Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Ableitung bilden

Um die Ableitung zu bestimmen wird die Kettenregel angewandt.

$f(x) = (1+\sin(x))^2$

$f'(x) = 2\,(1+\sin(x))\cdot\cos(x)$

Die Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktionen wird nach folgender Regel durchgeführt:

$$\begin{tikzcd} & \sin(x)' \arrow[dr, bend left] & \\ -\cos(x)' \arrow[ur, bend left] & & \cos(x)' \arrow[dl, bend left] \\ & -\sin(x)' \arrow[ul, bend left] & \end{tikzcd}$$

Merkhilfe Trig-Kreis

Aus z.B. $\cos(x)$ wird demnach $-\sin(x)$. Dabei muss die innere Ableitung beachtet werden.

Aufgabe 2 (2VP)

Integral berechnen

Die Stammfunktion von e^x ist e^x. Allerdings muss bei e^{2x} die innere Funktion beachtet werden; die Stammfunktion hier würde $\frac{1}{2}e^{2x}$ lauten.

Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(2)} e^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln(2)} && |\text{ einsetzen}\\
&= \left(\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(2)}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right) && (e^{2\cdot\ln(2)}=(e^{\ln(2)})^2)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\ln(2)}\right)^2-\frac{1}{2}e^0\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} && (e^{\ln(2)}=2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3VP)

Gleichung lösen

Zunächst wird die Gleichung mit e^x multipliziert:

$$e^x-2-\frac{15}{e^x}=0 \quad |\cdot e^x$$

$e^{2x}-2e^x-15=0$

Nun wird e^x mit $e^x=z$ substituiert. Somit erhält man folgende Gleichung:

$z^2-2z-15=0$

$$z_{1/2}=1\pm\sqrt{1-(-15)}=1\pm 4$$

$$z_1=5;\quad z_2=-3$$

Zuvor wurde substituiert, demnach muss nun rücksubstituiert werden:

1. $e^x=z_1$

$e^x = 5 \quad | \ln$

$x = \ln(5)$

2. $e^x = z_2$

$e^x = -3 \quad | \ln$

keine Lösung

$x = \ln(5)$ ist die einzige Lösung. Daraus ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\ln 5\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

a) **Punkte mit waagrechter Tangente bestimmen**

Dazu muss der Punkt die Steigung 0 aufweisen. Hierfür wird die erste Ableitung benötigt, welche über die Quotientenregel berechnet wird:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Die erste Ableitung wird gleich Null gesetzt, um so die x-Werte zu erhalten, an denen die Steigung gleich Null ist.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{(Nenner kann vernachlässigt werden)}$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad | \; x \text{ ausklammern}$$

$$x(x+2) = 0$$

Die Gleichung ist Null wenn x oder $x+2$ gleich Null sind (Satz vom Nullprodukt).

Somit erhält man die Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Nun müssen noch die y-Werte bestimmt werden:

Mit $f(0) = 0$ und $f(-2) = -4$ erhält man die Punkte $S(0 \mid 0)$ und $T(-2 \mid -4)$.

b) **Normalengleichung ermitteln**

Für die Gleichung der Normalen wird die Steigung der Tangente im Punkt P benötigt. Die Steigung der Normalen entspricht dem negativen Kehrwert der Steigung der Tangenten.

$$m_t = f'(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$$

Daraus ergibt sich die Steigung der Normalen mit $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{4}{3}$.

Diese Steigung und die Werte des Punktes werden in die allgemeine Tangenten/Normalengleichung eingesetzt:

$$n\colon y = -\frac{1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$$ (allgemeine Normalengleichung)

$$= -\frac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)+f(1)$$ | berechnete Werte einsetzen

$$= -\frac{4}{3}\cdot(x-1)+\frac{1}{2}$$ | ausmultiplizieren und vereinfachen

$$n\colon y = -\frac{4}{3}x+\frac{11}{6}$$

Aufgabe 5 (5VP)

a) **Aussage über Monotonie**

Die Ableitungsfunktion gibt die Steigung an. Für $x \leq 3$ verläuft die Ableitungsfunktion oberhalb der x-Achse. Die Steigung von f ist demnach in diesem Bereich stets größer Null. Die Funktion ist monoton steigend.

Für $x > 3$ ist die Funktion streng monoton fallend.

Aussage über Extremstellen

An der Stelle $x = 3$ ist der Wert der Ableitung gleich Null, demnach besitzt f an dieser Stelle die Steigung Null. Vor der Stelle $x = 3$ steigt die Funktion, danach fällt diese. Somit liegt ein Extremwert vor.

An der Stelle $x = 0$ liegt keine Extremstelle vor, obwohl die Ableitungsfunktion gleich Null ist. An dieser Stelle liegt ein Sattelpunkt vor, da kein VZW stattfindet.

Aussage über Wendestellen

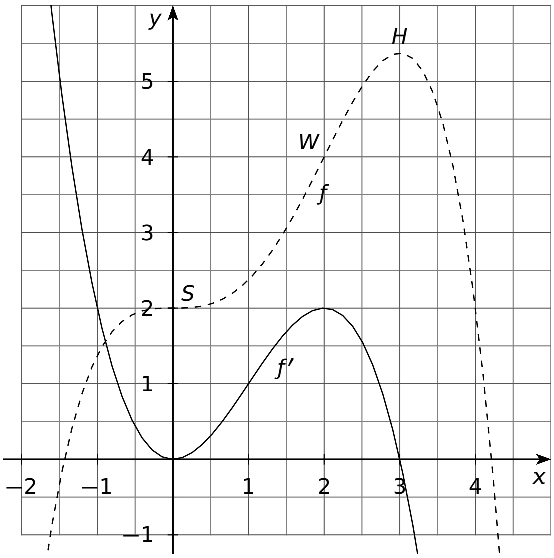
An den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ weißt f' Extremstellen auf. Somit liegen an diesen Stellen bei f Wendestellen vor.

b) **Skizze von f**

Für die Skizze werden folgende Hilfen verwendet:

An der Stelle $x = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor.

An der Stelle $x = 2$ liegt ein Wendepunkt mit der Steigung $f'(2) = 2$ sowie an der Stelle $x = 3$ ein Hochpunkt vor.



Aufgabe 6 (3VP)

LGS lösen

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 7 \\
\text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 14 \\
\text{III} & x_1 - 5x_2 - 4x_3 & = & -21 \\
\hline
\text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 7 \\
\text{IIa} & -7x_2 - 7x_3 & = & -35 \quad (\text{I} - 3\text{II}) \\
\text{IIIa} & 7x_2 + 7x_3 & = & 35 \quad (\text{I} - 3\text{III}) : 2 \\
\hline
\text{I} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 7 \\
\text{IIa} & -7x_2 - 7x_3 & = & -35 \\
\text{IIIb} & 0 & = & 0 \quad (\text{IIa} + \text{IIIa}) \\
\hline
\end{array}$$

Setz man $x_3 = s$, so folgt aus IIa:

$$\begin{aligned} -7x_2 - 7s &= -35 \quad | +7s \mid :(-7) \\ x_2 &= 5 - s \end{aligned}$$

x_2 und x_3 einsetzen in I:

$$\begin{aligned} 3x_1 - (5-s) + 2s &= 7 \quad | \text{ ausklammern und zusammenfassen} \\ 3x_1 - 5 + 3s &= 7 \quad | +5 \mid -3s \mid :3 \\ x_1 &= 4 - s \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{4-s; 5-s; s\}$

Geometrische Interpretation der Lösungsmenge

Jede Zeile (Gleichung) des LGS entspricht einer Ebenengleichung.

Die Lösungsmenge gibt gemeinsame Punkte an. In diesem Fall entspricht das der Schnittgeraden mit der Gleichung $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (4VP)

Parallelität zeigen

Liegen zwei Vektoren senkrecht zueinander, so ist deren Skalarprodukt gleich Null.

Damit die Ebenen parallel sind, muss der Normalenvektor der einen Ebene senkrecht zu beiden Richtungsvektoren der anderen Ebene sein. Dies wird mit Hilfe des Skalarprodukts gezeigt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0$$

Abstand bestimmen

Der Abstand der beiden Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes $P(1 \mid 1 \mid 0)$ der Ebene E zur Ebene F.

Dazu wird die Hessesche Normalenform von F benötigt:

$$HNF: \frac{\left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 0$$

Der Punkt P wird nun eingesetzt und der Abstand dadurch berechnet:

$$d(P;F) = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{3} = \frac{|-1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{3} = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 8 (3VP)

Mittelpunkt bestimmen

Die zur Ebene senkrecht durch den Punkt S verlaufende Gerade schneidet die Ebene im Mittelpunkt M des Grundkreises.

Diese Gerade besitzt als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene.

Nullstellen bestimmen

Der Radius entspricht dem Abstand des Punktes M zu P. Dieser Abstand wird über den Betrag des Verbindungsvektors berechnet ($r = \left|\overrightarrow{MP}\right|$).

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) **Bestimmung der beiden Parameter a und b** (7VP)

Zu beachten ist hier, dass die Kosten $f(x)$ in **10.000 EUR** angegeben werden.

Die beiden Parameter a und b lassen sich aus den gegebenen zwei Bedingungen berechnen.

Die fünfte Produktionseinheit soll 950.000 EUR kosten, daher ist $f(5)=95$:

$$f(5)=95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5a+b}{10}=95 \quad \Leftrightarrow \quad 5a+b=950 \;\; \text{(I)}$$

Die zwanzigste Produktionseinheit soll 560.000 EUR kosten, daher ist $f(20)=56$:

$$f(20)=56 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20a+b}{25}=56 \quad \Leftrightarrow \quad 20a+b=1400 \;\; \text{(II)}$$

Aus (I) folgt: $b=950-5a$, aus (II) folgt: $b=1400-20a$

Die Gleichungen werden gleichgesetzt und nach a aufgelöst:

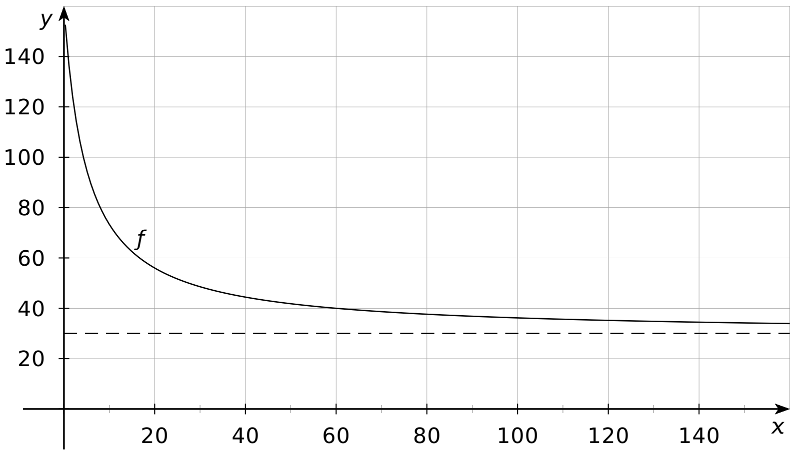
$$\begin{aligned} 950-5a &= 1400-20a \\ 15a &= 450 \\ a &= 30 \end{aligned}$$

Den Wert für a setzt man nun in eine der Ausgangsgleichungen ein um b zu berechnen.

$b=950-5\cdot 30=800$

Somit ergibt sich die Funktionsgleichung von f zu $f(x)=\dfrac{30x+800}{x+5}$.

Skizze des Schaubildes von f



Nachweis, dass die Herstellungskosten sinken

Wenn die Herstellungskosten fallen, bedeutet dies, dass f **streng monoton fallend** sein muss. Um dies zu überprüfen, wird zunächst die erste Ableitung von f nach der Quotientenregel gebildet. Es gilt damit für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{30\cdot(x+5)-(30x+800)\cdot 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{30x+150-30x-800}{(x+5)^2} \\ &= \frac{-650}{(x+5)^2} < 0 \end{aligned}$$

Da der Zähler stets negativ und der Nenner stets positiv ist, muss der gesamte Term stets **negativ** sein. Somit ist f für $x \geq 0$ streng monoton fallend, die Herstellungskosten sinken somit im Laufe der Zeit.

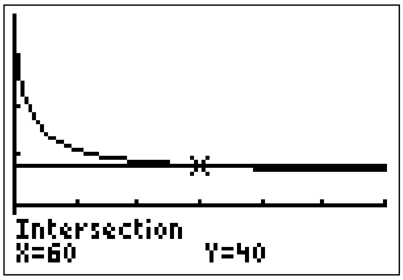
Bestimmung der ersten Produktionseinheit für unter 400.000 EUR

Da $f(x)$ in 10.000 EUR angegeben wird, muss hier $f(x) < 40$ gelten.

Die Funktion f ist streng monoton fallend, daher genügt es, den Zeitpunkt auszurechnen, an dem die Herstellungskosten genau 400.000 EUR betragen.

Die darauffolgende Produktionseinheit ist dann folglich die erste, die weniger als 400.000 EUR kostet.

Mit dem GTR lässt sich diese Stelle berechnen, indem f mit der Geraden $y = 40$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{5: intersect}}$ geschnitten wird. Es ergibt sich die Schnittstelle $x = 60$, die 60. Produktionseinheit kostet somit genau 400.000 EUR.
Somit ist die **61.** Produktionseinheit die erste, die weniger als 400.000 EUR kostet.



Handschriftliche Lösung

Auch ohne GTR lässt sich die Schnittstelle von Hand schnell berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 40 \\ \frac{30x+800}{x+5} &= 40 \qquad \mid \cdot (x+5) \\ 30x+800 &= 40(x+5) \\ 30x+800 &= 40x+200 \\ 10x &= 600 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Die 60. Produktionseinheit kosten genau 400.000 EUR. Die **61.** Produktionseinheit ist demnach die erste, welche weniger als 400.000 EUR kostet.

Bestimmung der langfristigen Herstellungskosten

Um die langfristigen Herstellungskosten zu berechnen, muss untersucht werden, gegen welchen Wert die Kosten $f(x)$ für sehr große x streben – wir bilden den Grenzwert von f für $x \to \infty$.

Da f eine gebrochenrationale Funktion mit Zählergrad = Nennergrad darstellt, ist die Grenzwertbildung sehr einfach:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{30x+800}{x+5} = 30.$$

Langfristig muss somit mit Herstellungskosten von 300.000 EUR pro Produktionseinheit gerechnet werden.

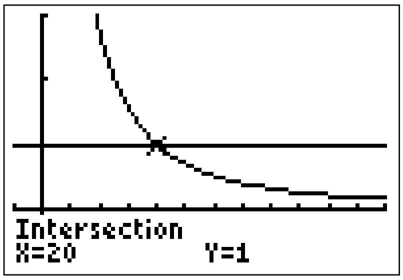
b) **Unterschied der Herstellungskosten von unter 10.000 EUR** (5VP)

Die Herstellungskosten zweier beliebiger aufeinander folgender Einheiten x und $x+1$ sind $f(x)$ bzw. $f(x+1)$. Für ihren Unterschied $d(x)$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - f(x+1) \\ &= \frac{30x+800}{x+5} - \frac{30(x+1)+800}{x+6} \end{aligned}$$

Es ist nun diejenige Stelle gesucht, ab der der Unterschied $d(x)$ kleiner als 10.000 EUR, also **kleiner als 1** ist.

Analog zu Teilaufgabe a) kann das Schaubild der Funktion d hier mit der Geraden $y = 1$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten werden. Es ergibt sich die Schnittstelle $x = 20$, somit beträgt der Unterschied der Herstellungskosten von der 20. auf die 21. Produktionseinheit **genau** 10.000 EUR.



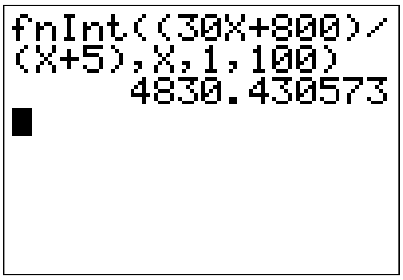
Demnach unterscheiden sich die Herstellungskosten zweier aufeinander folgender Einheiten ab der **21.** Einheit um weniger als 10.000 EUR.

Berechnung des Verkaufspreises für eine Packung

Es kann mithilfe eines **Integrals** zunächst der Preis für die Herstellung der **Gesamtkosten** der ersten 100 Produktionseinheiten berechnet werden.

Das Kostenintegral reicht hier von $x = 1$ (erste Verkaufseinheit) bis $x = 100$ und lässt sich mit dem GTR über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen. Es ergibt sich:

$$K = \int_1^{100} f(x)\,dx \approx 4.830$$



Die ersten 100 Einheiten kosteten somit etwa $4.830 \cdot 10.000 = 48.300.000$ EUR.

Eine Einheit wiederum besteht aus 10.000 Packungen, somit entspricht der obige Preis wiederum $100 \cdot 10.000 = 1.000.000$ Packungen. Der Herstellungspreis einer Packung beträgt somit

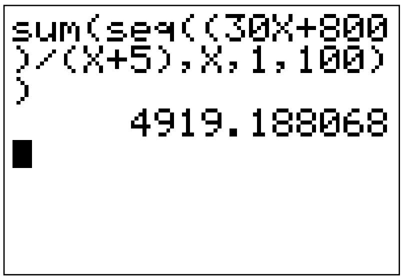
$$p = \frac{48.300.000}{1.000.000} = 48{,}30 \text{ EUR}.$$

Eine Packung muss für etwa 48,30 EUR verkauft werden, um die Herstellungskosten zu decken.

Alternativer Lösungsweg

Alternativ zum Integral können auch die einzelnen Funktionswerte von f von $x = 1$ bis $x = 100$ mit dem GTR aufsummiert werden.

Dazu wird über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{STAT (LIST)}}$ das LIST-Menü aufgerufen und dort über die Befehlsfolge $\boxed{\text{LIST} \rightarrow \text{MATH} \rightarrow \text{5: sum}}$ und dann $\boxed{\text{LIST} \rightarrow \text{OPS} \rightarrow \text{5: seq}}$ die Summe berechnet. Nebenstehend ist der genaue Befehl abgebildet.
Nach dieser Methode ergibt sich $K \approx 4.920$ und analog zu oben ein Verkaufspreis von etwa $49,20$ EUR pro Verpackung.



Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass nur **ganzzahlige** x-Werte von $x = 1$ bis $x = 100$ aufsummiert werden, was im Sachzusammenhang eigentlich realistischer ist.

c) **Bestimmung einer rekursiv definierten Folge** (6VP)

Die gesuchte Folge sei (u_n).

Die Wirkstoffmenge nach der n-ten Spritze ist u_n. Nach der n-ten Spritze befinden sich noch $100\% - 18\% = 82\%$ der **vorherigen** Wirkstoffmenge u_{n-1} im Blut (da diese bis zur Spritze um 18% abgenommen hat) sowie die neu hinzugespritzten 50 mg Wirkstoff. Für die Wirkstoffmenge u_n gilt damit:

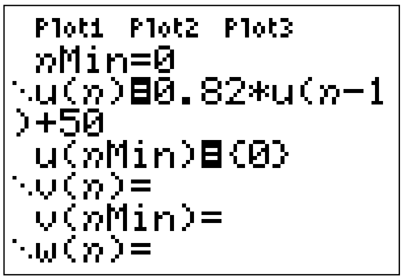
$$\begin{aligned} u_n &= (82\% \text{ der vorherigen Wirkstoffmenge}) + (50 \text{ mg neu}) \\ &= 0,82 \cdot u_{n-1} + 50 \end{aligned}$$

Zu Beginn befindet sich noch kein Wirkstoff im Blut, daher ist auch $u_0 = 0$.

Berechnung der Wirkstoffmenge nach der 5. Spritze

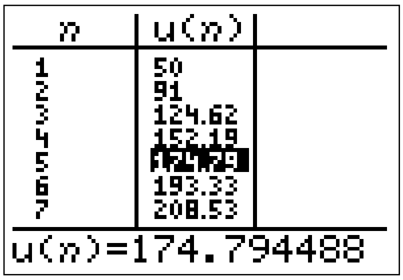
Die Wirkstoffmenge nach der 5. Spritze entspricht dem Wert des Folgegliedes u_5.

Mit dem GTR kann dieses Folgeglied im **Folgenmodus** berechnet werden, der im MODE-Menü eingestellt werden kann (in der vierten Zeile $\boxed{\text{Func}}$ auf $\boxed{\text{Seq}}$ einstellen).
Anschließend kann im Y-Editor wie rechts abgebildet die Bildungsvorschrift der Folge (u_n) eingegeben werden.



Bei $\boxed{n\text{Min}}$ wird die erste Folgenummer $n = 0$ eingegeben, bei $\boxed{u(n\text{Min})}$ der dazugehörige Wert des Folgegliedes $u_0 = 0$.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{GRAPH (TABLE)}}$ kann anschließend die nebenstehende **Wertetabelle** der ersten Folgeglieder angezeigt werden. Es ergibt sich $u_5 \approx 174,79$, direkt nach der 5. Spritze befinden sich somit etwa 175 mg des Wirkstoffes im Blut.



Die Folgeglieder können auch einfach schrittweise per Hand berechnet werden, es ergeben sich dabei über die Rechnung

$$u_1 = 50$$
$$u_2 = 0,82 \cdot 50 + 50 = 91$$
$$\vdots$$
$$u_5 = 0,82 \cdot 152,19 + 50 = 174,19$$

dieselben Werte wie in der oben aufgeführten Tabelle.

Berechnung des langfristigen Schwankungsbereichs der Wirkstoffmenge

Die Folge (u_n) ist beschränkt, langfristig streben all ihre Folgeglieder gegen einen Grenzwert g. Ist die Folge dabei einmal im Grenzwert „angelangt“, unterscheiden sich zwei aufeinander folgende Folgeglieder u_{n-1} und u_n nicht mehr — sie entsprechen beide genau diesem Grenzwert. Eingesetzt in die rekursive Bildungsvorschrift von (u_n) ergibt sich damit:

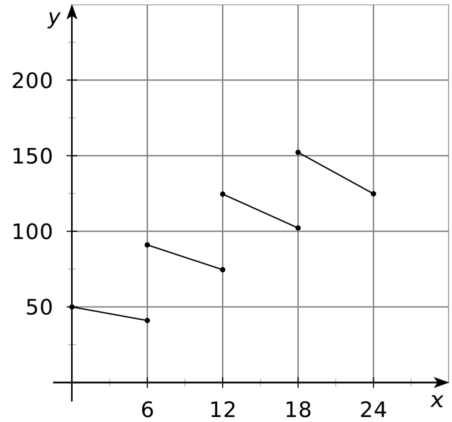
$$g = 0,82 \cdot g + 50$$
$$0,18 \cdot g = 50$$
$$g = \frac{50}{0,18} \approx 277,78$$

Direkt nach jeder Spritze befinden sich langfristig gesehen $277,78$ mg des Wirkstoffs im Blut, direkt vor der jeweiligen Spritze waren die $277,78 - 50 = 227,78$ mg.

Die Wirkstoffmenge schwankt langfristig somit zwischen etwa 228 und 278 mg.

Skizze des zeitlichen Verlaufs der Wirkstoffmenge

Im nebenstehenden Schaubild wurden auf der y-Achse die Wirkstoffmenge (in mg) und auf der x-Achse die verstrichene Zeit in Stunden abgetragen.
Alle 6 Stunden wird eine neue Spritze gesetzt, in den darauf folgenden 6 Stunden wird dann wiederum 18% der aktuellen Wirkstoffmenge abgebaut, bis letztlich wieder eine neue Spritze gesetzt wird.

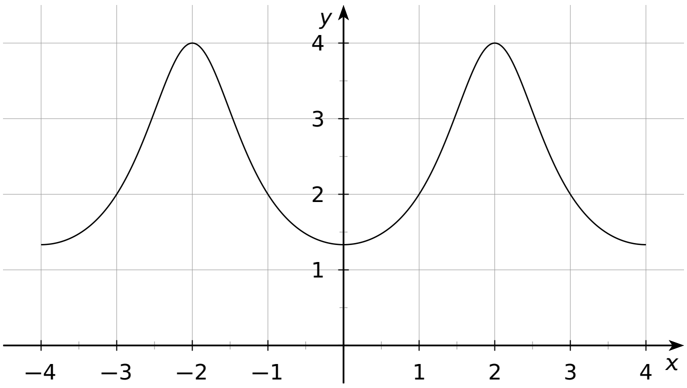


Aufgabe I 2

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Skizze des Schaubildes von f** (7VP)

Das Schaubild K ergibt sich mithilfe des GTR.



Begründung der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{R}$

Die Funktion hätte nicht den kompletten Bereich der reellen Zahlen als Definitionsbereich, wenn der **Nenner** in der Funktionsgleichung an manchen Stellen den Wert Null annehmen würde. Das bedeutet $2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0$ oder $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-2$.

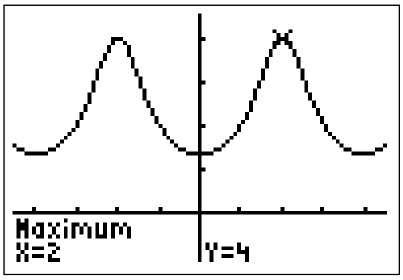
Die Kosinusfunktion kann jedoch **nur** Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Daher hat diese Gleichung **keine Lösung**, der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$.

Bestimmung der Wertemenge von f

Da f sichtbar periodisch ist, besteht die Wertemenge aus allen Funktionswerten zwischen dem y-Wert eines Hochpunktes und dem y-Wert eines Tiefpunktes.

Der y-Wert des Hochpunktes kann über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{4: maximum}}$ bestimmt werden, für ihn gilt $y_{\text{max}}=4$. Entsprechend ergibt sich für den y-Wert des Minimums $y_{\text{min}}=\frac{4}{3}$.

Die Wertemenge lautet somit $W_f=\left[\frac{4}{3};\ 4\right]$.



Bestimmung der Periode von f

Die Periodizität von f wird lediglich durch den Term $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ bestimmt. Er hat die Periode $p=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

Somit hat auch die Funktion f die Periode $p=4$.

Berechnung der Hoch- und Tiefpunkte von K

Wie oben bereits berechnet wurde, ist $H(2\,|\,4)$ als ein Hochpunkt von K.

Wegen der Periode $p=4$ von f ergeben sich damit auch der Punkt $H_1(2+4\mid 4)$ oder auch $H_2(2+2\cdot 4\mid 4)$ als weitere Hochpunkte von K. Allgemein gilt somit: Die Hochpunkte haben die Koordinaten $H_k(2+k\cdot 4\mid 4)$, wobei k irgendeine beliebige ganze Zahl ist.

Der erste Tiefpunkt von K ist hingegen $T\left(0\mid \frac{4}{3}\right)$, die nächsten Tiefpunkt sind aufgrund der Periode $T_1\left(4\mid \frac{4}{3}\right)$ und $T_2\left(8\mid \frac{4}{3}\right)$. Analog zu oben ergeben sich allgemein die Tiefpunkte $T_k\left(k\cdot 4\mid \frac{4}{3}\right)$, wobei k auch hier irgendeine beliebige ganze Zahl ist.

Alternativer (formaler) Lösungsweg

Um die Extrempunkte von K zu berechnen, muss nicht einmal die erste Ableitung von f gebildet werden, sie können mit einfachen Überlegungen am Funktionsterm von f gebildet werden.

Beim Bruch $\dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ ist immer nur der **Nenner** variabel. Es gilt weiterhin:

Der Bruch nimmt seinen größten Wert an, wenn der Nenner seinen **kleinsten** Wert annimmt. Dies ist der Fall, wenn $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$ ist:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}x = \pi + 2k\cdot\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi + 2k\cdot\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2 + 4k.$$

Dabei ist zu beachten, dass die Kosinusfunktion $\cos x$ den Wert -1 an den Stellen $x = \pi + 2k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, annimmt.

Die Funktion f hat Maxima an den Stellen $x = 2 + 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$), das Schaubild K von f hat somit die Hochpunkte $H_k(2+4k \mid 4)$.

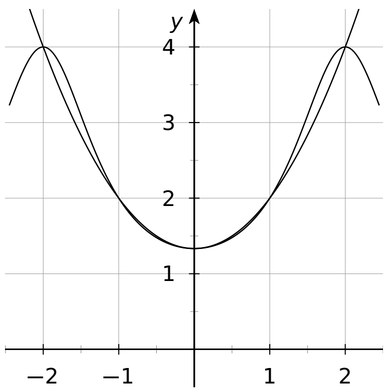
Weiterhin nimmt der Bruch seinen kleinsten Wert an, wenn der Nenner wiederum am größten ist. Dies ist der Fall, wenn $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$ ist:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2}x = 2k\cdot\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\cdot 2k\cdot\pi}{\pi} = 4k.$$

Die Funktion f besitzt also Minima an den Stellen $x = 4k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Tiefpunkte haben also allesamt die Koordinaten $T_k\left(4k \mid \frac{4}{3}\right)$.

b) **Bestimmung der Funktionsgleichung der Näherungsfunktion g** (6VP)

Das Schaubild der ganzrationalen Funktion zweiten Grades g ist eine Parabel. Da g mit f an den Stellen -2, 0 und 2 übereinstimmen sollen und das Schaubild von f achsensymmetrisch ist, muss somit auch die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse sein. Als Ansatz für g ergibt sich damit wegen dieser Achsensymmetrie $g(x) = ax^2 + c$.



Es ist $f(0) = \frac{4}{3}$. Wegen der Voraussetzung $f(0) = g(0)$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} g(0) = a\cdot 0^2 + b &= \frac{4}{3} \\ b &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

g besitzt somit die vorläufige Funktionsgleichung $g(x) = ax^2 + \dfrac{4}{3}$.

Weiterhin ist $f(2) = 4$ und es soll $f(2) = g(2)$ sein:

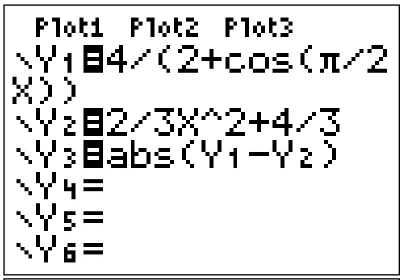
$$g(2) = a \cdot 2^2 + \frac{4}{3} = 4$$
$$4a = \frac{8}{3}$$
$$a = \frac{2}{3}$$

Für g gilt somit die Funktionsgleichung $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}$.

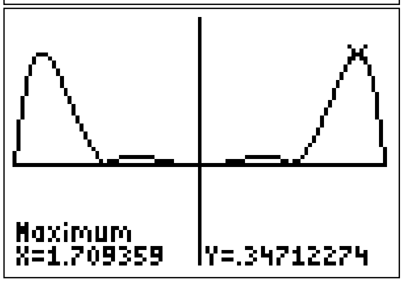
Bestimmung der stärksten Abweichung zwischen f und g

Die Abweichung bzw. der Unterschied zwischen f und g wird durch eine Funktion d beschrieben mit $d(x) = |f(x) - g(x)|$. Das **Maximum** dieser Funktion im Intervall $[-2; 2]$ entspricht der größten zwischen den beiden Funktionen in diesem Intervall. Dieses muss nun mit dem GTR bestimmt werden.

Dazu werden im Graph-Menü unter Y_1 und Y_2 die Funktionsgleichungen von f und g eingegeben, unter Y_3 schließlich abs(Y_1-Y_2). abs steht hierbei für „Absolutbetrag“ und ist unter MATH → rechte Pfeiltaste (NUM) → 1: abs aufrufbar.



Nebenstehend wurde das Window-Fenster im entsprechenden Menü auf $-2 \leq x \leq 2$ sowie $-0,3 \leq y \leq 0,45$ heruntergesetzt, um das Schaubild von d gut sichtbar zu machen. Dann können über den Befehl 2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum die Maxima von d bestimmt werden, sie liegen etwa bei $x_1 \approx -1,709$ und $x_2 \approx 1,709$ und betragen jeweils etwa $d \approx 0,347$.

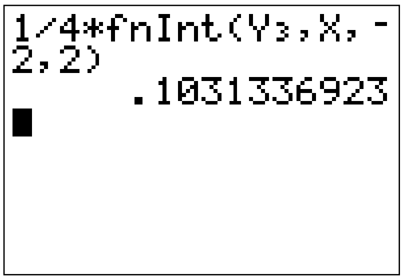


Bestimmung der mittleren Abweichung von f und g

Die mittlere Abweichung von f und g im Intervall entspricht dem **mittleren Funktionswert** von d in diesem Intervall. Für ihn gilt:

$$\overline{m} = \frac{1}{2-(-2)} \cdot \int_{-2}^{2} d(x)\,dx = \frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} d(x)\,dx$$

Mit dem GTR lässt sich dieses Integral über MATH → 9: fnInt berechnen, es beträgt etwa $\overline{m} \approx 0,103$.
Die mittlere Abweichung von f und g im Intervall $[-2; 2]$ beträgt etwa $0,103$.



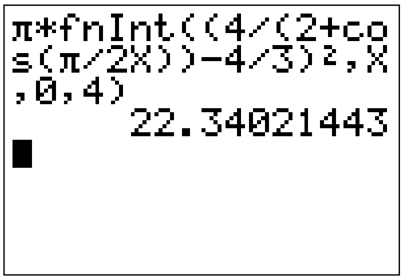
c) **Bestimmung des Volumens des Rotationskörpers** (5VP)

Die Formel für das Rotationsvolumen eines Körpers bezieht sich nur auf Körper, die um die x-Achse rotieren. Das Rotationsvolumen kann hier also nur berechnet werden, indem das Schaubild um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach unten verschoben und anschließend um die x-Achse im Intervall $[0;\,4]$ rotiert wird.

Das nach unten verschobene Schaubild wird durch die Gleichung $f(x) - \frac{4}{3}$ beschrieben. Somit gilt für das Rotationsvolumen nach der allgemeinen Formel:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(f(x) - \frac{4}{3}\right)^2 \, dx \approx 22,34$$

Die Rotationskörper hat ein Volumen von etwa 22, 3 VE.



Gleichung des gespiegelten Schaubilds

Da f hier auch nicht einfach so an der Achse $y = \frac{4}{3}$ gespiegelt werden kann, muss auch hier in kleinen Schritten verfahren werden. f^* sei die Gleichung des gespiegelten Schaubildes K^*.

Zunächst wird das Schaubild um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach unten verschoben, somit gilt $f^*(x) = f(x) - \dfrac{4}{3}$.

Danach wird das Schaubild an der x-Achse gespiegelt: $f^*(x) = -\left(f(x) - \dfrac{4}{3}\right)$.

Letztlich muss das Schaubild wieder um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach oben verschoben werden: $f^*(x) = -\left(f(x) - \dfrac{4}{3}\right) + \dfrac{4}{3}$.

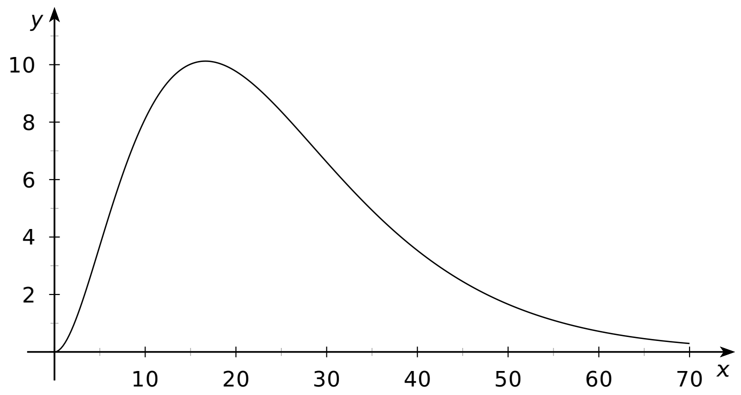
Somit gilt insgesamt:

$$f^*(x) = -\left(f(x) - \frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3} = -f(x) + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} - f(x) = \frac{8}{3} - \frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

Aufgabe I 3

a) **Skizze des Schaubildes von f** (5VP)

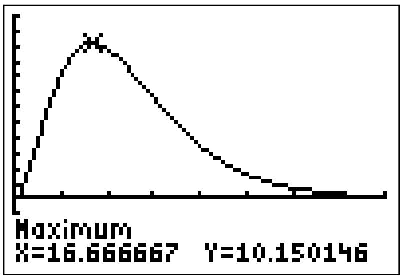
Das Schaubild von f ergibt sich mit dem GTR:



Bestimmung der größten Anzahl an Besuchern pro Minute

Die größte Anzahl an Besuchern ist durch das **Maximum** von f gegeben.

Mit dem GTR kann dieses über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ bestimmt werden. Es ergibt sich das Maximum $10,2$ an der Stelle $x \approx 16,7$.

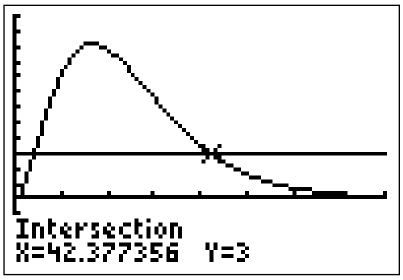


Nach $16,7$ Minuten, also etwa um 19.17 Uhr ist die Ankuftsrate mit etwa 10 Personen pro Minute maximal.

Zeitpunkt, ab dem weniger als drei Personen pro Minute ankommen

Es können hier lediglich die Stellen berechnet werden, an denen die Ankuftsrate **genau** drei Personen pro Minute beträgt.

Mit dem GTR lassen sich diese Stellen berechnen, indem f mit der Geraden $y = 3$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten wird. Es ergeben sich die beiden Schnittstellen $x_1 \approx 4,3$ und $x_2 \approx 42,4$.



Wie am Schaubild von f allerdings erkennbar, dass erst zum zweiten Zeitpunkt hin die Ankunftsrate auch tatsächlich dauerhaft unter 3 Personen pro Minute bleibt, somit ist x_2 die gesuchte Stelle.

Etwa ab 19.43 Uhr kommen weniger als drei Besucher pro Minute zum Kino.

b) **Nachweis, dass die Anzahl der Ankömmlinge durch g beschrieben wird** (4VP)

Die Funktion f beschreibt die Anzahl der ankommenden Personen **pro Minute** und stellt damit eine **Änderungsrate** da.

Ihre Stammfunktion müsste somit richtige Anzahl der ankommenden Personen pro Minute beschreiben — was ja genau durch g beschrieben werden soll. Es muss also gezeigt werden, dass g eine Stammfunktion von f ist. Dies ist der Fall, wenn $g'(x) = f(x)$ gilt.

Um dies zu überprüfen, wird g nach der Produktregel abgeleitet. Dabei ist zu beachten, dass der Term $\mathrm{e}^{-0,12x}$ nach der Kettenregel abgeleitet zu $\left(\mathrm{e}^{-0,12x}\right)' = \mathrm{e}^{-0,12x} \cdot (-0,12)$ wird:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 0-\left[(4,5x+37,5)\mathrm{e}^{-0,12x}+(2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot\mathrm{e}^{-0,12x}\cdot(-0,12)\right]\\ &=\left[-4,5x-37,5-(2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot(-0,12)\right]\cdot\mathrm{e}^{-0,12x}\\ &=(-4,5x-37,5+0,27x^2+4,5x+37,5)\cdot\mathrm{e}^{-0,12x}\\ &=0,27x^2\cdot\mathrm{e}^{-0,12x}\\ &=f(x)\end{aligned}$$

Es muss weiterhin noch überprüft werden, ob g die gegebene Anfangsbedingung — dass nämlich vor 19.00 Uhr noch keine Besucher am Kartenschalter sind — erfüllt. Es muss $g(0)=0$ sein:

$$g(0)=312,5-(2,25\cdot 0^2+37,5\cdot 0+312,5)\cdot\mathrm{e}^{-0,12\cdot 0}=312,5-312,5\cdot\underbrace{\mathrm{e}^0}_{=1}=0.$$

Somit ist auch diese Bedingung erfüllt. g beschreibt tatsächlich die Anzahl der angekommenen Personen seit 19.00 Uhr.

Bestimmung der maximalen Besucherzahl

Hier muss nun untersucht werden, ob sich die Besucheranzahl nach einer längeren Zeit (also für sehr große x) einem maximalen Wert nähert — Wir bilden den Grenzwert von g für $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[312,5-(2,25x^2+37,5x+312,5)\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-0,12x}}_{\to 0}\right]=312,5-0=312,5$$

Es kommen maximal etwa 312 Personen zum Kino.

c) **Bestimmung der Wartezeit ab 19.20 Uhr** (6VP)

Es muss zunächst berechnet werden, wieviele Personen um 19.20 bereits am Kartenschalter warten:

$$g(20)=312,5-(2,25\cdot 20^2+37,5\cdot 20+312,5)\cdot\mathrm{e}^{-0,12\cdot 20}\approx 134$$

Es ist weiterhin bekannt, dass nun pro Minute 6 Personen abgefertigt werden. Somit haben nach $134:6\approx 22,3$ Minuten alle 134 wartenden Besucher eine Karte erhalten.

Berechnung der größten Anzahl an wartenden Personen

Bis um 19.20 Uhr warten 134 Personen am Kartenschalter, der nun öffnet. Die Anzahl $h(x)$ der nun noch wartenden Personen setzt sich zusammen aus den bisher angekommenen Personen abzüglich der Personen, die seit 19.20 Uhr abgefertigt werden.

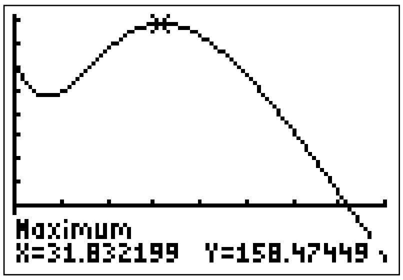
Die Anzahl der bisher angekommenen wird durch $g(x)$ beschrieben.

Da pro Minute weiterhin 6 Personen abgefertigt werden können, sind zum Zeitpunkt x genau $6\cdot(x-20)$ Personen abgefertigt (Hinweis: Es darf hier nicht x, sondern muss $x-20$ stehen, da der Schalter ja erst um 19.20 Uhr aufmacht und daher eine 20-minütige Verzögerung eintritt!).

Somit gilt insgesamt als Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt x:

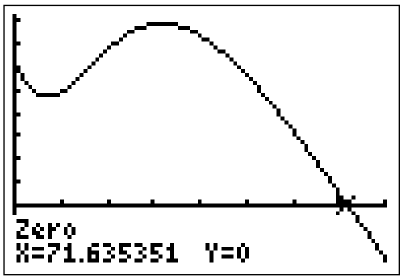
$h(x)=g(x)-6\cdot(x-20)$.

Nun muss mit dem GTR das Maximum von h über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ berechnet werden, es liegt etwa bei $x \approx 31,8$ und beträgt ca. $158,47$.
Etwa um 19.32 Uhr ist die Anzahl der Wartenden am größten, sie umfasst dann etwa 158 Personen.



Berechnung der Zeit, nach der sich die Warteschlange aufgelöst hat

Hier muss nun mithilfe des GTR die Zeit berechnet werden, nach der die Anzahl $h(x)$ der wartenden Personen Null beträgt. Mit dem Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{2: zero}}$ ergibt sich $x \approx 71,6$.
Gegen 20.12 Uhr hat sich die Warteschlange aufgelöst.



d) **Personenanzahl, die nun pro Minute abgefertigt werden muss** (3VP)

Der Schalter wird um 19.50 Uhr öffnen und die Warteschlange soll um 20.30 Uhr aufgelöst sein. Somit bleiben zur Abfertigung 40 Minuten.

Bis 20.30, also in einem Zeitraum von 90 Minuten kommen weiterhin $g(90) \approx 312$ Personen beim Kino an. All diese Personen müssen innerhalb dieser 40 Minuten abgefertigt werden. Pro Minute wäre dies eine Anzahl von $312 : 40 = 7,8$ Personen.

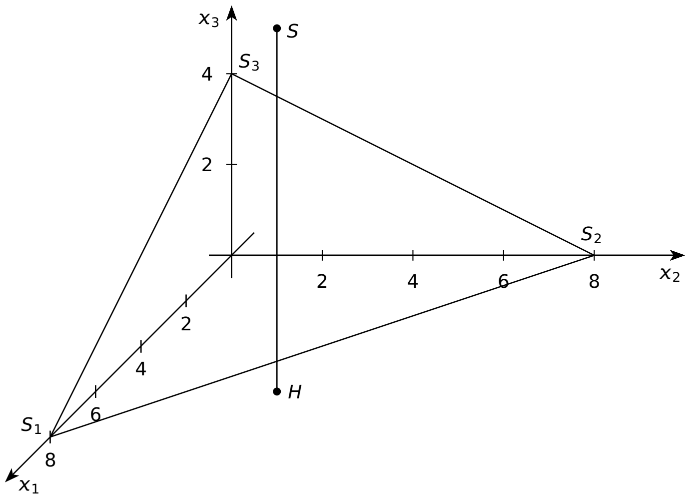
Es müssen pro Minute etwa 8 Personen abgefertig werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist.

Wahlteil II

Aufgabe II 1.1

a) **Zeichnung des Hangs und der Sendemasts** (6VP)

Für die Darstellung werden die Spurpunkte der Ebene, also ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen berechnet. Dazu werden in der Ebenengleichung jeweils zwei Koordinaten gleich Null gesetzt.
Damit ergeben sich die drei Spurpunkte $S_1(8 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 8 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 4)$. Diese werden eingezeichnet und miteinander verbunden.



Bestimmung des Neigungswinkels des Hangs

Der Neigungswinkel entspricht dem eingeschlossenen Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.

Für den Neigungswinkel α gilt somit:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \approx 0,8165$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 35,26^\circ$$

Der Hang hat einen Neigungswinkel von etwa $35,26^\circ$.

Berechnung der Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang

Der Mast wird mit dem Stahlseil auf halber Höhe, also im Punkt $M(6 \mid 4 \mid 4)$ befestigt. Dieses soll möglichst kurz sein — und muss daher **senkrecht** zum Hang verlaufen.

Das Stahlseil kann also durch eine Lotgerade ℓ zur Hangebene E beschrieben werden, die durch M verläuft. Sie besitzt den Normalenvektor von E als Richtungsvektor:

$$\ell\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t\cdot\vec{n}_E = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}; \quad t\in\mathbb{R}$$

Der Verankerungspunkt V entspricht dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der Hangebene. Dazu werden die Koordinaten von ℓ in die Koordinatengleichung der Hangebene eingesetzt:

$$\begin{aligned} \ell \cap E:\quad (6+t)+(4+t)+2(4+2t) &= 8 \\ 6+t+4+t+8+4t &= 8 \\ 6t &= -10 \\ t &= -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Der Verankerungspunkt liegt somit für $t = -\frac{5}{3}$ auf der Geraden. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich:

$$\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V\left(\frac{13}{3} \mid \frac{7}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$$

Der Verankerungspunkt des Stahlseils hat die Koordinaten $V\left(\frac{13}{3} \mid \frac{7}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.

Berechnung der Länge des Stahlseils

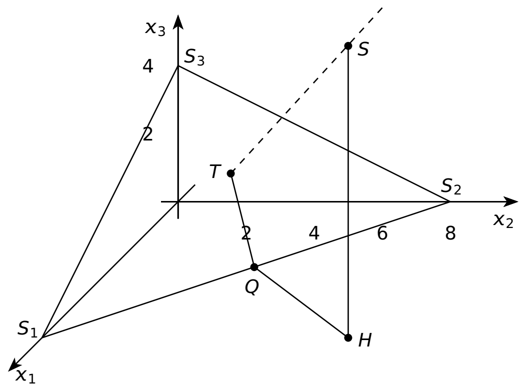
Die Seillänge entspricht der Länge der Strecke vom Verankerungspunkt V bis zum Punkt M, in dem das Seil den Mast befestigt:

$$\overline{MV} = |\overrightarrow{MV}| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{150}{9}} \approx 4,08$$

Das Stahlseil ist etwa $40,8$ m lang.

b) **Beschreibung eines Weges, um die Schattenlänge zu bestimmen** (3VP)

Um die Gesamtlänge ℓ des Schattens zu ermitteln, die aus den Teilabschnitten $\overline{TQ}$ und $\overline{QH}$ besteht, können beispielsweise folgende Schritte durchgeführt werden:



- Bestimmung der Geradengleichung der Geraden g durch S_1 und S_2
- Bestimmung einer Hilfsebene H durch die Punkte T, S und H
- Schnitt der Geraden g mit der Hilfsebene. Dies ergibt den „Knickpunkt“ Q des Schattens
- Es gilt für die Gesamtlänge dann $\ell = \overline{TQ} + \overline{QH} = |\overrightarrow{TQ}| + |\overrightarrow{QH}|$.

c) **Berechnung der Abknickhöhe des Mastes** (3VP)

Der Mast knickt nun im Punkt $K(6\mid 4\mid k)$ um, wobei k hier die Abknickhöhe darstellt.

Die Spitze S des Mastes, die sich vorher im Punkt $(6\mid 4\mid 8)$ befand, liegt nun im Punkt $R(4\mid 0\mid 2)$. Der Abstand der Spitze zum Abknickpunkt ist dabei jedoch gleich geblieben, es muss also gelten:

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{RK}| &= |\overrightarrow{SK}| \\
\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ k-2 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-8 \end{pmatrix}\right| \\
\sqrt{2^2+4^2+(k-2)^2} &= \sqrt{(k-8)^2} && \mid (\ldots)^2 \\
20+(k-2)^2 &= (k-8)^2 && \mid \text{Klammern auflösen} \\
20+k^2-4k+4 &= k^2-16k+64 && \mid -k^2 \quad \mid +16k \quad \mid -24 \\
12k &= 40 \\
k &= \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33
\end{aligned}
$$

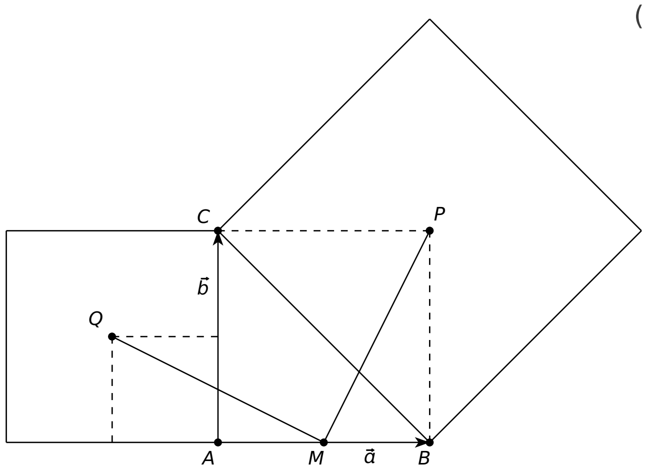
Somit ist der Sendemast in einer Höhe von etwa $33{,}3$ m abgeknickt.

Aufgabe II 1.2

(4VP)

Aus dem Aufgabentext lässt sich die Aussage verwenden, dass das Dreieck ABC **gleichschenklig** und **rechtwinklig** ist. Für die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ (im Folgenden $\vec{a}$ genannt) und $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ gilt daher zum einen $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Von Interesse sind hier jedoch die Vektoren $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$, um die es in dieser Aufgabe geht. Sie lassen sich auch leicht mit den obigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen:



$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}; \quad \overrightarrow{MQ} = -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$$

Um die Orthogonalität dieser beiden Vektoren nachzuweisen, muss ihr Skalarprodukt gebildet werden, es müsste Null betragen:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} &= \left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}^2 - \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}^2 \\
&= -\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Strecken MP und MQ orthogonal zueinander sind.

Um weiterhin nachzuweisen, dass sie gleich lang sind, muss der Betrag der beiden Vektoren $\overrightarrow{MP}$ und $\overrightarrow{MQ}$ berechnet werden:

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{\overrightarrow{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{b}^2}$$

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{\overrightarrow{MQ}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2}$$

Wegen $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ gilt damit automatisch auch $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$. Die Ausdrücke unter den Wurzeln sind damit jeweils **identisch** — die Beträge der beiden Vektoren sind damit gleich.

Damit ist ebenfalls nachgewiesen, dass die beiden Strecken MP und MQ gleich lang sind.

Aufgabe II 2

a) **Berechnung des Kantenabstands** (5VP)

Mit den gegebenen Koordinaten der 4 Punkte lassen sich zunächst die Koordinaten der restlichen Punkte ermitteln: $C(3\,|\,5\,|\,0)$, $E(0\,|\,0\,|\,4)$, $G(3\,|\,5\,|\,4)$, $H(0\,|\,5\,|\,4)$.

Wie anhand der gegebenen Skizze erkennbar ist, entspricht der Kantenabstand einfach dem Abstand der beiden Punkte A und H (oder auch B und G). Für diesen gilt:

$$d = |\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+5^2+4^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

Die beiden Kanten AB und GH besitzen einen Abstand von etwa $6,4$ LE.

Nachweis, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene liegt

Die Gerade g durch E und H ist in Parameterform zunächst gegeben durch:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r\cdot\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{mit } r\in\mathbb{R}.$$

Wenn die Gerade in allen Ebenen E_t liegen soll, müssen ihre Koordinaten für alle $r\in\mathbb{R}$ und $t\geq 0$ die Ebenengleichung erfüllen. Um dies zu überprüfen, werden ihre Koordinaten einfach in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} g\cap E_t\colon\; t(0+0r)-(4+0r) &= -4 \\ t\cdot 0-4 &= -4 \\ -4 &= -4 \end{aligned}$$

Die Koordinaten erfüllen somit für alle r und alle t die Ebenengleichung E_t. Somit liegt g in allen Ebenen von E_t.

Ebene, in der der geschlossene Deckel liegt

Wenn der Deckel geschlossen ist, gehört beispielsweise der Punkt $F(3\,|\,0\,|\,4)$ zu ihm. Dieser Punkt muss die Ebenengleichung der entsprechenden Ebene erfüllen:

$$\begin{aligned} F \text{ in } E_t\colon\ t\cdot 3-4&=-4\\ 3t&=0\\ t&=\ \ 0 \end{aligned}$$

Der geschlossene Deckel liegt somit in der Ebene E_0: $-x_3=-4$ bzw. $x_3=4$.

Hinweis: Hier dürfen die beiden E und H für die Rechnung **nicht** verwendet werden, da sie beide auf der Geraden g von oben und damit sowieso in **allen** Ebenen E_t liegen.

Überprüfung, ob der um 90° geöffnete Deckel in einer Scharebene liegt

Der Punkt F ist 3 LE vom Punkt E entfernt. Wird der Deckel nun um 90° (um die Achse EH) gedreht, steht dieser Punkt genau 3 LE **über** E und hat dabei die Koordinaten $F^*(0\,|\,0\,|\,7)$.
Dieser Punkt müsste in einer der Scharebenen E_t liegen:

$$\begin{aligned} F^* \text{ in } E_t\colon\ t\cdot 0-7&=-4\\ -7&=-4 \end{aligned}$$

Es entsteht ein Widerspruch, der Punkt F^* und damit der ganze geöffnete Deckel liegen somit in **keiner** Scharebene E_t.

b) **Bestimmung der Koordinaten des Punktes P** (3VP)

Der Deckel liegt nun in der Ebene E_2: $2x_1-x_3=-4$.

Er wird nun durch einen zu ihm senkrechten Stab abgestützt, der in der Mitte der Kante EF, also im Punkt $M(1,5\,|\,0\,|\,4)$ befestigt ist. Er trifft den Deckel im Punkt P.

Da der Stab senkrecht zum Deckel steht, kann er geometrisch als **Lotgerade** zu E_2 aufgefasst werden, die durch M verläuft. Diese Gerade hat den Normalenvektor von E_2 als Richtungsvektor:

$$\ell\colon \vec{x}=\overrightarrow{OM}+s\cdot\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1,5\\0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{mit } s\in\mathbb{R}.$$

Der Punkt P entspricht nun einfach dem Schnittpunkt von E_2 mit ihrer Lotgeraden. Um diesen zu bestimmen, werden die Koordinaten von ℓ in die Ebenengleichung von E_2 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \ell\cap E_2\colon\ 2(1,5+2s)-(4-s)&=-4\\ 3+4s-4+s&=-4\\ 5s&=-3\\ s&=-\frac{3}{5}=-0,6 \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt somit für $s=-0,6$ auf der Geraden. Für seine Koordinaten gilt somit:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 0,6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 4,6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(0,3\,|\,0\,|\,4,6)$$

Der Punkt P hat die Koordinaten $P(0,3\,|\,0\,|\,4,6)$.

c) **Berechnung des Öffungswinkels wenn der Deckel in E_2 liegt** (4VP)

Der geschlossene Deckel liegt laut Teilaufgabe a) in der Ebene E_0: $x_3 = 4$, jetzt liegt er in E_2: $2x_1 - x_3 = -4$. Der Öffnungswinkel entspricht also genau dem Öffnungswinkel dieser beiden Ebenen.

Mit ihren Normalenvektoren $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,4472$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 63,4^\circ$

Der Öffnungswinkel beträgt etwa $63,4^\circ$.

Ebene, in der der um 60° geöffnete Deckel liegt

Nun ist bekannt, dass der Öffnungswinkel zwischen E_0 und der gesuchten Ebene E_t genau 60° beträgt.

Wie oben gilt mit den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{n}_t|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

Es gilt weiterhin $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ 2 &= \sqrt{t^2+1} \\ t^2 + 1 &= 4 \\ t^2 &= 3 \end{aligned}$$

Da $t \geq 0$ gilt ist hier die einzige Lösung $t = \sqrt{3}$.
Wenn der Deckel um 60° geöffnet wurde, liegt er in der Ebene $E_{\sqrt{3}}$: $\sqrt{3}x_1 - x_3 = -4$.

Bestimmung von t in Abhängigkeit von α

Hier kann nun genauso wie oben vorgegangen werden, nur dass hier auch der Öffnungswinkel α als Variable bleibt:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_t|}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{n}_t|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$t^2+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$t^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

Wegen $t \geq 0$ ergibt sich auch hier nur die positive Lösung als einzige Lösung:

$$t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}.$$

Hinweis: Der Ausdruck kann, muss aber nicht noch vereinfacht werden:

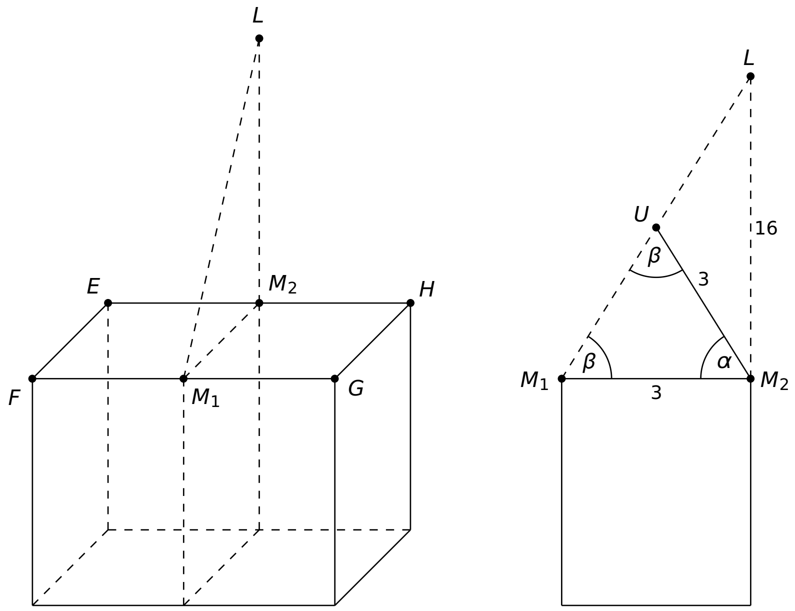
$$t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Die Beziehung $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ ergibt sich hierbei aus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

d) **Berechnung des maximalen Öffnungswinkels der Kiste** (4VP)

In der folgenden Skizze ist einmal die Skizze in Frontal- und einmal in Seitenansicht dargestellt. Wenn die Kiste so weit geöffnet ist, dass gerade noch kein Licht in sie einfällt, liegt der Deckelpunkt U auf dem Lichtstrahl, der von L ausgeht und den Mittelpunkt M_1 der Kante FG; Er hat die Koordinaten $M_1(3\,|\,2,5\,|\,4)$. Der Punkt M_2 ist der Mittelpunkt der Kante EH, für ihn gilt $M_2(0\,|\,2,5\,|\,4)$.

An den Koordinaten $L(0\,|\,2,5\,|\,20)$ der Lichtquelle lässt sich erkennen, dass diese senkrecht über dem Mittelpunkt M_2 steht, und zwar in einer Entfernung von $20-4=16$ LE.



Der Deckel hat eine Breite von 3 LE, daher gilt $\overline{RS}=3$. Das Dreieck RSL ist weiterhin rechtwinklig, daher gilt für den Winkel β mithilfe von Trigonometrie:

$$\tan\beta=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}=\frac{\overline{LS}}{\overline{RS}}=\frac{16}{3}\quad\Rightarrow\quad\beta\approx 79,4^\circ.$$

Beim geöffneten Deckelrand gilt weiterhin $\overline{US}=\overline{RS}=3$. Somit ist das eingezeichnete Dreieck QRS **gleichschenklig**, der Winkel β taucht somit – wie oben eingezeichnet – beim Punkt U wieder auf.

Im Dreieck haben alle Winkel eine Summe von 180°, daher gilt:

$$\begin{aligned}\beta+\beta+\alpha&=180^\circ\\ \alpha&=\quad 180^\circ-2\cdot\beta\\ &\approx\quad 180^\circ-2\cdot 79,4^\circ=21,2^\circ\end{aligned}$$

Der maximale Öffnungswinkel des Deckels beträgt $21,2^\circ$, wenn kein Licht in die Kiste fallen soll.