oben beschrieben beschreibt der kürzeste Abstand der Parallelen den maximalen Abstand zwischen den Grapen von f und g

2. Schritt: Eine zu g senkrechte Gerade bestimmen

Für zwei zu einander senkrechte Geraden gilt:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

wobei m_1 und m_2 die Steigungen der beiden Geraden sind.

Die Steigung von g hast du bereits bestimmt. Sie lautet wie folgt.

$$m_1 = -\frac{1}{2}$$

Bestimme nun die Steigung der zu g senkrechten Gerade, die wir s nennen.

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{m_2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{m_2}$$
$$2 = m_2$$

Nach $s(x) = m_2 \cdot x + c$ ergibt sich somit die Gerade s mit

$s(x) = 2 \cdot x + c$

Setze nun die Koordinaten von R ein, um c zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 3,2 &= 2 \cdot 1 + c \qquad | -2 \\ 1,2 &= c \end{aligned}$$

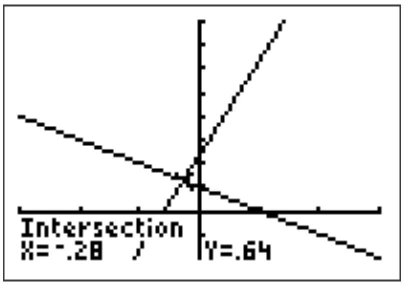
Somit ergibt sich die Gerade s mit dem folgenden Term.

$s(x) = 2 \cdot x + 1,2$

3. Schritt: Schnittpunkt von *s* und *g* bestimmen

Trage s und g in deinen GTR ein und bestimme den Schnittpunkt, der dann den Punkt U beschreibt.

Über `2nd→ TRACE (CALC)→5: intersect` kannst du den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen. Im nächsten Schritt kannst du dann den Abstand dieses Punktes U und dem Punkt R bestimmen.



Somit ergibt sich der Punkt U mit den folgenden Koordinaten.

$U(-0,28 \mid 0,64)$

4. Schritt: Abstand von *R* und *U* bestimmen

Bestimme nun den Abstand von R und U wie folgt.

$$\begin{aligned} d(U,R) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-0,28 - 1)^2 + (0,64 - 3,2)^2} \\ &= \sqrt{(-1,28)^2 + (-2,56)^2} \\ &= \sqrt{8,192} \end{aligned}$$

$d(U,R) \approx 2,862$

Somit ergibt sich der größte Abstand mit $d \approx 2,862$.

Aufgabe I 2

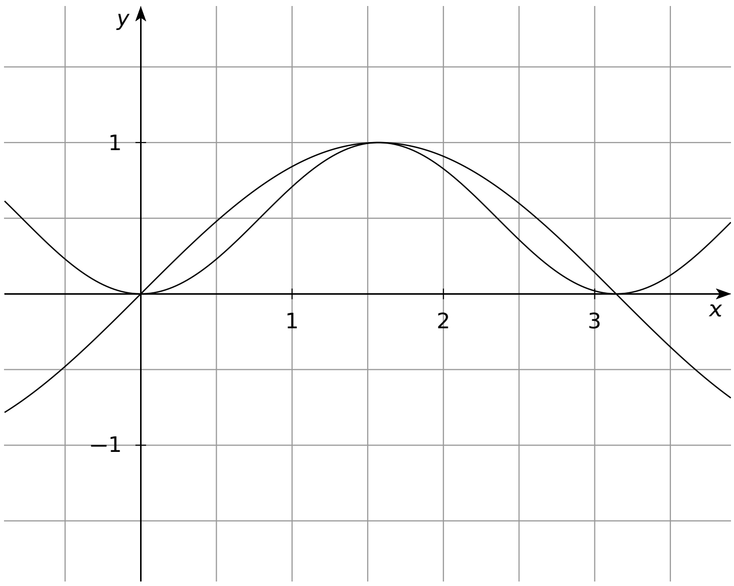
a) ▸ **Graphen von f und g_1 skizzieren** (6 VP)

Um die Graphen zu skizzieren, lasse sie dir zunächst von deinem GTR zeichnen. Beachte besondere Punkte, wie Schnittstellen mit der x- und y-Achse. Beachte außerdem die Periodenlänge der beiden Funktionen, da es sich bei beiden um trigonometrische Funktionen handelt.

Der Index 1 der Funktion g_1 gibt an, dass gilt $t = 1$, sodass die Funktion g den folgenden Funktionsterm aufweist.

$g_1(x) = 1 \cdot \sin(x) = \sin(x)$

Es ergibt sich das folgende Schaubild.



▸ **Periode von f angeben**

Die Periode beschreibt die Dauer, bis sich die Funktion wiederholt. Dies ist bei einer Sinusfunktion genau $2 \cdot \pi$.

Du kannst die Periode einer quadrierten Sinusfunktion über

$p = \frac{\pi}{q}$

bestimmen, wobei die Sinusfunktion mit $f(x) = (\sin(q \cdot x))^2$ aufgebaut ist.

Nach obiger Vorgabe ergibt sich $q = 1$ und somit die Periode wie folgt.

$p = \frac{\pi}{1} = \pi$

▸ **Amplitude von f angeben**

Die Amplitude einer unveränderten Sinusfunktion, wie sie durch die Funktion g_1 dargestellt wird, hat immer die Amplitude $A = 1$.

Anhand des oben stehenden Schaubildes kannst du erkennen, dass die Funktion f Funktionswerte im Bereich $0 \leq y \leq 1$ aufweist.

Die Amplitude kannst du anhand des Schaubildes bestimmen über kleinster y-Wert subtrahiert vom größten y-Wert und dann durch 2 teilen.

Somit ergibt sich die folgende Gleichung.

$$A = \frac{y_1 - y_0}{2} = \frac{1}{2}$$

Folglich weist die Funktion f eine Amplitude mit $A = 0,5$ auf.

▸ Stellen des größten Unterschiedes

Den größten Unterschied der Funktionswerte erhältst du über die Funktion

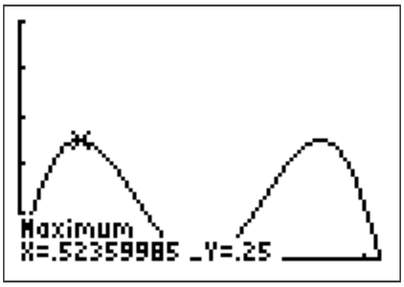
$d(x) = g_1(x) - f(x)$.

Vereinfacht erhältst du die Funktionsgleichung von d wie folgt.

$d(x) = \sin(x) - (\sin(x))^2$

Gib diese Funktion in deinen GTR ein und bestimme das Maximum im Bereich $0 \leq x \leq \pi$.

Das nebenstehende Bild zeigt die Funktion, die den Unterschied beschreibt im zu untersuchenden Bereich. Bestimme über `2nd→ TRACE (CALC)→4: maximum` den maximalen Unterschied der Funktionswerte. Beachte, dass du deinen Rechner auf Bogenmaß (Radians) umgestellt haben musst.



Prüfe beide Maxima, die du im betrachteten Bereich erkennen kannst. Sie befinden sich an den Stellen $x_1 \approx 0,524$ und $x_2 \approx 2,618$.

Der Unterschied wird dir durch die y-Koordinate an der jeweiligen Stelle gegeben. Diese ist an beiden Stellen gleich, sodass gilt

$y_1 = y_2 = 0,25$

Somit ergibt sich der maximale Unterschied im betrachteten Bereich mit $y = 0,25$.

b) **▸ Schnittwinkel im Ursprung** (6 VP)

Der Schnittwinkel der beiden Graphen kann über die Tangenten, die an den beiden Graphen im Ursprung anliegen, bestimmt werden.
Bestimme folglich zunächst die beiden Tangenten, die allgemein die folgende Form haben.

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$

Da die Tangenten durch den Ursprung laufen, ist der y-Achsenabschnitt $c = 0$.

Der Ursprung hat die Koordinaten $O(0 \mid 0)$. Somit ergibt sich die Stelle x_0, an der die Tangente liegen soll mit $x_0 = 0$.

Leite die beiden Funktionen ab, um die Steigung der Tangenten zu bestimmen.

$f(x) = \sin(x)^2$

$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$g(x) = t \cdot \sin(x)$

$g'(x) = t \cdot \cos(x)$

Somit ergeben sich die beiden Tangenten wie folgt.

$t_1(x) = f'(x_0) \cdot x$

$t_2(x) = g'(x_0) \cdot x$

Setze nun die Werte für x_0 ein, um die Steigungen der Tangenten zu bestimmen.

$f'(0) = 2 \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

$g'(0) = t \cdot \cos(0) = t \cdot 1 = t$

Eingesetzt in die Tangentengleichungen ergibt sich folgende Form.

$t_1(x) = 0 \cdot x = 0$

$t_2(x) = t \cdot x$

Da die Tangente t_1 die Form $t_1(x) = 0$ aufweist, wird jedem x-Wert ein y-Wert von $y = 0$ zugeordnet. Dies ist auch die Bedingung für eine Gerade, die die x-Achse darstellen soll.
Somit musst du nicht mehr den Winkel zwischen den Tangenten t_1 und t_2 bestimmen, sondern kannst dich auf den Winkel zwischen t_2 und der x-Achse beschränken.
Den Winkel zwischen einer Geraden und der x-Achse bezeichnet man als Steigungswinkel, den du über folgende Formel bestimmen kannst.

$\tan(\alpha) = m$

Für die Steigung m gilt
$m = g'(x_0) \Longrightarrow m = t$

Somit ergibt sich die folgende Gleichung, über die du t bestimmen kannst.

$\tan(\alpha) = t \Longrightarrow \tan(45^\circ) = t$

Bestimme über diese Gleichung nun t. Beachte, dass du nun deinen Rechner wieder auf Gradmaß zurückstellen musst.

$t = \tan(45^\circ)$

$t = 1$

Somit ergibt sich der Wert für t mit $t = 1$, damit sich die Graphen der beiden Funktionen unter dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ im Ursprung schneiden.

▶ Gleichheit der Flächen bestimmen

Flächen lassen sich über das Integral der Funktionen beschreiben. Da hier die Flächen unter den Kurven identisch sein sollen, muss also gelten

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} g_t(x)\mathrm{d}x$$

Eingesetzt ergibt sich daraus die Form

$$\int_0^{\pi} \sin(x)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} t\cdot\sin(x)\mathrm{d}x$$

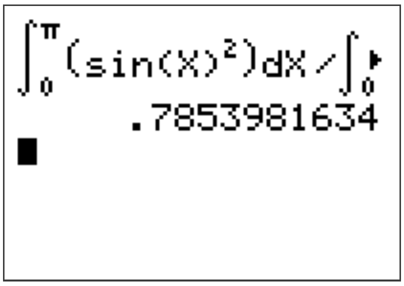
$$\int_0^{\pi} \sin(x)^2\mathrm{d}x = t\cdot\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$$

Forme diese Gleichung wie folgt um, um t zu berechnen.

$$t = \frac{\int_0^{\pi} \sin(x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x}$$

Lasse dir die Integrale von deinem GTR wie folgt bestimmen.

Über $\boxed{\texttt{Math→ 9:fnInt}}$ kannst du die Integral bestimmen. Trage dazu die Funktionsgleichungen und Grenzen wie nebenstehend ein und lasse dir die Integrale berechnen.



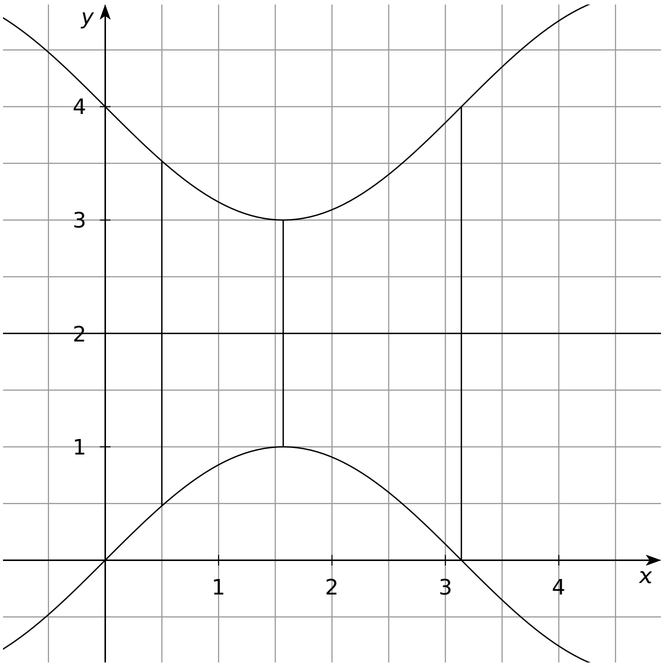
Somit ergibt sich der folgende Wert für t.

$t \approx 0,785$

Mit diesem Parameter t wird die Vorgabe, dass die Flächen gleich groß werden, erfüllt.

c) ▶ **Spiegelung der Funktion g_1** (6 VP)

Zunächst einmal solltest du dir eine Skizze anfertigen, die die neue Situation darstellt.
Diese könnte wie folgt aussehen.



Die Funktion g_1 ist eine unveränderte Sinusfunktion mit folgendem Funktionsterm.

$g_1(x) = \sin(x)$

Eine Spiegelung an einer zur x-Achse parallelen Gerade führt zur Umkehr des Vorzeichens der Funktion sowie einer Verschiebung auf der y-Achse. Dies kannst du auch anhand der oben stehenden Skizze erkennen.
Die Verschiebung des y-Achsenabschnitts entspricht dem doppelten Abstand vom y-Achsenabschnitt zur Spiegelachse, die hier durch die Gerade $h: y_1 = 2$ dargestellt wird.

Die Funktion g_1 mit $g_1(x) = \sin(x)$ hat den y-Achsenabschnitt $y_0 = 0$, sodass sich ein Abstand zur Spiegelachse wie folgt ergibt.

$d = y_1 - y_0 = 2 - 0 = 2$

Nach obiger Vorgabe ergibt sich der y-Achsenabschnitt der gespiegelten Funktion wie folgt.

$c_1 = 2 \cdot 2 = 4$

Nach der allgemeinen Form der gespiegelten Funktion mit $q(x) = -\sin(x) + c$ ergibt sich somit der folgende Funktionsterm von h.

$q(x) = -\sin(x) + 4$

▶ Rotation von *K* um *h*

Die Gerade h kannst du als „verschobene“ x-Achse ansehen, da sie parallel zur x-Achse verläuft.
Drehkörper kannst du allgemein über die folgende Formel berechnen.

$$V = \pi \cdot \int_a^b g_1(x)^2 \mathrm{d}x$$

Diese Formel bestimmt allerdings den Drehkörper bei Rotation um die x-Achse. Somit musst du die Gerade h und den Graphen der Funktion in y-Richtung so verschieben, dass gilt $h : y = 0$.

1. Schritt: Verschiebung von h und K

Dies ist darin begründet, dass die Gerade $h : y = 0$ die x-Achse darstellt und somit der verschobene Graph K_1 dann um h wie um die x-Achse rotieren kann.

Es muss gelten $y = 2 - d = 0$ und $g = g_1 - d$

Bestimme nun den Parameter d.

$y = 2 - d = 0 \Longrightarrow d = -2$

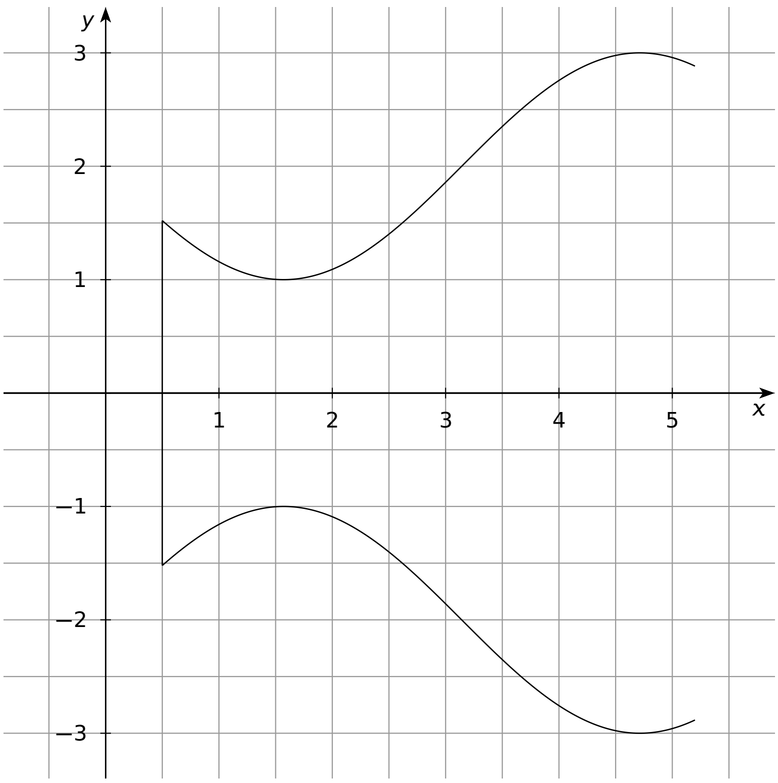
Somit ergibt sich die Funktionsgleichung von g, nach der Verschiebung, wie folgt.

$g(x) = \sin(x) - 2$

2. Schritt: Engste Stelle bestimmen

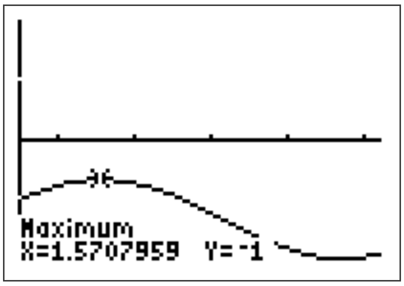
Du musst nun die Engste Stelle bestimmen, da sie dir neben $x = 5,2$ die 2. Grenze vorgibt, in der Wasser in den Pokal, der durch die Rotation entsteht, gefüllt werden kann.

Die engste Stelle wird durch den Punkt definiert, der am nächsten an der x-Achse liegt. Dies lässt sich durch folgende Skizze unterstreichen.



Lasse dir von deinem GTR den Graphen von g im Bereich $0,5 \le x \le 5,2$ zeichnen und suche die engste Stelle.

Über `2nd→ TRACE (CALC)→4: maximum` kannst du das Maximum suchen. Du musst das Maximum herausfinden, da dieses, wie du am nebenstehenden Bild bzw. auf deinem Rechner sehen kannst, am nächsten an der x-Achse liegt.

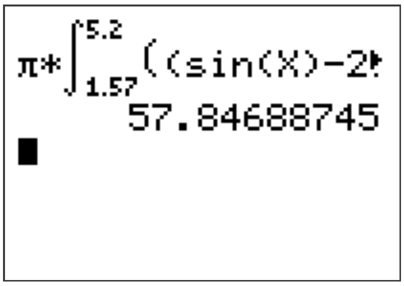


Somit ergibt sich die engste Stelle an der Stelle $x_0 \approx 1,57$

Folglich ergibt sich die untere Grenze des Rotationskörpers, in den effektiv Flüssigkeit passt, mit $x_0 = a = 1,57$ und die obere Grenze mit $x_1 = b = 5,2$.

3. Schritt: Flüssigkeitsvolumen im Pokal

Berechne nun das Volumen des Rotationskörpers mittels deines GTR wie folgt.



Somit ergibt sich ein Volumen von $V \approx 57,847$ VE.

4. Schritt: Prüfen, ob 1 Liter Wasser in den Pokal passt

Die Aufgabenstellung gibt dir vor, dass gilt 1 LE=2,5 cm.Außerdem gilt allgemein: 1 VE=(1 LE)^3

Rechne daher zunächst die Längeneinheiten in Volumeneinheiten um.

1 VE=(2,5 cm)^3 $\Longrightarrow$1 VE= $15,625$ cm^3

Berechne nun das Volumen, das der Pokal fassen, in cm^3.
Es gilt 1 cm^3=1 ml.

$V = 57,847 \cdot 15,625\,\text{cm}^3 \approx 903,86\,\text{cm}^3$

Nach obiger Vorgabe gilt somit

$903,86\,\text{cm}^3 = 903,86\,\text{ml}$

Umgerechnet in Liter ergibt sich dann das Volumen wie folgt.

$903,86$ ml$\approx 0,9$ l

Somit passt kein Liter Flüssigkeit in den Pokal.

Aufgabe I 3

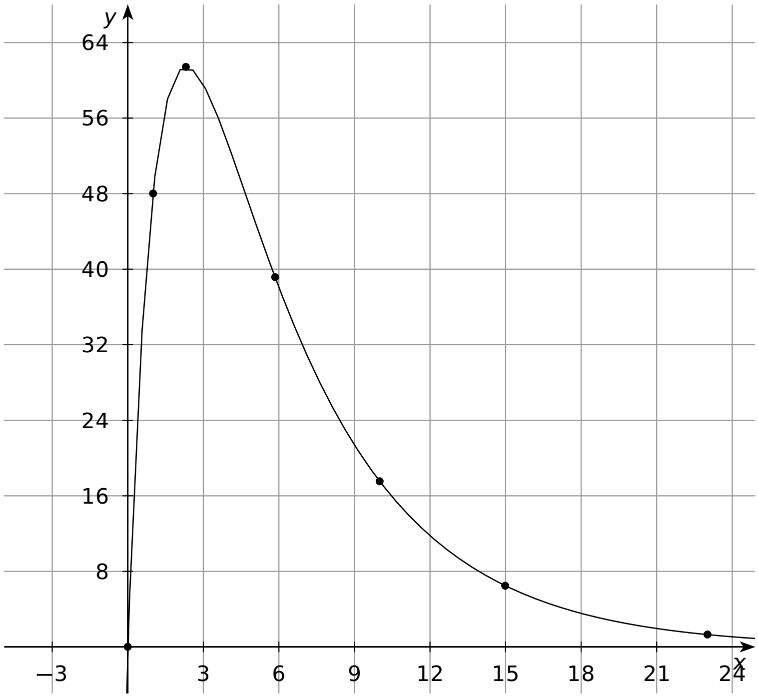
a) ▶ **Graphen von f skizzieren** (7 VP)

Den Graphen einer Funktion kannst du am besten skizzieren, indem du ihn dir zunächst von deinem GTR zeichnen lässt und ihn dann überträgst.

Suche dir dazu markante Punkte, wie Extrema, Schnittpunkte mit der x- und y-Achse und einige andere Werte.

Extrema kannst du mit deinem Taschenrechner über `2nd→ TRACE (CALC)→3: minimum` bzw. `2nd→ TRACE (CALC)→4: maximum` bestimmen.

Somit ergibt sich das folgende Bild.



▶ **Wirkzeit des Medikaments**

Die Wirkung des Medikaments setzt dann ein, wenn die Menge im Blut die Grenze von 36 mg überschreitet und endet, wenn sie diese wieder unterschreitet.

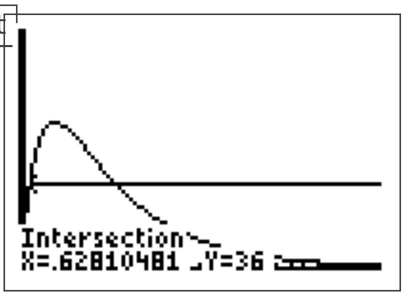
Diese Grenze kannst du als eine zur t-Achse parallele Gerade darstellen. Die Schnittpunkt dieser Gerade mit dem Graphen von f geben dann den Zeitraum an, in dem das Medikament wirkt.

Die Skalierung der y-Achse ist in Milligramm gegeben. Folglich lautet die Gleichung der Geraden wie folgt.

$h(t) = 36$

Suche nun die Schnittpunkte, um dann das Intervall zu erhalten, in dem das Medikament wirkt.

Über den Befehl `2nd→ TRACE (CALC)→ 5: intersect` kannst du die Schnittpunkte bestimmen. Das Bild auf deinem GTR zeigt dir, dass es zwei Schnittpunkte geben muss. Berechne diese mit dem oben genannten Befehl.



Somit ergeben sich die Schnittstellen mit $t_1 \approx 0,63$ und $t_2 \approx 6,30$. Dem zufolge wirkt das Medikament im Zeitraum $0,63 \leq x \leq 6,3$.

▸ Stärkste Ab- bzw. Zunahme bestimmen

Die stärkste Ab- bzw. Zunahme drückt sich darin aus, dass die Steigung des Graphen in diesem Punkt extremal wird.
Einen Punkt, der dieses Merkmal besitzt, bezeichnet man als Wendepunkt. Er hat die folgenden Bedingungen:

$f''(t) = 0$

$f'''(t) \neq 0$

Folglich musst du die Funktion f dreimal ableiten und dann die Bedingungen prüfen.

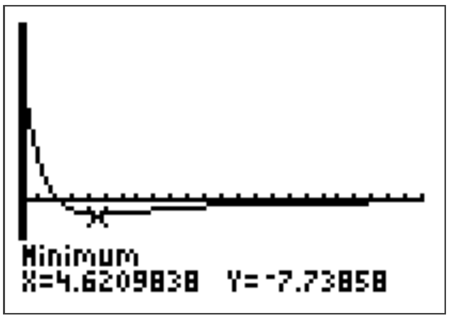
$f(t) = 130 \cdot (\mathrm{e}^{-0,2 \cdot t} - \mathrm{e}^{-0,8 \cdot t})$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,2 \cdot t} - \mathrm{e}^{-0,8 \cdot t}\right) + 130 \cdot \left(-0,2 \cdot \mathrm{e}^{-0,2 \cdot t} - \left(-0,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,8 \cdot t}\right)\right) \\ &= 130 \cdot \left(-0,2 \cdot \mathrm{e}^{-0,2 \cdot t} - \left(-0,8 \cdot \mathrm{e}^{-0,8 \cdot t}\right)\right) \end{aligned}$$

Da es sich bei einem Wendepunkt um ein Extremum der Ableitung handelt, kannst du mit deinem GTR nun die 1. Ableitung auf Extrema im betrachteten Bereich untersuchen. Beachte, dass du außerdem eine Randwertbetrachtung durchführen musst, wenn für $0 \leq t \leq 24$ gilt $f'(0) > f'(t)$ oder $f'(24) < f'(t)$

Zeichne dir zunächst die Funktion f' mit deinem GTR.

Über `2nd→ TRACE (CALC)→ 3: minimum` kannst du das Minimum der 1. Ableitung bestimmen, da hier die Ableitung den kleinsten Funktionswert hat. Nach einem Blick auf den Graphen von f', kannst du erkennen, dass der maximale Funktionswert bei $x = 0$ vorliegen muss. Bestimme den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ über `2nd→ TRACE (CALC)→ 1: value`



Somit ergeben sich die maximale Zunahme an der Stelle $t = 0$ und die maximale Abnahme an der Stelle $t \approx 4,62$.

▸ Durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut

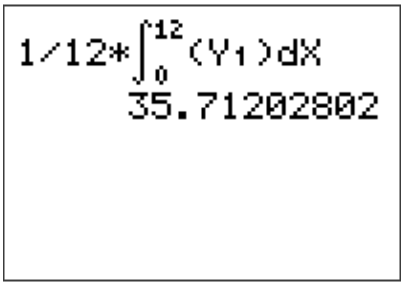
Den durchschnittlichen Funktionswert einer Funktion kannst du über folgende Formel bestimmen.

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a und b beschreiben die Grenzen, in denen du den durchschnittlichen Funktionswert bestimmen sollst.

Diese sollen in diesem Fall die Grenzen $a=t_0=0$ und $b=t_1=12$ sein, da gefragt wird, wie groß der Durchschnitt in den ersten 12 Stunden ist, also von 0 h bis 12 h.

Über `MATH→9: fnInt` kannst du das Integral berechnen lassen. Wenn die Funktion noch in deinem Funktionseditor eingetragen ist, kannst du über `VARS→Y-VARS→1: function` deine Funktion aufrufen und musst sie nicht ein weiteres Mal eingeben.



Somit ergibt sich ein durchschnittlicher Funktionswert und somit eine durchschnittliche Menge an Medikamenten im Blut von 35,71 mg.

b) ► **Langfristige Wirkstoffmenge im Blut bestimmen** (7 VP)

Die langfristige Wirkstoffmenge im Blut wird beschrieben durch den Grenzwert der Funktion g mit $x\to\infty$.

Es gilt für $\mathrm{e}^{-a\cdot x}$ mit $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-a\cdot x}=0$$

Dies ist im negativen Exponenten der e-Funktion begründet, der den Term mit wachsenden x-Werten schrumpfen lässt.

Bestimme aus dieser Vorgabe den Grenzwert von g mit $x\to\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}g(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(80\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0{,}05\cdot t}\right)\right)\\ &= 80\cdot(1-0)\\ &= 80\cdot 1\\ &= 80\end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine langfristige Wirkstoffmenge im Blut von 80 mg.

► **Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge begründen**

Eine ständige Zunahme der Wirkstoffmenge drückt sich durch ein dauerhaftes Anwachsen des Funktionswerts von g mit wachsenden t-Werten aus.

Als Bedingung hierfür gilt, dass die Steigung des Graphen von g dauerhaft positiv sein muss, da diese das Anwachsen der Funktionswerte bedingt.

Folglich muss gelten:

$g'(t)>t\,;\qquad$ für $t\geq 0$

Leite daher zunächst die Funktion g ab.

$g(t) = 80 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,05 \cdot t}\right)$

$g'(t) = 80 \cdot \left(0,05 \cdot \mathrm{e}^{-0,05 \cdot t}\right)$

Somit ergibt sich die Ableitungsfunktion g' der Funktion g mit

$g'(t) = 80 \cdot \left(0,05 \cdot \mathrm{e}^{-0,05 \cdot t}\right)$

Es gilt

$80 > 0;\ 0,05 > 0;\ \mathrm{e}^{-0,05 \cdot t} > 0; \qquad t \geq 0$

Somit ergibt sich, dass alle Faktoren, aus denen sich der Funktionsterm von g' zusammensetzt, größer als 0 sind, sodass auch der Funktionswert der Ableitung für $t \geq 0$ größer als Null ist.

▶ Zeitpunkt bestimmen

Die momentane Änderungsrate wird wieder beschrieben durch die erste Ableitung der Funktion g, die du bereits oben bestimmt hast.
Sie hat die Form

$g'(t) = 80 \cdot \left(0,05 \cdot \mathrm{e}^{-0,05 \cdot t}\right)$

Um den Zeitpunkt zu bestimmen, an der die momentane Änderungsrate von g genau $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt, musst du prüfen, wann gilt

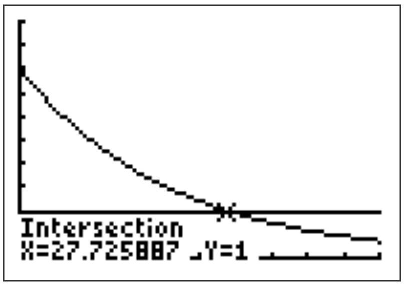
$g'(t) = 1$

Lasse dir dazu eine Gerade mit dem Term

$s: y = 1$

sowie den Graphen der Ableitungsfunktion g' von deinem GTR zeichnen. Der Schnittpunkt der Geraden und dem Graphen von g' beschreibt dann den gesuchten Zeitpunkt.

Passe das Fenster so an, dass du beide Graphen gut erkennen kannst. Über `2nd→ TRACE (CALC)→ 5: intersect` kannst du dann den Schnittpunkt der beiden Graphen wie im nebenstehenden Bild bestimmen.



Somit ergibt sich, dass die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t \approx 27,73$ genau $1\,\frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt.

▶ Zeitraum der Änderung um 30 mg bestimmen

Die Aufgabe gibt dir vor, dass sich in einem bestimmten Zeitraum, der sich über 15 min erstreckt, die Wirkstoffmenge um 30 mg ändert.

Da die Skalierung der Zeitachse in Minuten eingeteilt ist, muss somit gelten

$g(t+15)-g(t)=30$

Durch diesen Term bestimmst du den Zeitpunkt, der zu dem Funktionsterm, der 15 Minuten später liegt eine Differenz von genau 30 aufweist.

Es ergibt sich die folgende Gleichung, die du nun nach t auflösen sollst.

$$\begin{aligned}
g(t+15)-g(t) &= 30 \\
80\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0,05\cdot(t+15)}\right)-80\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\right) &= 30 \\
80\cdot\left(\left(1-\mathrm{e}^{-0,05\cdot(t+15)}\right)-\left(1-\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\right)\right) &= 30 \\
80\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\cdot\mathrm{e}^{-0,05\cdot 15}-1+\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\right) &= 30 \\
80\cdot\left(-\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\cdot\mathrm{e}^{-0,05\cdot 15}+\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\right) &= 30 \\
80\cdot\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\cdot\left(-\cdot\mathrm{e}^{-0,05\cdot 15}+1\right) &= 30 \\
80\cdot\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\cdot 0,53 &= 30 && |:80 \quad |:0,53 \\
\mathrm{e}^{-0,05\cdot t} &= 0,71 && |\ \ln \\
\ln\left(\mathrm{e}^{-0,05\cdot t}\right) &= -0,34 \\
-0,05\cdot t\cdot\ln(\mathrm{e}) &= -0,34 && |:(-0,05) \\
t &= 6,80
\end{aligned}$$

Somit ändert sich im Zeitraum $6,80\leq t\leq(6,80+15)$ oder zusammengefasst $6,80\leq t\leq 21,80$ die Wirkstoffmenge im Blut um genau 30 mg.

c) ▶ **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums angeben** (4 VP)

Allgemein lautet die Formel zur Beschreibung der Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums wie folgt.

$g'(t)=k\cdot(S-g(t))$

Allgemein lautet die Funktionsgleichung der Funktion g, die ein beschränktes Wachstum darstellt

$g(x)=S\cdot(1-e^{-k\cdot t})$

Somit kannst du die Parameter S und k aus der Funktion g auslesen und in die Formel der Differenzialgleichung einsetzen.

Es ergeben sich die folgenden Parameter S und k, die die folgenden Werte besitzen.

$k=0,05;\qquad S=80$

Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich folgende Form.

$g'(t)=0,05\cdot(80-g(t))$

▶ **Konstante Zufuhr bestimmen**

Die konstante Zufuhr erhältst du über die Differenzialgleichung.
Multipliziere diese aus, um die konstante Zufuhr zu erhalten.

Die konstante Zufuhr wird in diesem Fall über $k \cdot S$ beschrieben.

Multipliziere die Differenzialgleichung nun aus.

$g'(t) = 0,05 \cdot (80 - g(t)) = 0,05 \cdot 80 - 0,05 \cdot g(t) = 4 - 0,05 \cdot g(t)$

Somit ergibt sich eine konstante Zufuhr von $4\,\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}$.

▶ Wirkstoffmenge pro Minute bestimmen

Nun ist dir gegeben, dass die Wirkstoffmenge im Blut sich langfristig auf 90 mg belaufen soll.
Folglich ändert sich die Grenze, der sich die Funktion g annähert. Es gilt $S_1 = 90$.

Aus dieser Bedingung kannst du die oben erstellte Differenzialgleichung anpassen, die dann wie folgt lautet.

$g_1'(t) = k \cdot (S_1 - g(t)) = 0,05 \cdot (90 - g(t))$

Aus dieser kannst du wieder die konstant zugeführte Menge an Wirkstoff bestimmen.

$g_1'(t) = 0,05 \cdot (90 - g(t)) = 0,05 \cdot 90 - 0,05 \cdot g(t) = 4,5 - 0,05 \cdot g(t)$

Somit ergibt sich, dass konstant eine Menge von 4,5 mg pro Minute zugeführt werden müsste, um langfristig 90 mg des Wirkstoffs im Blut zu erhalten.

Wahlteil II Aufgabe II 1

a) ▶ **Koordinatengleichung von *E*** (4P)

Eine Ebene ist durch drei Punkte, in diesem Fall A, B und P eindeutig bestimmt. Die Koordinatengleichung einer Ebene hat allgemein die Form

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$, wobei

- n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten des Normalenvektors und
- d ein konstanter Parameter der Gleichung ist.

1. Schritt: Normalenvektor von *E*

Du kannst nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E bestimmen, indem du das Kreuzprodukt zweier Vektoren bildest, die in der Ebene E liegen, etwa $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$. Für $\overrightarrow{n}$ folgt daraus:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$.

Den Parameter d kannst du anschließend durch eine Punktprobe mit einem Punkt der Ebene, etwa A, berechnen. Dazu setzt du die Koordinaten von A für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung ein und löst nach d auf.

Bilde zunächst die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$. Sie stellen jeweils Verbindungsvektoren der zugehörigen Punkte A und B beziehungsweise P dar. Die Koordinaten der Vektoren erhältst du daher durch die Differenz der Ortsvektoren der Punkte:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 3-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-1 \\ 2,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt der beiden Verbindungsvektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf beide steht, er ist damit der Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2,5 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2,5 \\ -2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die vorläufige Koordinatengleichung lautet damit:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$.

2. Schritt: *d* bestimmen

Nun kannst du durch eine Punktprobe mit $A(6\,|\,1\,|\,0)$ den Wert für d ermitteln:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= d \\ 6 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 &= 6 \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung von E lautet damit:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8.$

▸ Darstellung der Ebene E im Koordinatensystem

Eine Ebene kannst anhand der Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen - den so genannten Spurpunkten - darstellen. Gibt es für bestimmte Achsen keine Spurpunkte, so handelt es sich um Parallelen zu diesen Achsen und den Ebenen, die sie gemeinsam bilden.

Die Spurpunkte sind Punkte, für die zwei Koordinaten den Wert Null annehmen und nur die Koordinate einen Wert ungleich Null hat, auf der der Spurpunkt liegt, die drei möglichen Spurpunkte haben daher allgemein die Koordinaten:

$S_1(x_1\,|\,0\,|\,0), \quad S_2(0\,|\,x_2\,|\,0) \quad \text{und} \quad S_3(0\,|\,0\,|\,x_3).$

Du kannst also, um etwa den Spurpunkt S_1 auf der x_1-Achse zu erhalten, die x_2- und x_3-Koordinate in der Koordinatengleichung Null setzen und das Ergebnis nach x_1 auflösen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 &= 8 \\ x_1 &= 8 \end{aligned}$$

Der Spurpunkt S_1 hat damit die Koordinaten:

$S_1(8\,|\,0\,|\,0).$

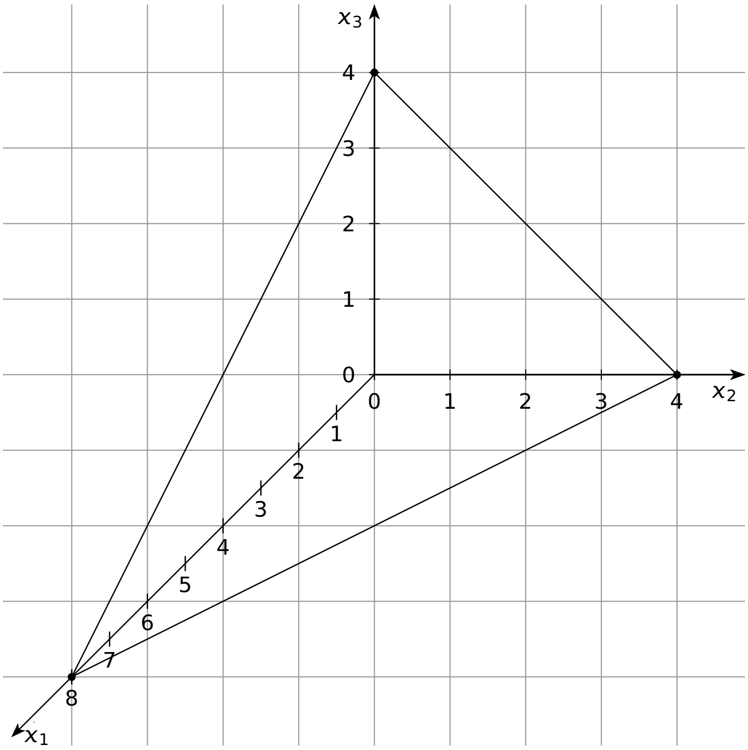
Verfahre analog mit S_2 und S_3:

$$\begin{aligned} 0 + 2x_2 + 2\cdot 0 &= 8 \\ 2x_2 &= 8 \qquad |:2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 0 + 2\cdot 0 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_3 &= 8 \qquad |:2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Die beiden anderen Spurpunkte haben also die Koordinaten:

$S_2(0\,|\,4\,|\,0) \quad \text{und} \quad S_3(0\,|\,0\,|\,4).$

Zeichne nun diese drei Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem und verbinde sie zu einem Dreieck. Das Dreieck stellt dann die gesuchte Ebene dar:



▸ Schnittwinkel von E mit der x_1-Achse

Die x_1-Achse kann als Gerade behandelt werden. Der Winkel, der zwischen Ebene und einer Geraden eingeschlossen ist, wird über den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und den Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden mit der Formel:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}.$$

Der Normalenvektor der Ebene E ist bekannt und hat die Koordinaten

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden, die identisch mit der x_1-Achse ist, hat die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. Der Betrag der x_1-Koordinate ist dann beliebig, da sich der Vektor dann skalieren lässt. Wir können die x_1-Koordinate daher mit $x_1 = 1$ wählen. Für $\overrightarrow{v}$ folgt daraus:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze die beiden Vektoren nun in die Formel für den Schnittwinkel ein und bestimme α:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot1+2\cdot0+2\cdot0}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{3\cdot1}.$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{3}$$

Mit dem arcsin kannst du nun α bestimmen. Nutze dazu die Befehlsfolge $\boxed{\text{2ND} \to \sin}$:

$$\Longrightarrow \alpha \approx 19{,}4712^\circ.$$

b) ▸ **Nachweis, dass das Dreieck $\triangle ABP$ gleichschenklig ist** (6P)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind. Die Seitenlängen von $\triangle ABD$ kannst du über die Länge der Verbindungsvektoren, also von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ der einzelnen Seiten berechnen.

Die Länge von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$ sind bekannt und haben die Koordinaten

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Den Verbindungsvektor $\overrightarrow{BP}$ kannst du über die Differenz der Koordinaten der Endpunkte bestimmen:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}3-2\\0-3\\2{,}5-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Die Länge l eines Vektors

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras zu:

$$l = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}.$$

Berechne auf diese Weise die Seitenlängen des Dreiecks:

$$l_{AB} = \sqrt{(-4)^2+2^2+0^2} = \sqrt{20}$$

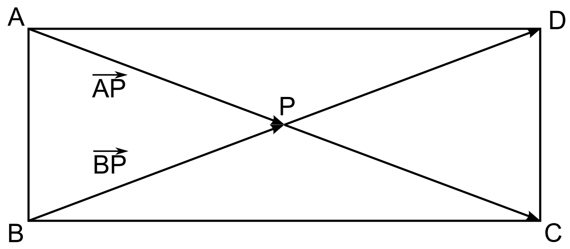
$$l_{AP} = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

$$l_{BP} = \sqrt{1^2+(-3)^2+2{,}5^2} = \sqrt{16{,}25}$$

Die Seiten AP und BP sind gleich lang, damit ist gezeigt: Das Dreieck $\triangle ABP$ ist gleichschenklig.

▶ Koordinaten von *C* und *D*

Gesucht sind die Koordinaten der Eckpunkte C und D des Rechtecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt in P. Um sich eine Vorstellung eines solchen Dreiecks zu machen, ist eine Skizze sinnvoll:



Du kannst erkennen, dass sich die Punkte C und D auf den Geraden durch AP und BP befinden und zwar so, dass man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ einmal an P setzen muss beziehungsweise den Vektor $\overrightarrow{BP}$ einmal an P.

Für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OD}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt daher:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP}$ und

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP}$.

Setze die Koordinaten der Vektoren ein und bestimme die gesuchten Punkte:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

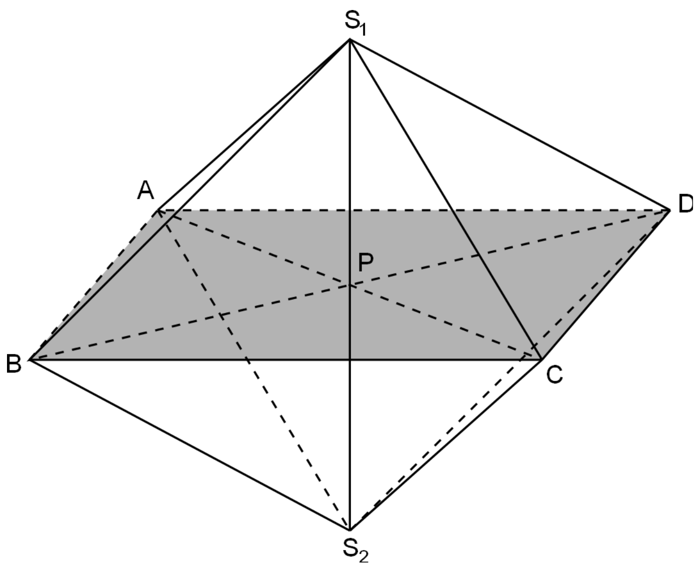
Die Koordinaten von C und D lauten damit:

$C(0\,|\,-1\,|\,5)$ und $D(4\,|\,-3\,|\,5)$.

▶ Koordinaten der Pyramidenspitzen

Bei einer senkrechten Pyramide befindet sich ihre Spitze senkrecht zur rechteckigen Grundfläche über dem Schnittpunkt der Diagonalen P. In unserem Fall ist der Abstand der Spitze zur Grundfläche in P gleich 12 LE. Es gibt genau zwei Punkte, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ in 12 LE Abstand über P liegen, da man von der Ebene in zwei Richtungen senkrecht gehen kann.

Eine Skizze verdeutlicht die Situation:



Um die Koordinaten der Spitzen S_1 und S_2 zu ermitteln, müssen wir einen Geraden durch P legen, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ steht. Der Stützvektor dieser Geraden g ist dann $\overrightarrow{OP}$ und der Richtungsvektor ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene, in der $ABCD$ liegt:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{n}.$$

Um auf dieser Geraden zu den Spitzen zu gelangen, muss der Richtungsvektor so skaliert werden, dass er genau 1 LE lang ist. Setzt man dann $r = 12$, geht man von P aus 12 LE senkrecht zur Grundfläche zur Spitze S_1. Setzt man $r = -12$, geht man ebenso senkrecht weg, nur in umgekehrer Richtung, so gelangt man zu S_2.

Wir kommen also in zwei Schritten zum Ziel:

1. $\overrightarrow{n}$ auf 1 LE skalieren.
2. Über die Gerade g mit $r = \pm 12$ zu den Schnittpunkten gelangen.

Der Normalenvektor steht senkrecht auf die Grundflächenebene, diese entspricht der zuvor bestimmten Ebene E:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Um diesen Vektor nun auf 1 LE zu skalieren, verlängern wir den Vektor um den Faktor a:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Vektors soll nun gleich 1 LE sein. Diese Länge lässt sich mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$$l = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2}.$$

Nun ist $l = 1$. Setze ein und löse nach a auf:

$$\begin{aligned}1 &= \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2}\\ 1 &= \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2}\\ 1 &= \sqrt{9a^2}\\ 1 &= 3a\\ \boldsymbol{a} &= \mathbf{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Mit dem resultierenden Wert von a besitzt der Normalenvektor nun die Länge 1 LE:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für die Geradengleichung von g folgt hieraus:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Wähle nun $r = \pm 12$ und ermittle die Ortsvektoren der Spitzen S_1 und S_2:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 0+8 \\ 2,5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10,5 \end{pmatrix}.$$

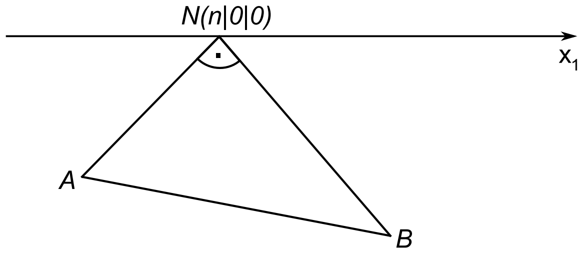
$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 0-8 \\ 2,5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5,5 \end{pmatrix}.$$

Die Spitzen der Pyramiden haben die Koordinaten

$S_1(7\,|\,8\,|\,10,5)$ und $S_2(-1\,|\,-8\,|\,-5,5)$.

c) ▸ **Punkte auf der x_1-Achse, die ein rechtwinkliges Dreieck mit A und B bilden** (3P)

Die Punkte A und B sollen mit bestimmten Punkten auf der x_1-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB bilden. Der rechte Winkel des Dreiecks liegt daher im Punkt N auf der x_1-Achse. Wegen seiner Lage auf der Koordinatenachse hat N die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. An dieser Stelle ist eine Skizze sinnvoll:



Nun wissen wir, dass wegen des rechten Winkels das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AN}$ und $\overrightarrow{BN}$ Null werden muss. Es gilt also:

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0.$

Die einzige Variable in der resultierenden Gleichung ist dann die x_1-Koordinate n von N, nach der die Gleichung aufgelöst werden kann.

Bestimme hierzu zunächst die Koordinaten der beiden Verbidnungsvektoren über die Differenz der Endpunkte:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze die Ergebnisse in das Skalarprodukt ein und löse die resultierende Gleichung nach n auf:

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$$

$$\begin{pmatrix} n-6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(n-6)\cdot(n-2)+(-1)\cdot(-3)+0\cdot 0 = 0$$

$$n^2-8n+12+3+0 = 0$$

$$n^2-8n+15 = 0$$

Löse mit der *abc*-Formel:

$$n_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 15}}{2\cdot 1}$$

$$n_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$n_1 = \frac{8+2}{2} = 5$$

$$n_2 = \frac{8-2}{2} = 3$$

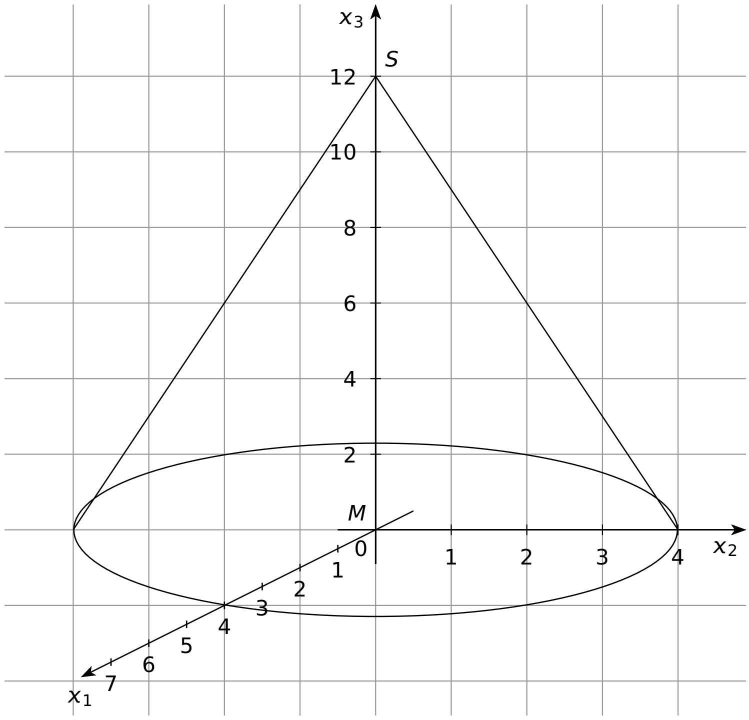
Es ergeben sich zwei Lösungen für n, das heißt es gibt zwei mögliche rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse AB, bei denen der dritte Punkt auf der x_1-Achse liegt.

Die Koordinaten der gesuchten Punkte lauten damit:

$N_1(5\,|\,0\,|\,0)$ und $N_2(3\,|\,0\,|\,0)$.

d) ▸ **Prüfung, ob der Punkt *R* sich innerhalb des Kegels befindet** (3P)

Es soll untersucht werden, ob der Punkt R innerhalb des beschriebenen Kegels liegt. Der Kegel hat den Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0\;0)$, er liegt also im Ursprung und seine Spitze befindet sich in $S(0\,|\,0\,|\,12)$, die Höhe des Kegels liegt also auf der x_3-Achse. Zur besseren Vorstellung ist an dieser Stelle eine Skizze eines solchen Kegels mit Grundkreisradius 4 LE sinnvoll:



Es soll nun untersucht werden, ob der Punkt $R(2|2|3)$ sich innerhalb oder außerhalb des Kegels befindet. In der Grundfläche des Kegels befinden sich alle Punkte innerhalb des Kegels, die innerhalb der x_1x_2-Ebene liegen und einen Abstand zur x_3-Achse in M kleiner oder gleich 4 haben, die sich also auf einer Kreisfläche rund um den Mittelpunkt bewegen.

Ein Punkt, der oberhalb der x_1x_2-Ebene liegt, befindet sich daher dann im Kegel, wenn sein Abstand zur x_3-Achse kleiner oder gleich dem Radius ist, den der Kegelschnitt in dieser Höhe hat. R hat die x_3-Koordinate

$x_3 = 3.$

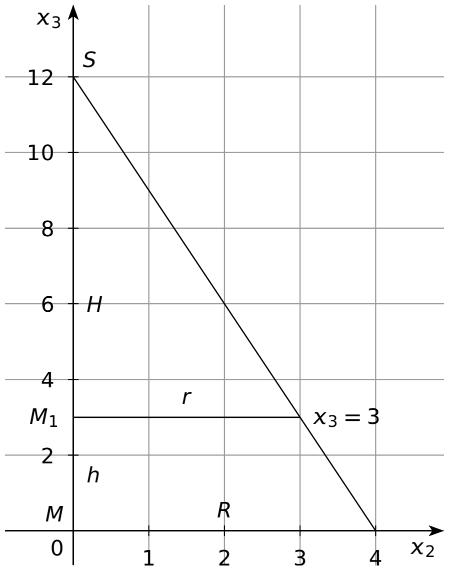
Wir müssen also den Radius r des Kegelschnitts bei $x_3 = 3$ ermitteln und dann prüfen, ob R einen Abstand zur x_3-Achse aufweist, der kleiner oder gleich r ist. Diesen kannst mithilfe des Strahlensatzes bestimmen.

Wir kommen damit in zwei Schritten zum Ziel:

1. Radius r des Kegelschnitts berechnen.
2. Abstand d von R zur x_3-Achse berechnen und mit r vergleichen.

1. Schritt: Radius des Kegelschnitts

Die Projektion einer Kegelhälfte auf die x_2x_3-Achse ergibt ein rechtwinkliges Dreieck. Der Kegelschnitt bei $x_3 = 3$ ist dann die Strecke, die die Projektion parallel zur Grundseite schneidet:



Aus dem Strahlensatz folgt hier:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r}.$$

Aufgelöst nach dem gesuchten r ergibt sich:

$$r = \frac{R}{H} \cdot h.$$

Daraus folgt durch Einsetzen der gegebenen Werte für $R = 4$, $H = 12$ und $h = 3$:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{12}} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{3}.$$

2. Schritt: Abstand *d* von *R* zur x_3-Achse

Der Abstand von R zur x_3-Achse berechnet sich über den Abstand zu $M_1(0\,|\,0\,|\,3)$. Die Koordinaten des Verbindungsvektors ergeben sich zu:

$$\overrightarrow{RM_1} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Länge r des Vektors folgt:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\mathbf{2} \approx 2,8284.$$

Der Abstand des Punktes R von der x_3-Achse ist kleiner als der Radius r des Kegelschnitts in der Höhe $x_3 = 3$. Damit befindet sich R im Kegel.

Aufgabe II 2

a) **▶ Bewegung in einer Minute bestimmen** (4 VP)

Die gegebene Gerade sei die Bewegungsrichtung von U_1, in Abhängigkeit vom Zeitfaktor t, der in Minuten skaliert sein soll.

Das U-Boot bewegt sich in einer Minute genau einmal den Richtungsvektor der Geraden vorwärts.

Bestimme nun die zurückgelegte Strecke in einer Minute über die Länge des Richtungsvektors.

$$d = \left|\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \sqrt{12600} \approx 112,25$$

Somit legt das U-Boot U_1 in einer Minute ca. $112,25\,\text{m}$ zurück.

▶ Merkmal, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche entfernt

Der Richtungsvektor gibt immer seinem Namen entsprechend die Richtung einer Gerade und in diesem Fall somit auch die Richtung des U-Boots U_1 an.

Die Meeresoberfläche soll laut der Aufgabenstellung durch die x_1x_2-Ebene dargestellt sein, sodass sich das U-Boot dann davon entfernt, wenn gilt $x_3 \leq 0$.

Betrachte dazu den Richtungsvektor der Geraden.

Du kannst erkennen, dass gilt $x_3 \leq 0$ und außerdem die x_3-Koordinate ein negatives Vorzeichen besitzt.

Folglich bewegt sich das U-Boot in negativer x_3-Richtung, sodass es immer weiter abtaucht.

▶ Winkel zwischen der Meeresoberfläche und der Route von U_1

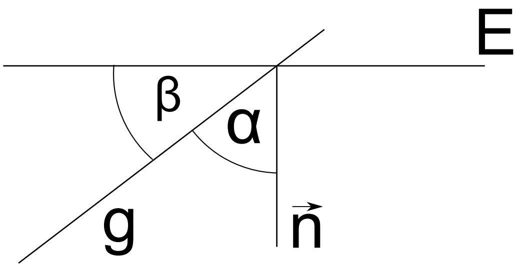
▶▶ Lösungsweg A: Winkel zwischen Normalenvektor und Richtungsvektor

Die Meeresoberfläche wird hier durch die x_1x_2-Ebene dargestellt.

Diese hat die Koordinatenform $x_3 = 0$ und den folgenden Normalenvektor.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene kannst du wie folgende Skizze zeigt bestimmen.



Der Winkel β ist der Winkel, der von der Meeresoberfläche und der Route von U_1 eingeschlossen wird.

Den Winkel α kannst du mittels des Normalenvektors der Ebene $x_3 = 0$ und dem Richtungsvektor der Geraden bestimmen, sodass gilt

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Berechne den Winkel α wie folgt.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{|0 \cdot (-60) + 0 \cdot (-90) + 1 \cdot (-30)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2}} \\ &= \frac{30}{\sqrt{12600}} \\ &= \frac{30}{112,25} \end{aligned}$$

$$\cos\alpha = \frac{30}{112,25} \Longrightarrow \alpha \approx 74,5^\circ$$

Nach $\beta = 90^\circ - \alpha$ ergibt sich somit folgender Term zur Berechnung von β

$$\beta = 90^\circ - 74,5 = 15,5^\circ$$

Somit bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche einen Winkel $\beta = 15,5^\circ$.

►► Lösungsweg B: Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene kannst du über folgende Formel bestimmen.

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

Der Vektor $\overrightarrow{n}$ beschreibt den Normalenvektor der Ebene E und $\overrightarrow{v}$ sei der Richtungsvektor von g.

Die Meeresoberfläche hat die Koordinatenform $x_3 = 0$. Daher hat sie den folgenden Normalenvektor.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme den Winkel wie folgt.

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{|0\cdot(-60)+0\cdot(-90)+1\cdot(-30)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-60)^2+(-90)^2+(-30)^2}}\\ &= \frac{30}{\sqrt{12600}}\\ &= \frac{30}{112,25}\end{aligned}$$

$\alpha = 15,5^\circ$

Somit schließen die Meeresoberfläche und die Route von U_1 einen Winkel α mit $\alpha = 15,5^\circ$ ein.

b) ▶ **Geschwindigkeit von U_2 bestimmen** (4 VP)

Nun sind dir der Ausgangspunkt von U_2 sowie der Punkt, an dem sich das Boots nach 3 Minuten befindet gegeben.
Folglich beschreibt der Abstand dieser zwei Punkte die Strecke, die das U-Boot in 3 Minuten zurückgelegt hat.

Um die Geschwindigkeit des Bootes zu bestimmen, musst du den Vektor, den die 2 Punkte aufspannen, aufstellen. Berechne dann dessen Länge berechnen und teile diese durch 3, damit du die Strecke erhältst, die das Boot nach einer Minute zurückgelegt hat.

Allgemein bestimmst du Vektoren über die folgende Formel:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Setze die Punkte ein bestimme dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -202 \\ -405 \\ -248 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix}$$

Berechne nun die Länge des Vektors. Der Betrag eines Vektors beschreibt auch immer seine Länge.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-270)^2+(-540)^2+(-180)^2} = \sqrt{396900} = 630$$

Teile diesen Wert nun durch 3, um den zurückgelegten Weg nach einer Minute zu bestimmen.

$$v = \frac{630}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 210\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Somit hat das U-Boot U_2 eine Geschwindigkeit von $210\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ **Begründung, dass die Gerade die Bewegung von U_2 beschreibt**

Um zu begründen, dass eine Gerade die Bewegung des U-Boots beschreibt, wirf zunächst einen Blick auf den Aufbau der Geraden, die dir für die Bewegung von U_1 gegeben ist.

Betrachte, was ihr Richtungsvektor beschreibt und welche Relevanz der Stützvektor besitzt.

Der Stützvektor einer Geraden beschreibt immer den Punkt, für den gilt $t = 0$. Somit ist dies der Ausgangspunkt des U-Boots zum Zeitpunkt $t = 0$.

Der Ausgangspunkt von U_2 ist dir gegeben in Form des Punktes A, der die Koordinaten $A(68\,|\,135\,|\,-68)$ besitzt.
Betrachtest du die Koordinaten des Stützvektors, so siehst du, dass es sich dabei um den Vektor $\overrightarrow{OA}$ handelt.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Ausgangspunkt für U_2 und somit der Stützvektor der Gerade, die die Bewegung von U_2 beschreibt begründet.

Nun musst du noch den Richtungsvektor begründen.
Der Richtungsvektor der Geraden, die die Bewegung von U_1 beschreibt, stellt die Bewegung innerhalb von einer Minute dar.
Im vorherigen Aufgabenteil hast du den Vektor bestimmt, der die Bewegung von U_2 in 3 min beschreibt.

Bestimme daraus den Vektor, der die Bewegung von U_2 in einer Minute beschreibt.

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist identisch mit dem Richtungsvektor der Geraden, sodass Stütz- und Richtungsvektor begründet sind.

▶ Zeitpunkt gleicher Tiefe feststellen

Die Tiefe, in der sich die U-Boote befinden, wird durch die x_3-Koordinate beschrieben.
Folglich muss diese gleich sein, damit sich die U-Boote zu einem Zeitpunkt t in der selben Tiefe befinden.

Setze daher die x_3-Koordinate der Geraden gleich und löse nach t auf.

Die Geradengleichung kannst du in x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten aufspalten, die jeweils durch die einzelnen Zeilen definiert sind. Daraus ergeben sich folgende Zeilen der Gerade, die die Bewegung von U_1 beschreibt.

1. $140 - 60 \cdot t$
2. $105 - 90 \cdot t$
3. $-170 - 30 \cdot t$

Selbiges gilt für die Gerade, die die Bewegung von U_2 darstellt.

1. $68 - 90 \cdot t$
2. $135 - 180 \cdot t$
3. $-68 - 60 \cdot t$

Die 3. Zeile einer Geraden beschreibt die x_3-Koordinate eines jeden Punktes auf der Geraden und somit dessen Tiefe.
Somit müssen diese identisch sein. Setze die 3. Zeile der beiden Geraden nun gleich.

$$\begin{aligned} -170 - 30 \cdot t &= -68 - 60 \cdot t && \mid +68 \quad \mid +30 \cdot t \\ -102 &= -30 \cdot t && \mid :(-30) \\ -102 &= -30 \cdot t && \mid :(-30) \\ t &= 3,4 \end{aligned}$$

Somit befinden sich die U-Boote nach 3,4 min in der selben Tiefe.

c) ▶ **Abstand der U-Boote bei Beobachtungsbeginn** (4 VP)

Die beiden U-Boote werden bei Beobachtungsbeginn durch je einen Punkt dargestellt.
Den Abstand zweier Punkte kannst du über folgende Formel bestimmen.

$$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Bei Beobachtungsbeginn gilt $t = 0$, da genau in diesem Moment die Beobachtung starten soll.

Den Ausgangspunkt von U_2 hast du bereits mit den Koordinaten $A(68 \mid 135 \mid -68)$ gegeben.

Setze nun t mit $t = 0$ in die Geradengleichung der Gerade, die die Bewegung von U_1 beschreibt ein, um die Ausgangsposition von U_1 zu bestimmen.

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich der Ausgangspunkt X des Bootes U_1 mit den Koordinaten $X(140 \mid 105 \mid -170)$.

Berechne nun nach oben stehender Formel den Abstand von X und A.

$$\begin{aligned} d(A,X) &= \sqrt{(68-140)^2+(135-105)^2+(-68-(-170))^2} \\ &= \sqrt{(-72)^2+(30)^2+(102)^2} \\ &= \sqrt{16488} \approx 128,41 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich ein Abstand der beiden U-Boote zum Zeitpunkt $t = 0$ mit ca. 128,41 m

▸ Einhaltung des Mindestabstands prüfen

Die Aufgabe gibt vor, dass sich die U-Boote niemals näher als 100 m an einander annähern dürfen.
Beachte hier, dass die Geraden zwar die Bahnen beschreiben, allerdings nicht die Position der U-Boote zu einander. Daher musst du bestimmen, ob der Minestabstand zwischen den U-Booten und nicht den Geraden eingehalten wird.

Betrachte dazu die U-Boote als variable Punkte auf den Geraden, die dann die folgenden Koordinaten haben.

$U_1(140-60\cdot t \mid 105-90\cdot t \mid -170-30\cdot t)$

$U_2(68-90\cdot t \mid 135-180\cdot t \mid -68-60\cdot t)$

Deren Abstand kannst du wieder über folgende Formel bestimmen.

$d(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$

Setze die Koordinaten der beiden Punkte ein. Es ergibt sich die folgende Gleichung.

$d(U_1,U_2) = \sqrt{(140-60\cdot t-(68-90\cdot t))^2+(105-90\cdot t-(135-180\cdot t))^2+(-170-30\cdot t-(-68-60\cdot t))^2}$

Fasse diesen Term zunächst zusammen.

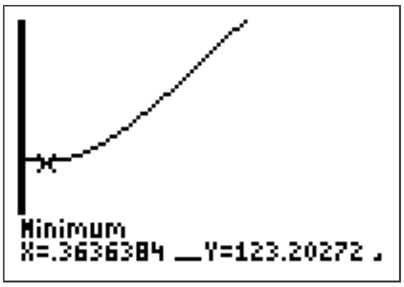
$$\begin{aligned} d(U_1,U_2) &= \sqrt{(140-60\cdot t-(68-90\cdot t))^2+(105-90\cdot t-(135-180\cdot t))^2+(-170-30\cdot t-(-68-60\cdot t))^2} \\ &= \sqrt{(140-60\cdot t-68+90\cdot t)^2+(105-90\cdot t-135+180\cdot t)^2+(-170-30\cdot t+68+60\cdot t)^2} \\ &= \sqrt{(72+30\cdot t)^2+(-30+90\cdot t)^2+(-102+30\cdot t)^2} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du als Funktion in Abhängigkeit von t aufstellen.

$d(t) = \sqrt{(72+30\cdot t)^2+(-30+90\cdot t)^2+(-102+30\cdot t)^2}$

Hier kannst du nun deinen GTR verwenden und diese Funktion auf Minima untersuchen, die den geringsten Abstand beschreiben. Passe deine Ansicht so an, dass du den Graphen erkennen kannst und untersuche diesen dann auf den geringsten Abstand wie folgt.

Prüfe die Funktion auf Minima, die dir den geringsten Abstand liefern. Minima kannst du über `2nd→ TRACE (CALC)→ 3: minimum` bestimmen. Die nebenstehende Ansicht hat die Einstellungen $x_{min} = 0$, $x_{max} = 5$, $y_{min} = 0$ und $y_{max} = 300$, damit auch der Graph der Funktion d erkannt werden kann.



Somit ergibt sich ein Minimum des Abstandes an der Stelle $x \approx 0,36$ mit dem Abstand $d(0,36) \approx 123,20$.

Da gilt $123,20 > 100$, wird somit der Mindestabstand zwischen den U-Booten immer eingehalten.