Pflichtteil

Aufgabe 1

▶ Bilde die Ableitung

Um die Ableitung zu bilden kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Schreibe den Wurzelterm der Funktion zunächst um
2. Leite die Funktion mit Hilfe der **Produktregel** und der **Kettenregel** ab

1. Schritt: Umschreiben

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$$
$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}$$

2. Schritt: Ableiten

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}$$
$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)e^{2x}$$

Aufgabe 2

▶ Berechne das Integral

Um das **Integral** zu berechnen, benötigst du eine **Stammfunktion**.

Es gilt der **Hauptsatz der Integralrechnung**:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{f}(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}}$$

Eine **Stammfunktion** einer Funktion f bildest du folgendermaßen:

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x) = x^n \\ &F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c\end{aligned}}$$

Um die Stammfunktion der gegebenen Funktion zu bilden, kannst du diese zunächst als Produkt schreiben.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}dx &= \int_0^1 4 \cdot (2x+1)^{-3}dx \\ &= \left[4 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot (2x+1)^{-2} \cdot \tfrac{1}{2}\right]_0^1 \\ &= \left[-(2x+1)^{-2}\right]_0^1 \\ &= -(2 \cdot 1 + 1)^{-2} - (-(2 \cdot 0 + 1)^{-2}) \\ &= -3^{-2} + 1^{-2} \\ &= -\tfrac{1}{9} + 1 \\ &= \tfrac{8}{9}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

► Löse die Gleichung

Um die Gleichung zu lösen, musst du zunächst alle Bestandteile der Gleichung auf eine Seite der Gleichung bringen. Der höchste Exponent von x beträgt 4. Diese Gleichung kannst du demnach durch **Substitution** lösen. Anschließend kannst du die Gleichung entweder mit der **Mitternachtsformel**, oder der ***pq*-Formel** lösen. Anschließend musst du resubstituieren.

$$
\begin{aligned}
x^4 &= 4+3x^2 && \mid -3x^2-4 \\
x^4-3x^2-4 &= 0 && \text{Substitution mit } u=x^2 \\
u^2-3u-4 &= 0
\end{aligned}
$$

Nun hast du eine quadratische Gleichung gegeben. Du kannst sie mit der Mitternachtsformel oder der pq-Formel lösen.

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es gilt: $a=1$, $b=-3$ und $c=-4$
Setze diese Werte nun in die Mitternachtsformel ein.

$$
\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
u_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \\
u_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \\
u_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\
u_{1,2} &= \frac{3 \pm 5}{2} \\
u_1 &= 4 \\
u_2 &= -1
\end{aligned}
$$

pq-Formel:

$$x_1,2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dabei gilt: $p=-3$ und $q=-4$

$$u_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$u_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-4)}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$u_1 = 4$$
$$u_2 = -1$$

Nun kannst du resubstituieren. Dazu setzt du die Werte für u_1 und u_2 in die Gleichung $u = x^2$ ein.

$$u_1 = x^2$$
$$4 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\pm\sqrt{4} = x_{1,2}$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 2$$

$$u_2 = x^2$$
$$-1 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$$

Da die Wurzel negativ ist, hat diese Gleichung keine Lösung.

Die Gleichung hat die Lösung $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Die Lösungsmenge lautet also: $L = \{-2, 2\}$

Aufgabe 4

a)

▸ **Erkläre den Graphen *g***

Du hast in der Aufgabe zwei Kosinus-Funktionen gegeben.

Die **allgemeine Kosinus-Funktion** lautet:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d}}$$

Der Faktor a gibt die Streckung bzw. Stauchung der **Amplitude** an. Durch den Faktor b wird die **Periode** verändert. Eine Verschiebung in die x-Richtung kommt durch den Faktor c zustande. Das d gibt eine Verschiebung in y-Richtung an.

Um zu erklären wie man den Graphen g aus f erhält schaust du, wie sich die Amplitude und Periode ändert. Außerdem prüfst du, ob der Graph der Funktion g verschoben ist.

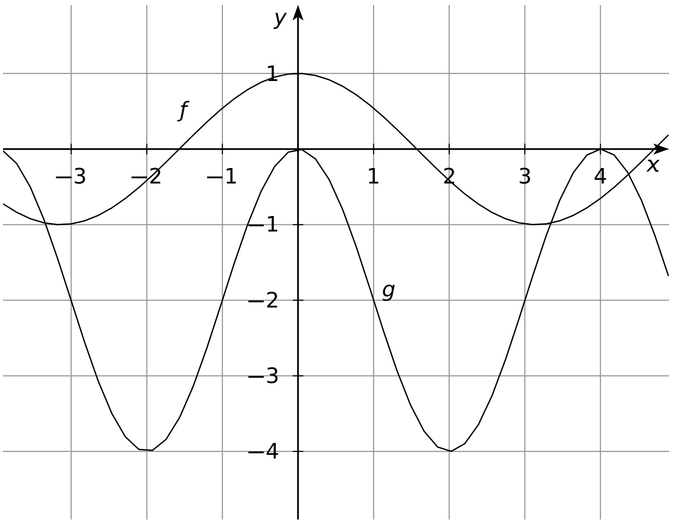
Den Graphen g erhältst du aus dem Graphen f, indem die Funktion gestreckt und verschoben wird. Außerdem verändert sich die Periode.

Die Funktion g hat demnach eine Amplitude von 2 und ist um einen Faktor 2 in negative y-Richtung verschoben. Die Periode hat sich ebenfalls verändert. Die **Periode** wird mit folgender Formel berechnet:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{b}}$$

Die Funktion g hat also die Periode $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Du erhältst den Graphen g aus dem Graphen f, wenn du den Graphen f mit 2 streckst und um 2 Längeneinheiten in negative y-Richtung verschiebst. Außerdem ändert sich die Periode von 2π in 4.



b)

▶ Bestimme die Nullstellen von g

Bei dieser Teilaufgabe sollst du die **Nullstellen** der Funktion g im Bereich $0 \leq x \leq 4$ bestimmen.
Setze dazu die Funktion g gleich 0.

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - 2 &= 0 \qquad &&| +2 \\ 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) &= 2 \qquad &&| : 2 \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) &= 1 \end{aligned}$$

Die Kosinus-Funktion hat bei den Werten 0, 2π,... den Wert 1.

Bestimme nun das x so, dass der Kosinus diese Werte annimmt.

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}x &= 0 \qquad &&| \cdot \tfrac{2}{\pi} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}x &= 2\pi \qquad &&| \cdot \tfrac{2}{\pi} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Funktion g in dem gegebenen Bereich die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ hat.

Aufgabe 5

a)

▶ Bestimme $f(g(3))$

Um $f(g(3))$ zu bestimmen, liest du zunächst den Wert von $g(3)$ ab. Anschließend liest du den Funktionswert von f für diesen x-Wert ab.

Die Funktion g hat an der Stelle $x=3$ den Wert -1. Der Wert bei $f(-1)$ beträgt 5.

Der Wert $f(g(3))$ beträgt 5.

▶ Bestimme $f(g(x))=0$

Bei dieser Aufgabe schaust du zunächst wo der Graph K_f eine Nullstelle hat. Anschließend liest du den x-Wert von K_g ab, der diesen Wert hat.

Der Graph K_f hat eine Nullstelle bei $x=4$. Nun überprüfst du, wo der Graph K_g den Wert 4 annimmt. Dies ist bei $x=-2$ der Fall.

<u>*Alternativ*</u>

Der Graph K_f hat bei $x=0$ eine Nullstelle. Der Graph K_g nimmt bei $x=2$ den Wert 0 an.

Ein Wert damit $f(g(x))=0$ gilt, ist der Wert $x=-2$ oder $x=2$.

b)

▶ Bestimme $h'(2)$

Du hast folgende Funktion gegeben: $h(x)=f(x)\cdot g(x)$

Du kannst die Ableitung der Funktion h mit der **Produktregel** bestimmen.

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}}$$

Lese aus dem Koordinatensystem die **Funktionswerte** von $f(2)$, $f'(2)$, $g(2)$ und $g'(2)$ und setze diese in die Ableitung ein.

Es gilt $f(2)=-4$. Dieser Punkt ist ein **Tiefpunkt**. Das bedeutet, dass die Ableitung nach der notwendigen Bedingung für ein Minimum an der Stelle $x=2$ den Wert 0 annehmen muss. Dadurch weißt du, dass $f'(2)=0$ ist.
Der Funktionswert $g(2)$ beträgt 0. Die lineare Funktion g hat die Steigung -1. Dies kannst du aus dem Schaubild mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** bestimmen. Demnach beträgt die Ableitung -1 an der Stelle $x=2$.
Nun kannst du die Werte in die Ableitung der Funktion h einsetzen.

$$h'(2)=f'(2)\cdot g(2)+f(2)\cdot g'(2)$$
$$h'(2)=0\cdot 0+(-4)\cdot(-1)$$
$$h'(2)=4$$

Es gilt: $h'(2)=4$

Aufgabe 6

a)

▶ Stelle die Ebenen E und F dar

Um die Ebenen E und F in einem Koordinatensystem darstellen zu können, benötigst du die

Spurpunkte der Ebenen.
Die Spurpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Der Spurpunkt der x_1-Achse hat die Koordinaten $S_1(x_1 \mid 0 \mid 0)$, der der x_2-Achse $S_2(0 \mid x_2 \mid 0)$. Dementsprechend hat der Spurpunkt der x_3-Achse die Koordinaten $S_3(0 \mid 0 \mid x_3)$. Du erhältst die Spurpunkte, indem du die x-Werte der anderen Achsen gleich 0 setzt und die Ebenengleichung nach deinem gewünschten x auflöst.

Um den Spurpunkt S_1 der Ebene E zu bestimmen, setzt du das $x_2 = 0$. Du erhältst folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 0 &= 4 \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$$

Der Spurpunkt S_1 hat demnach die Koordinaten $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$.

Analog dazu bestimmst du auch den Spurpunkt S_2 der Ebene E:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 0 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Dieser hat die Koordinaten $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$.

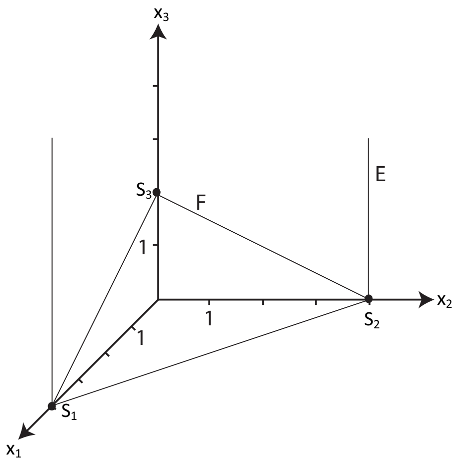
Bei der Ebene F verfährst du genauso. Diese hat die selben Spurpunkte S_1 und S_2 wie die Ebene E.

Für den Spurpunkt S_3 erhältst du folgendes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 0 + 0 + 2x_3 &= 4 \qquad \mid :2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Du erhältst die Spurpunkte $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 2)$.

Zeichne diese Punkte nun in ein Koordinatensystem ein und verbinde die Spurpunkte.



▶ Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden

Du weißt, dass die beiden Ebenen E und F die gleichen Spurpunkte S_1 und S_2 haben. Mit Hilfe der zwei Punkte kannst du eine Parametergleichung der Schnittgeraden aufstellen.
Wenn du den Punkt S_1 als Stützpunkt verwendest, erhältst du folgende Parametergleichung

der Schnittgeraden:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS_1} + t \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Gleichung der Schnittgeraden lautet: $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)

▶ Gib eine Gleichung der Ebene *G* an

Die Ebene G soll **parallel** zu der x_1-Achse verlaufen. Das bedeutet, dass der Faktor vor dem x_1 gleich 0 ist. Außerdem besitzt die Ebene dieselbe Spurgerade, die die x_2x_3-Ebene schneidet wie die Ebene F.
Die Ebene G hat daher auch dieselbe Ebenengleichung wie die Ebene F. Allerdings mit den Unterschied, dass der Faktor vor dem x_1 gleich 0 ist.

Eine Ebenengleichung lautet: $G: x_2 + 2x_3 = 4$

Aufgabe 7

▶ Bestimme den Abstand *d*

Um den Abstand d des Punktes C von der Geraden g zu bestimmen, brauchst du außer der Geradengleichung den Punkt P auf der Geraden, der von C den geringsten Abstand hat. Der Abstand zwischen dem Punkt P und dem Punkt C ist dann am geringsten, wenn die Gerade durch die zwei Punkte orthogonal auf der Geraden g steht. Zwei Geraden sind orthogonal, wenn das **Skalarprodukt** der beiden Richtungsvektoren 0 ergibt.

Um den Abstand zu bestimmen kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Geradengleichung von g auf
2. Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts den Parameter t der Geradengleichung und somit den Punkt P
3. Bestimme den Abstand der Punkte P und C

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung *g*

Als Stützvektor wird hier der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ gewählt.

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3-1 \\ 13-10 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmung der Koordinaten des Punktes *P*

Der Punkt P liegt auf der Geraden g. Daher hat er die von t abhängigen Koordinaten $P(1-4t \mid 10+3t \mid 1)$.
Das Skalarprodukt des Vektors $\overrightarrow{PC}$ und der Richtungsvektor der Geraden soll 0 ergeben, damit sie orthogonal zueinander stehen.

Der Vektor $\overrightarrow{PC}$ lautet:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} &= \begin{pmatrix} 2-(1-4t) \\ 3-(10+3t) \\ 1-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-1+4t \\ 3-10-3t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+4t \\ -7-3t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1+4t \\ -7-3t \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ (1+4t) \cdot (-4) + (-7-3t) \cdot 3 + 0 \cdot 0 &= 0 \\ -4-16t-21-9t &= 0 \\ -25-25t &= 0 \qquad \mid +25 \\ -25t &= 25 \qquad \mid :(-25) \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Wenn du den Wert $t=-1$ in die Geradengleichung g einsetzt, erhältst du die Koordinaten des Punktes P.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P hat die Koordinaten $P(5 \mid 7 \mid 1)$.

3. Schritt: Berechnung des Abstands d

Der Abstand d zwischen den Punkten P und C entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PC}$:

$$d = \left|\overrightarrow{PC}\right|$$

$$d = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

Der Punkt C hat von der Geraden g den Abstand $d = 5$.

Aufgabe 8

a)

▶ Formuliere ein Ereignis A

Bei dem Ereignis A liegt eine Bernoulli-Kette vor. Die Formel zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit einer **Bernoulli-Kette** lautet:

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n}}$$

- n: Länge der Bernoulli-Kette

- k: Anzahl der Treffer
- p: Erfolgswahrscheinlichkeit

Schaue dir die einzelnen Terme und ihre Bedeutung an.

Das Ereignis setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Der erste Teile lautet: $\binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Dieser Teil gibt an, dass das Ereignis eine Kettenlänge von 10 hat. Außerdem gibt es 8 Treffer.
Im zweiten Teil kommt die Wahrscheinlichkeit dazu, dass man neunmal verliert. Den Ausdruck $10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3}$ kann man umschreiben in $\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3}$.

Die $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man zehnmal verliert.
Man verliert also entweder achtmal, neunmal oder zehnmal.

Das Ereignis A lautet:
$P(A)$: Man verliert mindestens 8 von 10 Spielen.

b)

▶ Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele an. Die Wahrscheinlichkeit ein Spiel zu verlieren, ist bei jedem Spiel gleich groß. Die Zufallsvariable ist somit **binomialverteilt** und folgt somit der **Bernoulli-Verteilung**. Setze die Kettenlänge, Anzahl der Treffer und die Erfolgswahrscheinlichkeit in die Bernoulli-Formel ein.

Für die **Erfolgswahrscheinlichkeit** p gilt $p = \frac{2}{3}$. Es wird viermal gespielt, d.h. die Kettenlänge der Bernoulli-Kette beträgt $n = 4$. Der Spieler verliert genau zweimal, daher gilt: $k = 2$
Setze diese Werte in die Bernoulli- Formel ein und berechne die Wahrscheinlichkeit.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-2}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9}$$

$$P(X = 2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot (2)!} \cdot \frac{4}{81}$$

$$P(X = 2) = \frac{24}{2 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4}{81}$$

$$P(X = 2) = \frac{24}{4} \cdot \frac{4}{81}$$

$$P(X = 2) = \frac{24}{81}$$

$$P(X = 2) = \frac{8}{27}$$

Der Spieler verliert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ genau zweimal.

Aufgabe 9

▸ Beschreibe den Lösungsweg

Du hast einen Mittelpunkt M einer Kugel und eine Ebene gegeben. Die Ebene berührt die Kugel in einem Berührpunkt B. Eine Gerade durch die Punkte M und B muss demnach **orthogonal** zu der Ebene stehen. Der **Schnittpunkt** dieser Geraden mit der Ebenen entspricht dem Berührpunkt.

Um den Kugelradius und den Berührpunkt zu bestimmen, kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Lotgerade zu der Ebene durch den Mittelpunkt M auf. Dabei dienen die Koordinaten des Punktes M als Stützvektor. Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Lotgerade.
2. Berechne den Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene. Der Schnittpunkt entspricht dem Berührpunkt B.
3. Berechne den Abstand der Punkte M und B. Der Abstand entspricht dem Kugelradius. Den Abstand berechnest du mit der Formel:
   $d = \sqrt{(m_1 - b_1)^2 + (m_2 - b_2)^2 + (m_3 - b_3)^2}$

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe 1.2 a)

▶ Koordinate des Extrempunktes *E* angeben

Gegeben ist der Funktionsterm einer Funktion f mit:

$$\boldsymbol{f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x}}$$

K ist ihr Schaubild. Deine Aufgabe ist es, die Koordinaten des Extrempunktes E zu bestimmen.

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f'(x_E) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f''(x_E) \neq 0}$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstelle der Funktion f. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmte Stelle in den Funktionsterm von f einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Extremstelle.

1. Schritt: Notwendige Bedingung überprüfen

Um die notwendige Bedingung einer Extremstelle der Funktion f zu überprüfen, benötigst du die erste Ableitungsfunktion der Funktion f.
Diese erhältst du, indem du die **Produktregel** anwendest:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 10 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x} \\
f'(x) &= 10 \cdot 1 \cdot e^{-0,5 \cdot x} + 10 \cdot x \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5 \cdot x} \\
&= 10 \cdot e^{-0,5 \cdot x} - 5 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x} \\
&= e^{-0,5 \cdot x} \cdot (10 - 5 \cdot x)
\end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung einer Extremstelle muss $\boldsymbol{f'(x_E) = 0}$ gelten. Setze also den Funktionsterm der ersten Ableitung f' gleich Null und ermittle alle potentielle Werte, für die diese Gleichung erfüllt wird:

$$0 = e^{-0,5 \cdot x} \cdot (10 - 5 \cdot x)$$

An dieser Stelle kannst du den **Satz vom Nullprodukt** anwenden. Da der Term $e^{-0,5 \cdot x}$ für keinen Wert für x gleich Null werden kann, kannst du diesen vernachlässigen.

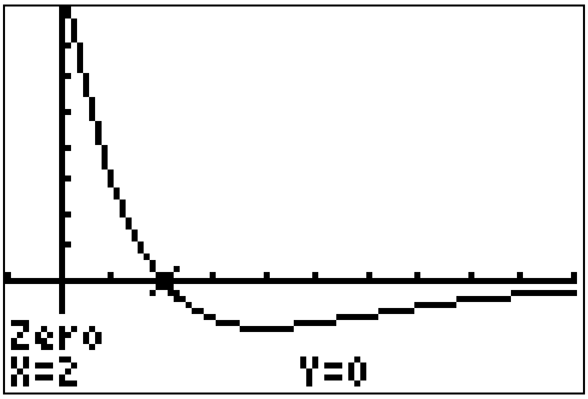
$$\begin{aligned}
0 &= 10 - 5 \cdot x && \mid -10 \\
-10 &= -5 \cdot x && \mid \cdot(-1) \\
10 &= 5 \cdot x && \mid : 5 \\
2 &= x
\end{aligned}$$

Damit hast du eine potentielle Extremstelle an $x_E = 2$ ermittelt und kannst für diese Stelle nun das hinreichende Kriterium überprüfen.

Alternativ bietet es sich auch an, die potentielle Extremstelle mit dem GTR zu bestimmen:
Gib dazu den Term der ersten Ableitungsfunktion f' an und lass deren Schaubild im `Graph`-Modus anzeigen. Wähle dann unter

`menu → CALC → 2: Zero`

den Befehl zum Bestimmen der Nullstelle aus und bestätige mit `Enter`.



Der GTR liefert dir eine potentielle Extremstelle an $x_E = 2$.

2. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Damit eine Extremstelle vorliegt, muss weiterhin die hinreichende Bedingung $\boldsymbol{f''(x_E = 2) \neq 0}$ erfüllt werden. Das heißt, du benötigst zunächst die zweite Ableitung der Funktion f. Diese erhältst du, indem du den Term von f' erneut mit Hilfe der **Produktregel** ableitest:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(10-5\cdot x) \\ f''(x) &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-0,5)\cdot(10-5\cdot x)+\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-5) \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-5+2,5\cdot x)+\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-5) \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-5+2,5\cdot x-5) \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(2,5\cdot x-10) \end{aligned}$$

Überprüfe nun, ob $\boldsymbol{f''(x_E = 2) \neq 0}$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} f''(x_E = 2) &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot 2}\cdot(2,5\cdot 2-10) \\ &= \mathrm{e}^{-1}\cdot(5-10) \\ &= \mathrm{e}^{-1}\cdot(-5) \\ &\approx -1,8394 \neq 0 \end{aligned}$$

Das liefert dir, dass ebenfalls die hinreichende Bedingung erfüllt ist und damit, dass an $x_E = 2$ eine Extremstelle vorliegt. Wegen $f''(x_E = 2) < 0$ kannst du festhalten, dass es sich hierbei um einen **Hochpunkt** handelt.

3. Schritt: Koordinaten des Hochpunktes angeben

Aus den Berechnungen zuvor weißt du, dass sich an der Stelle $x_E = 2$ ein Hochpunkt befindet. Damit hast du die x-Koordinate des Hochpunktes ermittelt. Die y-Koordinate erhältst du, indem du $x_E = 2$ in den Funktionsterm von f einsetzt und berechnest:

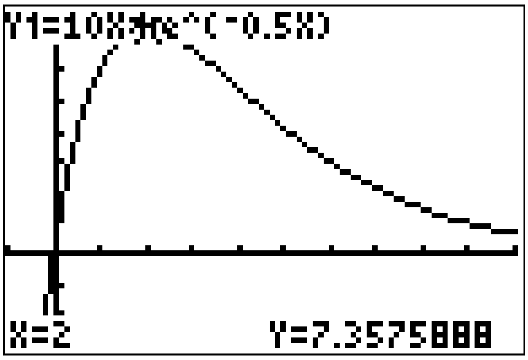
$$\begin{aligned} f(x_E = 2) &= 10\cdot 2\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot 2} \\ &= 20\cdot \mathrm{e}^{-1} \\ &= \frac{20}{\mathrm{e}} \\ &\approx 7,3576 \end{aligned}$$

Alternativ kannst du den Funktionswert an der Stelle $x_E = 2$ auch mit Hilfe des GTR bestimmen. Gib dazu die Funktion f im `Graph`-Modus an und lass deren Graph anzeigen.

Den Funktionswert an der besagten Stelle $x_E = 2$ erhältst du über folgende Befehlsfolge:

`menu → CALC → 1: Value`

Die Koordinaten des Extrempunktes E lauten $E(2 \mid 7,3576)$.



▶ Koordinate des Wendepunktes *W* angeben

Laut Aufgabenstellung besitzt das Schaubild K einen Wendepunkt. Um dessen Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die Wendestelle x_W der Funktion f bestimmen. Für diese Wendestelle müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f''(x_W) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f'''(x_W) \neq 0}$

Hast du anschließend x_W bestimmt, so kannst du die Wendestelle in den Term der Funktion f einsetzen und so die y-Koordinate des Wendepunktes bestimmen.

1. Schritt: Notwendige Bedingung überprüfen

Um die notwendige Bedingung einer Wendestelle der Funktion f zu überprüfen, benötigst du die zweite Ableitungsfunktion der Funktion f. Diese hast du zuvor mit Hilfe der Produktregel bestimmt:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} \cdot (2,5 \cdot x - 10)$$

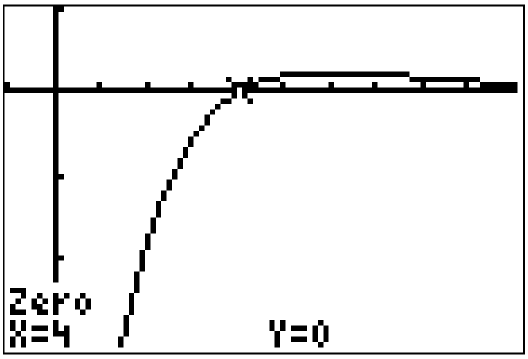
Für die hinreichende Bedingung muss $\boldsymbol{f''(x_W) = 0}$ gelten:

$$0 = \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} \cdot (2,5 \cdot x - 10)$$

An dieser Stelle kannst du den **Satz vom Nullprodukt** anwenden. Da der Term $\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}$ für keinen Wert für x gleich Null werden kann, kannst du diesen vernachlässigen.

$$\begin{aligned} 0 &= 2,5 \cdot x - 10 \qquad && \mid +10 \\ 10 &= 2,5 \cdot x && \mid :2,5 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Damit hast du eine potentielle Wendestelle an $x_W = 4$ ermittelt.



Alternativ bietet es sich auch an, die potentielle Wendestelle mit dem GTR zu bestimmen: Gib dazu den Term der zweiten Ableitungsfunktion an und lass deren Schaubild im `Graph`-Modus anzeigen. Wähle dann unter

`menu → CALC → 2: Zero`

den Befehl zum Bestimmen der Nullstelle aus und bestätige mit `Enter`.

Der GTR liefert dir eine potentielle Wendestelle an $x_W = 4$.

2. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Damit eine Wendestelle vorliegt, muss weiterhin die hinreichende Bedingung $\boldsymbol{f'''(x_W) \neq 0}$ erfüllt werden. Das heißt, du benötigst zunächst die dritte Ableitung der Funktion f. Diese erhältst du, indem du den Term von f'' erneut mit Hilfe der **Produktregel** ableitest:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(2,5\cdot x - 10)$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -0,5\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(2,5\cdot x-10)+\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot 2,5 \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-1,25\cdot x+5)+\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot 2,5 \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-1,25\cdot x+5+2,5) \\ &= \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\cdot(-1,25\cdot x+7,5) \end{aligned}$$

Überprüfe nun, ob $\boldsymbol{f'''(x_W = 4) \neq 0}$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} f'''(x_W = 4) =&\ \mathrm{e}^{-0,5\cdot 4}\cdot(-1,25\cdot 4+7,5) \\ =&\ \mathrm{e}^{-2}\cdot(-5+7,5) \\ =&\ \mathrm{e}^{-2}\cdot 2,5 \\ \approx&\ 0,338 \neq 0 \end{aligned}$$

Das liefert dir, dass ebenfalls die hinreichende Bedingung erfüllt ist und damit, dass an $x_W = 4$ eine Wendestelle liegt.

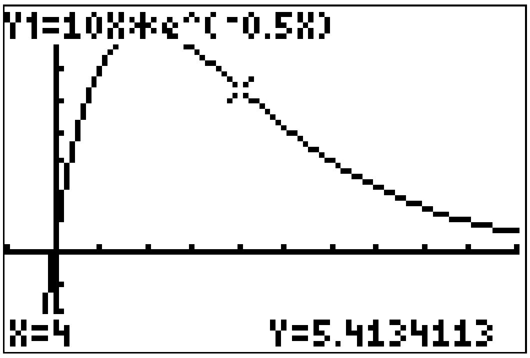
3. Schritt: Koordinaten des Wendepunktes angeben

Aus den Berechnungen zuvor weißt du, dass sich an der Stelle $x_W = 4$ ein Wendepunkt befindet. Damit hast du die x-Koordinate des Wendepunktes ermittelt. Die y-Koordinate erhältst du, indem du $x_W = 4$ in den Funktionsterm von f einsetzt und berechnest:

$$\begin{aligned} f(x_W = 4) =&\ 10\cdot 4\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot 4} \\ =&\ 40\cdot\mathrm{e}^{-2} \\ =&\ \frac{40}{\mathrm{e}^2} \\ \approx&\ 5,413 \end{aligned}$$

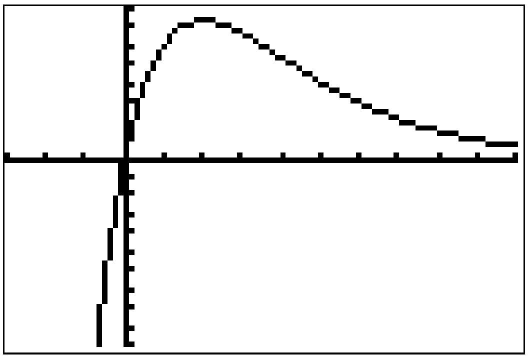
Alternativ kannst du den Funktionswert an der Stelle $x_W = 4$ auch mit Hilfe des GTR bestimmen. Gib dazu die Funktion f im `Graph`-Modus an und lass deren Graph anzeigen. Den Funktionswert an der besagten Stelle $x_W = 4$ erhältst du über folgende Befehlsfolge:

`menu → CALC → 1: Value`



Die Koordinaten des des Wendepunktes W lauten $W(4\,|\,5,413)$.

▶ **Gleichung der Asymptote von K angeben**



Betrachte das Schaubild der Funktion f in deinem GTR.
Deine Aufgabe ist es, die Gleichung der Asymptote von K anzugeben.

Anhand des Schaubildes (Abbildung links) kannst du bereits vermuten, dass es sich um eine **waagrechte Asymptote** handelt.
Um die Gleichung der Asymptote zu bestimmen, kannst du die Funktion f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ untersuchen.

Untersuchen für $x \to +\infty$:

Der Funktionsterm von f ist gegeben durch $f(x) = 10 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}$.
Betrachtest du $x \to +\infty$, so kannst du festhalten, dass gilt:

$$10 \cdot x \to +\infty \text{ und } \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{0,5\cdot x}} \to 0$$

Da der e-Term den dominanten Term darstellt, konvergiert die Funktion f für $x \to +\infty$ gegen 0.
Die Gleichung der Asymptote lautet also $y = 0$.

Untersuchen für $x \to -\infty$:

Betrachtest du noch $x \to -\infty$, so kannst du festhalten, dass gilt:

$$10 \cdot x \to -\infty \text{ und } \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{0,5\cdot x}} \to +\infty$$

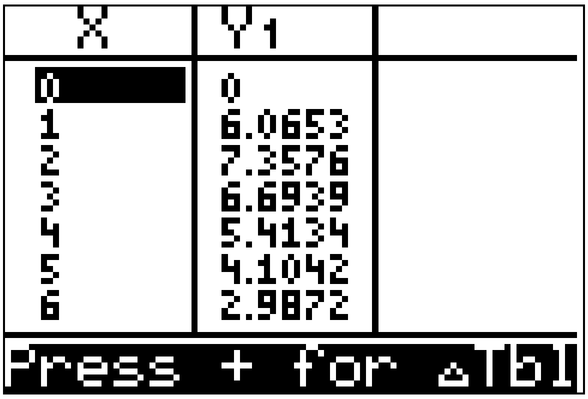
Da auch hier der e-Term den dominanten Term darstellt, strebt die Funktion f für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$. Damit liegt keine weitere Asymptote vor.

▸ Skizzieren des Schaubildes K

Weiterhin verlangt die Aufgabenstellung, das Schaubild K zu skizzieren. Dabei kannst du folgende Angaben verwenden:

- Betrachte das Schaubild in deinem GTR, indem du den `Graph`-Modus auswählst.
- Verwende, dass sich der Hochpunkt an $E(2 \mid 7{,}3576)$ und der Wendepunkt an $W(4 \mid 5{,}413)$ befindet.
- Für $x \to +\infty$ konvergiert die Funktion gegen 0, für $x \to -\infty$ strebt sie gegen $-\infty$.

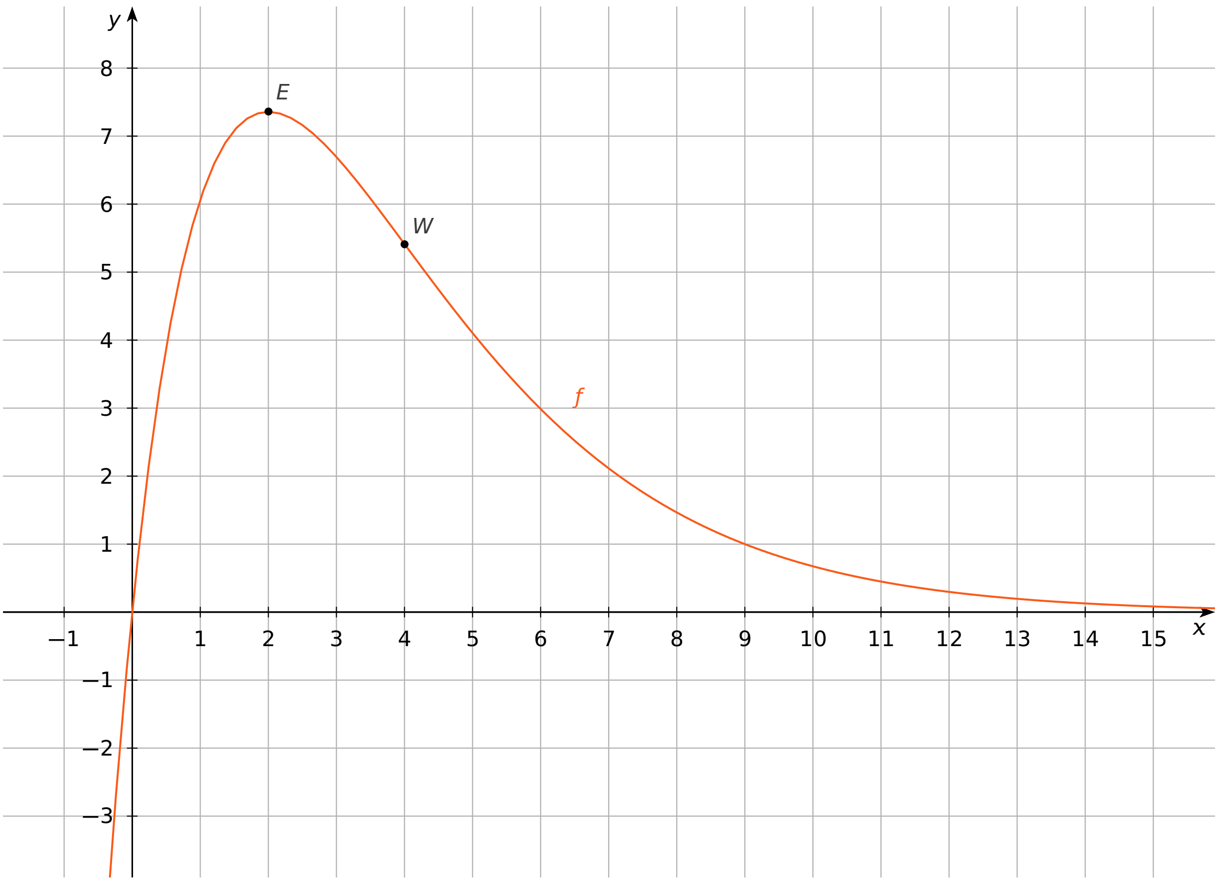
Zusätzlich kannst du dir noch die zugehörige Wertetabelle der Funktion einblenden lassen. Diese findest du im `Graph`-Modus unter $\boxed{\text{TABLE}}$:



X	Y1	
0	0	
1	6.0653	
2	7.3576	
3	6.6939	
4	5.4134	
5	4.1042	
6	2.9872	

Press + for ΔTbl

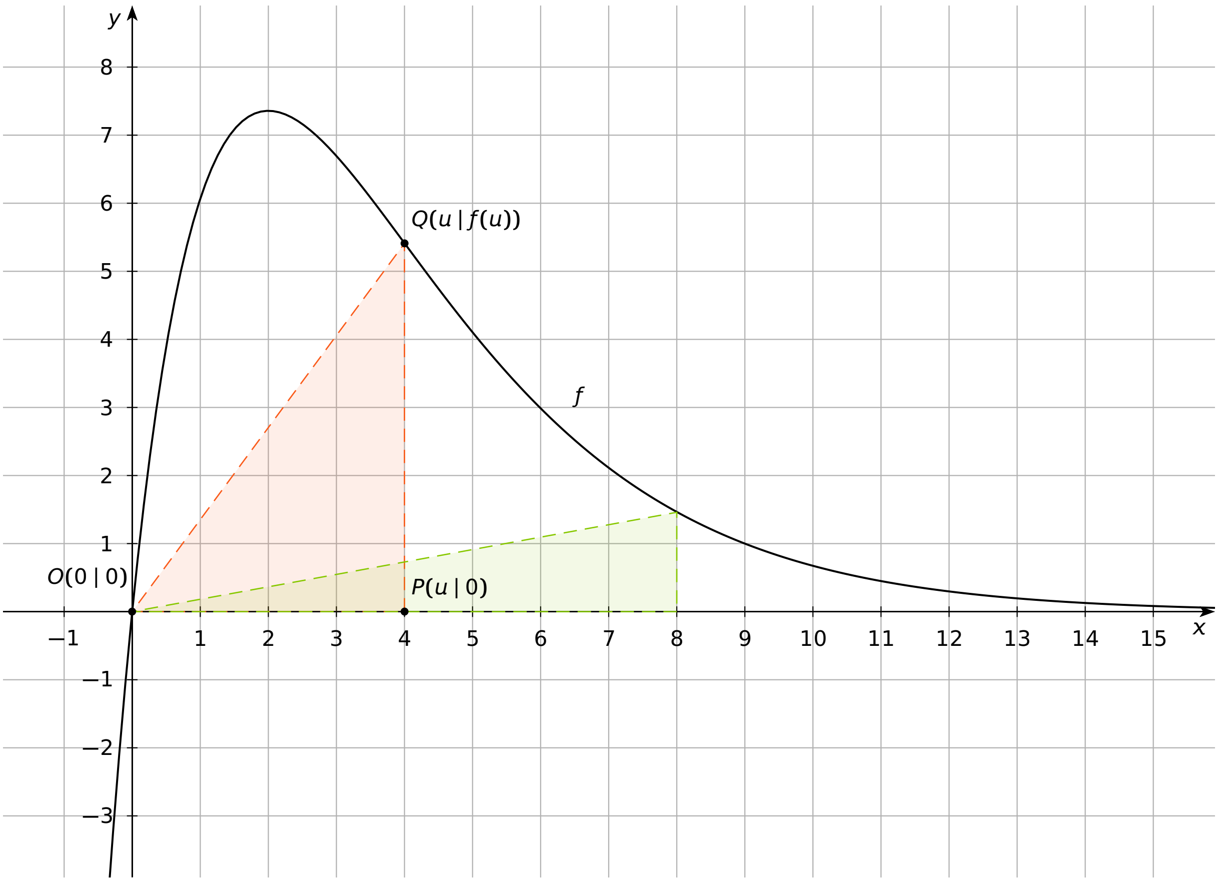
Das Schaubild K sollte dann folgendermaßen aussehen:



b)

▸ Wert für u bestimmen, sodass der Flächeninhalt 8 FE beträgt

Gegeben sind die Punkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$ und $Q(u \mid f(u))$. Sie stellen die Eckpunkte eines Dreiecks dar.
Deine Aufgabe ist es, einen Wert für u so zu bestimmen, dass der Flächeninhalt des Dreieck 8 FE beträgt.



Der Flächeninhalt A_D eines Dreiecks berechnet sich allgemein über folgenden Zusammenhang:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Dabei stellt g die Länge der Grundseite und h die Länge der Höhe dar.
Um einen passenden Wert für u zu ermitteln, kannst du wie folgt vorgehen:

- Stelle die Flächenfunktion in Abhängigkeit vom Parameter u auf.
- Setze den resultierenden Term mit 8 gleich und löse nach u auf, um den gesuchten Wert zu erhalten.

Den zweiten Schritt kannst du mit Hilfe des GTR durchführen.

1. Schritt: Flächenfunktion aufstellen

Anhand der Abbildung kannst du erkennen, dass die Grundseite dem Wert u und die Höhe dem Funktionswert $f(u)$ entspricht. Dadurch erhältst du folgende von u abhängige Flächenfunktion $A(u)$:

$$\boldsymbol{A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)}$$

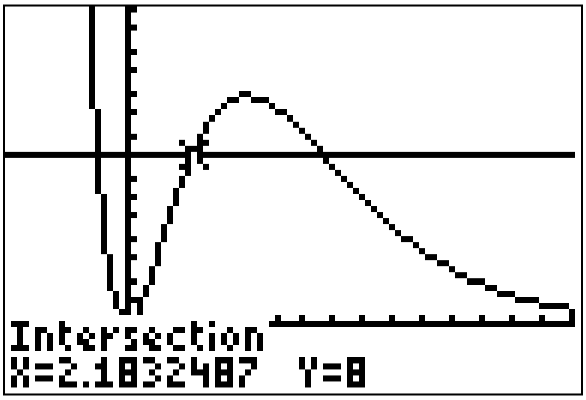
Setze den Funktionsterm von f ein, um den vollständigen Term er Flächenfunktion $A(u)$ zu erhalten:

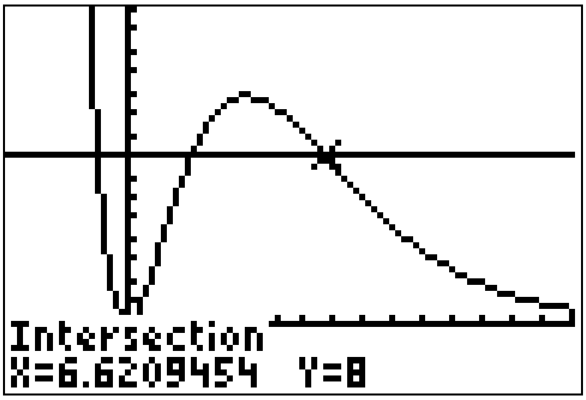
$$\boldsymbol{A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u} = 5 \cdot u^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u}}$$

2. Schritt: Wert für Parameter u ermitteln

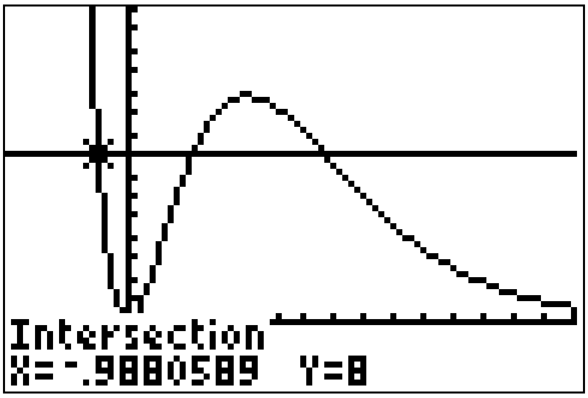
Um einen passenden Wert für u zu erhalten, sodass der Flächeninhalt 8 FE beträgt, kannst du den aufgestellten Term der Flächenfunktion mit 8 gleichsetzen und nach u auflösen. Da dieser Weg rechnerisch sehr aufwendig ist, wählen wir die graphische Lösung des Problems mit Hilfe des GTR:

- Gib den Funktionsterm $A(u)$ im GTR ein.
- Gib weiterhin eine Gerade mit der Gleichung $y = 8$ an und lass beide im `Graph`-Modus anzeigen.
- Bestimme die Schnittstelle der beiden Schaubilder. Diese entspricht gerade dem gesuchten Wert für u.





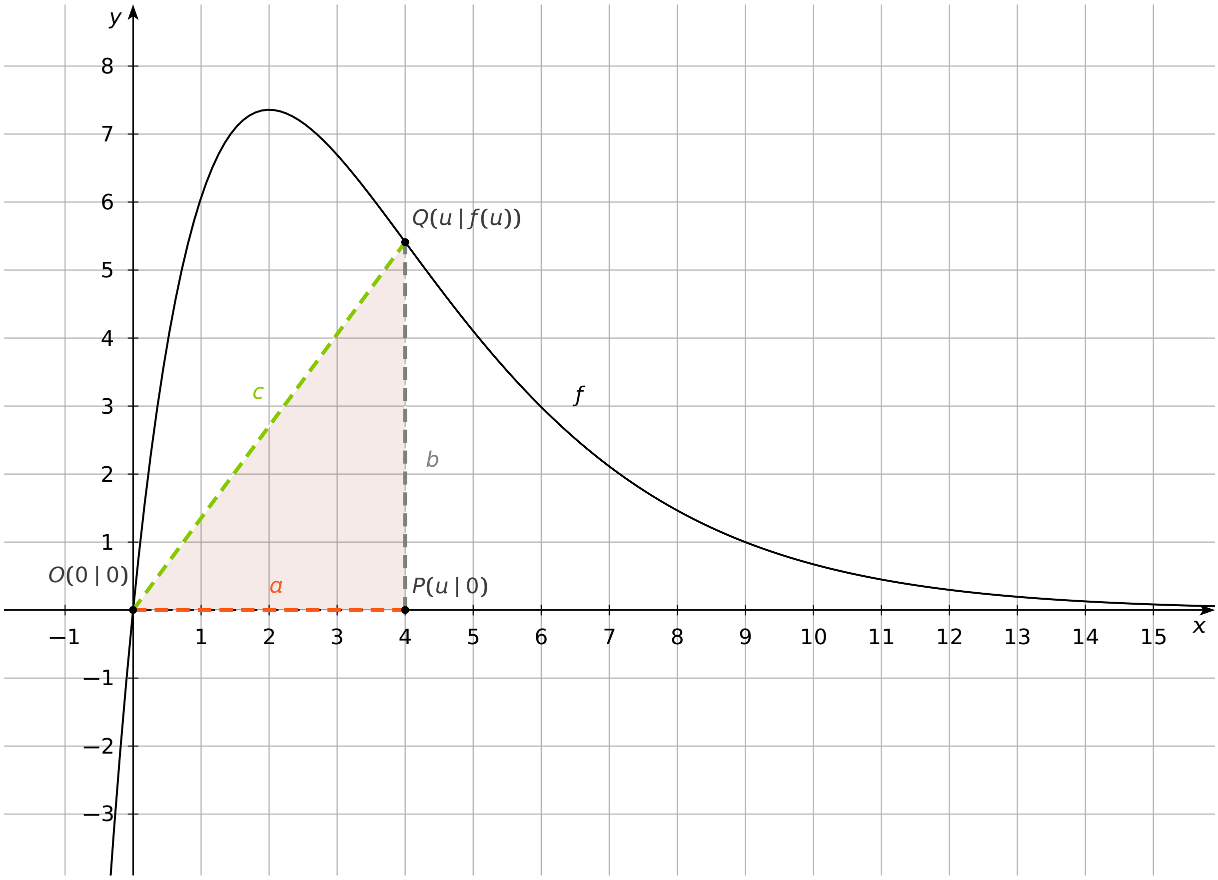
Der GTR liefert dir drei verschiedene Werte für u, sodass der Flächeninhalt 8 FE beträgt.
Da aber laut Aufgabenstellung $u > 0$ gelten soll, kannst du das Resultat $u_0 \approx -0,988$ vernachlässigen.



Damit hast du zwei passende Werte für u ermittelt mit

- $u_1 \approx 2,183$,
- $u_2 \approx 6,621$.

▶ Wert für u bestimmen, sodass das Dreieck gleichschenklig ist



Damit das Dreieck **gleichschenklig** ist, muss einer der folgenden Fälle eintreten:

- $a = b$ oder
- $a = c$ oder
- $b = c$.

Gib dazu zunächst die Länge der Seiten a, b und c in Abhängigkeit von u an und setze diese gleich, um so einen passenden Parameterwert für u zu ermitteln.

1. Schritt: Länge der Seiten in Abhängigkeit von u angeben

- Die Seitenlänge a entspricht gerade dem Abstand vom Ursprung $O(0 \mid 0)$ zum Punkt $P(u \mid 0)$. Dieser Abstand ist gerade gleich u.
- Die Seitenlänge b stellt den Abstand zwischen den Punkten $P(u \mid 0)$ und $Q(u \mid f(u))$ dar. Da diese die gleiche x-Koordinate haben, besitzen sie einen Abstand von $f(u) = 10 \cdot u \cdot e^{-0,5 \cdot u}$.
- c berechnet sich mit Hilfe des Satz von Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{u^2 + f(u)^2} = \sqrt{u^2 + 10 \cdot u \cdot e^{-0,5 \cdot u}}$.

2. Schritt: Seitenlängen gleichsetzen, um *u* zu bestimmen

Damit das Dreieck gleichschenklig ist, können die oben genannten drei Fälle $a = b$, $b = c$ oder $a = c$ eintreten. Wir überprüfen zunächst, ob für den Fall $a = c$ ein u existiert:

1. Fall: $a = c$

$$\begin{aligned}
a &= c \\
u &= \sqrt{u^2 + 10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u}} && \mid ()^2 \\
u^2 &= u^2 + 10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u} && \mid -u^2 \\
0 &= 10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u}
\end{aligned}$$

Mit dem **Satz vom Nullprodukt** folgt, dass die Gleichung nur für $u = 0$ gelöst werden kann. Da aber für $u = 0$ kein Dreieck zustande kommt, kannst du diesen Wert vernachlässigen. Geometrisch interpretiert heißt das, dass die Seiten a und c in dieser Konstruktion niemals gleich lang werden.

2. Fall: $b = c$

Als nächstes überprüfen wir, ob ein u für den Fall $b = c$ existiert.

$$\begin{aligned}
b &= c \\
10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u} &= \sqrt{u^2 + \left(10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u}\right)^2} && \mid ()^2 \\
100 \cdot u^2 \cdot \mathrm{e}^{-u} &= u^2 + 100 \cdot u^2 \cdot \mathrm{e}^{-u} && \mid -100 \cdot u^2 \cdot \mathrm{e}^{-u} \\
0 &= u^2
\end{aligned}$$

Auch diese Gleichung hat nur die Lösung $u = 0$, was wiederum heißt, dass die Seiten b und c niemals gleich lang werden.

3. Fall: $a = b$

Überprüfe noch den letzten Fall $a = b$:

$$\begin{aligned}
a &= b \\
u &= 10 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u} && \mid : (10 \cdot u) \\
\frac{1}{10} &= \mathrm{e}^{-0,5 \cdot u} && \mid \ln() \\
\ln\left(\frac{1}{10}\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{-0,5 \cdot u}\right) \\
\ln\left(\frac{1}{10}\right) &= (-0,5 \cdot u) \cdot \ln(\mathrm{e}) \\
\ln\left(\frac{1}{10}\right) &= -0,5 \cdot u && \mid : (-0,5) \\
u &= \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{-0,5} \approx 4,605
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt dividieren wir durch $10 \cdot u$, da für die Lösung $u = 0$ kein Dreieck entsteht. Durch Auflösen der Gleichung erhältst du den gesuchten Parameterwert für u mit $u = 4,605$. Das heißt, für $u = 4,605$ ist das Dreieck gleichschenklig. c)

▶ Grenzen des Intervalls bestimme, sodass der Mittelwert 2,2 beträgt

Bestimme ein Intervall der Länge 3, sodass die Funktion f mit dem gegebenen Funktionsterm $f(x) = 10 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot x}$ den Mittelwert 2,2 besitzt.

Den Mittelwert m einer Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$ kannst du mit Hilfe der folgenden Formel bestimmen:

$$m=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Um das gesuchte Intervall zu bestimmen, kannst du diese Angaben verwenden:

- Der Mittelwert beträgt laut Aufgabentext $m=2,2$.
- Die Länge des Intervalls soll 3 betragen, das heißt, es muss $b-a=3$ bzw. $b=a+3$ gelten.

Setze alle bekannten Informationen in die oben angeführte Formel ein und bestimme so das gesuchte Intervall.
Einsetzen aller Angaben liefert dir:

$$\begin{aligned}
2,2&=\frac{1}{3}\cdot\int_a^b 10\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\mathrm{d}x \qquad \mid \cdot 3\\
6,6&=\int_a^{a+3} 10\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Um an dieser Stelle die Stammfunktion von f zu erhalten, kannst du **partielle Integration** verwenden:

$$\int_a^b h'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=h(b)\cdot g(b)-h(a)\cdot g(a)-\int_a^b h(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

Wähle in diesem Fall:

- $h'(x)=\mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\rightarrow h(x)=-2\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}$
- $g(x)=10\cdot x\rightarrow g'(x)=10$

Einsetzen in die oben angeführte Formel liefert dir das gesuchte Integral von f:

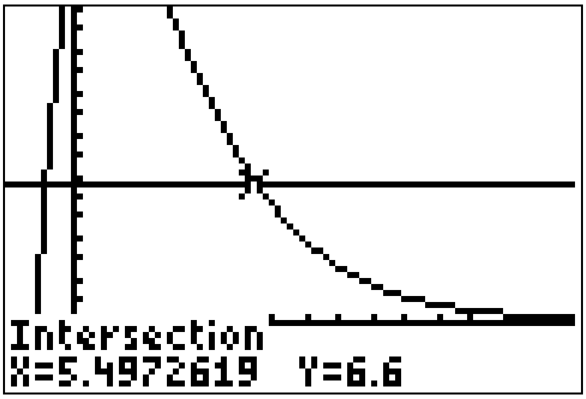
$$\begin{aligned}
6,6=\int_a^b 10\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\mathrm{d}x&=-2\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot b}\cdot 10\cdot b-(-2\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a})\cdot 10\cdot a-\int_a^b 10\cdot\left(-2\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\right)\mathrm{d}x\\
&=-20\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+20\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}-\int_a^b -20\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\mathrm{d}x\\
&=-20\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+20\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}-\left[40\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\right]_a^b\\
&=-20\cdot b\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+20\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}-40\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+40\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}
\end{aligned}$$

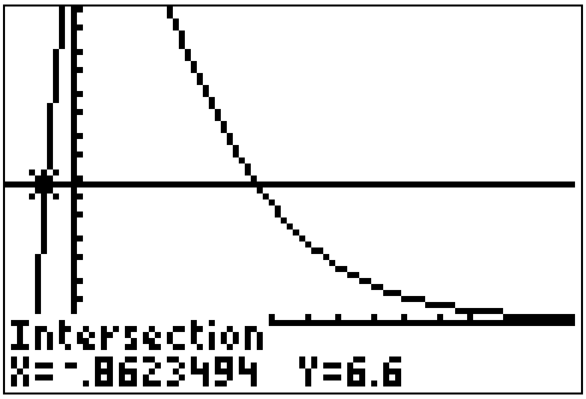
Setze anschließend noch a und $b=a+3$ ein:

$$\begin{aligned}
6,6=\int_a^{a+3} 10\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x}\mathrm{d}x&=-20\cdot(a+3)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot(a+3)}+20\cdot a\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}-40\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot(a+3)}+40\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot a}\\
&=\mathrm{e}^{-0,5\cdot(a+3)}(-20\cdot(a+3)-40)+\mathrm{e}^{-0,5\cdot a}\cdot(20\cdot a+40)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du graphisch mit Hilfe deines GTR lösen. Gib dazu die rechte und linke Seite der Gleichung als separate Funktionen ein und bestimme deren Schnittpunkt. Den Befehl zur Bestimmung von Schnittpunkten findest du unter

$\boxed{\text{menu} \rightarrow \text{CALC} \rightarrow \text{intersect}}$.





Der GTR liefert dir Schnittstellen an $x_1 = -0,862$ und $x_2 = 5,497$. Das heißt, für das Intervall $[a;b]$ mit $a_1 = -0,862$ und $b_1 = 3 + (-0,862) = 2,138$ sowie $a_2 = 5,497$ und $b_2 = 3 + 5,497 = 8,497$ beträgt der Mittelwert der Funktion 2,2.

Aufgabe 1.2

▶ Parameter *t* bestimmen

Gegeben ist der Funktionsterm einer Funktion f mit:

$$\boldsymbol{f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - t^2 \cdot x}$$

Deine Aufgabe ist es, den Parameter t so zu bestimmen, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t einen Abstand von 13 besitzen.
Dazu kannst du wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von t.
- Berechne den Abstand d der Extrempunkte.
- Bestimme t so, dass der Abstand gerade 13 beträgt.

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f'(x_E) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f''(x_E) \neq 0}$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstellen der Funktion f_t. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmten Stellen in den Funktionsterm von f_t einsetzen und erhältst so die zugehörigen Funktionswerte an den Extremstellen.

1. Schritt: Extrempunkte bestimmen (Notwendige Bedingung)

Um die notwendige Bedingung einer Extremstelle der Funktion f_t zu überprüfen, benötigst du die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_t. Diese erhältst du, indem du die **Produktregel** anwendest:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \tfrac{1}{3} \cdot x^3 - t^2 \cdot x \\ f_t'(x) &= \tfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - t^2 \cdot 1 \\ &= x^2 - t^2 \end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung einer Extremstelle muss $\boldsymbol{f_t'(x_E) = 0}$ gelten. Setze also den

Funktionsterm der ersten Ableitung f_t' gleich Null und ermittle alle potentielle Werte, für die diese Gleichung erfüllt wird.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - t^2 &&\mid +t^2 \\ t^2 &= x^2 &&\mid \sqrt{()} \\ \pm t &= x \end{aligned}$$

Damit hast du zwei potentielle Extremstellen an $x_{E1} = t$ und $x_{E2} = -t$ ermittelt und kannst für diese Stellen nun das hinreichende Kriterium überprüfen.

2. Schritt: Extrempunkte bestimmen (Hinreichende Bedingung)

Damit eine Extremstelle vorliegt, muss weiterhin die hinreichende Bedingung $\boldsymbol{f''(x_E) \neq 0}$ erfüllt werden. Das heißt, du benötigst zunächst die zweite Ableitung der Funktion f_t. Diese erhältst du, indem du den Term von f_t' erneut ableitest:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= x^2 - t^2 \\ f_t''(x) &= 2 \cdot x \end{aligned}$$

Überprüfe nun, ob $\boldsymbol{f''(x_E = \pm t) \neq 0}$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} f_t''(x_E = \pm t) &= 2 \cdot x \\ &= 2 \cdot \pm t \neq 0 \end{aligned}$$

Da in der Aufgabenstellung $t > 0$ vorausgesetzt wird, kann die zweite Ableitungsfunktion nicht gleich Null werden.
Das liefert dir, dass ebenfalls die hinreichende Bedingung erfüllt ist und damit, dass an $x_E = \pm t$ Extremstellen vorliegen.
Wegen $f_t''(x_{E1} = t) > 0$ kannst du festhalten, dass es sich hierbei um einen **Tiefpunkt** und handelt. Analog kannst du aussagen, dass wegen $f_t''(x_{E2} = -t) < 0$ an der Stelle $x = -t$ ein **Hochpunkt** vorliegt.

3. Schritt: Koordinaten der Extrempunkte angeben

Aus den Berechnungen zuvor weißt du, dass sich an den Stellen $x_{E1} = t$ und $x_{E2} = -t$ Extrempunkte befinden. Damit hast du die x-Koordinate der Extrempunkte ermittelt. Die y-Koordinate erhältst du, indem du $x_E = \pm t$ in den Funktionsterm von f_t einsetzt und berechnest:

$$\begin{aligned} f(x_{E1} = t) &= \tfrac{1}{3} \cdot t^3 - t^2 \cdot t \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot t^3 - t^3 \\ &= -\tfrac{2}{3} \cdot t^3 \end{aligned}$$

Das liefert dir, dass der Tiefpunkt die Koordinaten $T\left(t \mid -\frac{2}{3} \cdot t^3\right)$ besitzt.

$$\begin{aligned} f(x_{E2} = -t) &= \tfrac{1}{3} \cdot (-t)^3 - t^2 \cdot (-t) \\ &= -\tfrac{1}{3} \cdot t^3 + t^3 \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot t^3 \end{aligned}$$

Das liefert dir, dass der Hochpunkt die Koordinaten $H\left(-t \mid \frac{2}{3} \cdot t^3\right)$ besitzt.

4. Schritt: Abstand der Extrempunkte bestimmen

Den Abstand d zweier Punkte $A(a_1 \mid a_2)$ und $B(b_1 \mid b_2)$ kannst du über folgenden Zusammenhang bestimmen:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}$$

Einsetzen der Koordinaten der Extrempunkte $T\left(t \mid -\frac{2}{3} \cdot t^3\right)$ und $H\left(-t \mid \frac{2}{3} \cdot t^3\right)$ liefert dir den Abstand mit:

$$d = \sqrt{(-t - t)^2 + \left(-\frac{2}{3} \cdot t^3 - \frac{2}{3} \cdot t^3\right)^2}$$
$$d = \sqrt{(-2 \cdot t)^2 + \left(-\frac{4}{3} \cdot t^3\right)^2}$$
$$d = \sqrt{4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6}$$

Der Abstand der Extrempunkte T und H beträgt also $\sqrt{4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6}$.

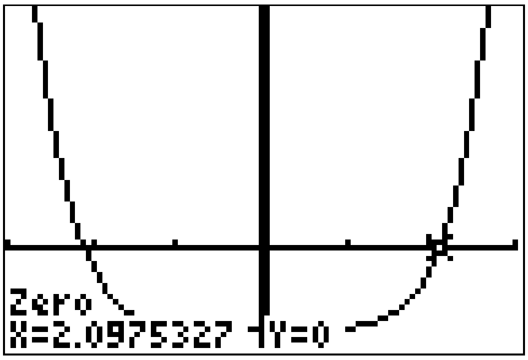
5. Schritt: Parameterwert für t bestimmen

Damit die beiden Extrempunkte einen Abstand von 13 haben, muss $\boldsymbol{13 = d = \sqrt{4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6}}$ gelten. Löse diese Gleichung nach t auf, um den gesuchten Parameterwert zu erhalten.

$$\begin{aligned} 13 &= \sqrt{4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6} && \mid ()^2 \\ 169 &= 4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6 && \mid -169 \\ 0 &= 4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6 - 169 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du mit Hilfe des GTR graphisch lösen. Interpretiere dazu den Term $4 \cdot t^2 + \frac{16}{9} \cdot t^6 - 169$ als Funktionsterm und untersuche diesen auf Nullstellen.
Der GTR liefert dir zwei Resultate:

- $t_1 = 2,1$
- $t_2 = -2,1$



Da laut Aufgabenstellung aber $0 < t$ gelten soll, ist t_1 das gesuchte Ergebnis.
Es muss $t = 2,1$ gelten, damit der Abstand der beiden Extrempunkte 13 beträgt.

Wahlteil Aufgabe A 2

Aufgabe 2.1 a)

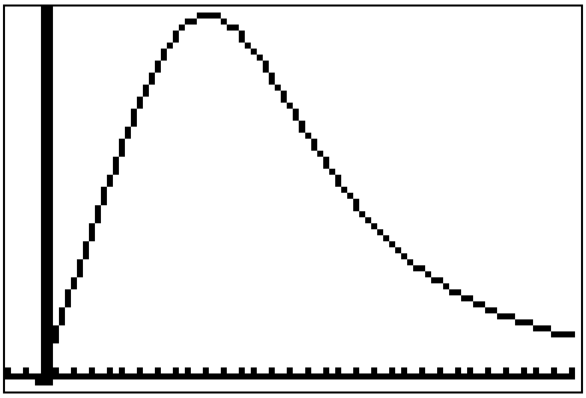
▶ Graphen von f skizzieren

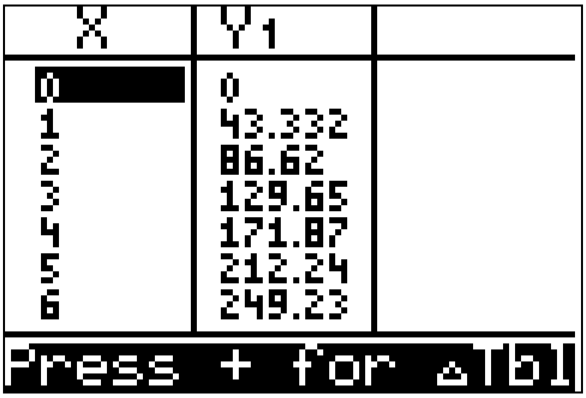
Die Funktion f beschreibt die momentane Ankunftsrate ankommender Fahrzeuge an einem Grenzübergang. Ihr Funktionsterm ist gegeben durch:

$$f(t) = \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000}$$

Dabei sind t die Stunden nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Fahrzeuge pro Stunde. Laut Aufgabentext befinden sich zu Beginn keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.
Deine Aufgabe ist es, den Graphen der Funktion f im Intervall $[0; 30]$ zu skizzieren. Dabei kannst du folgendermaßen vorgehen:

- Betrachte das Schaubild in deinem GTR, indem du den Graph-Modus auswählst.
- Lasse dir die zugehörige Wertetabelle der Funktion einblenden. Diese findest du im Graph-Modus unter $\boxed{\text{TABLE}}$:

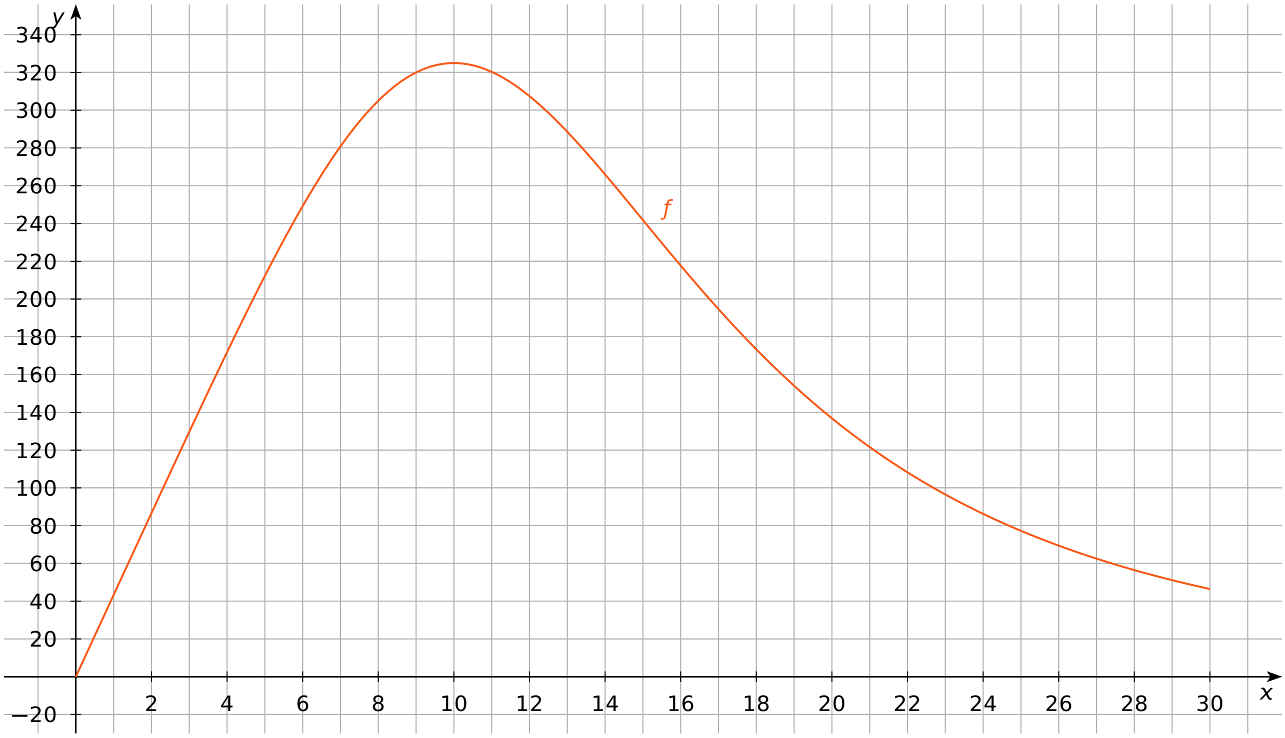




X	Y1	
0	0	
1	43.332	
2	86.62	
3	129.65	
4	171.87	
5	212.24	
6	249.23	

Press + for ΔTbl

Das Schaubild K sollte dann folgendermaßen aussehen:



▸ **Maximale momentane Ankunftsrate bestimmen**

Die Funktion f beschreibt die momentane Ankunftsrate von Fahrzeugen pro Stunde. Um die maximale momentane Ankunftsrate zu ermitteln, kannst du zunächst den **Hochpunkt** der Funktion f bestimmen.
Um die Koordinaten des Hochpunktes angeben zu können, musst du die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Maximalstellen überprüfen.
Für eine Maximalstelle t_M einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f'(t_M) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f''(t_M) < 0}$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Maximalstelle der Funktion f. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmte Stelle in den Funktionsterm von f einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Maximalstelle. Dieser Funktionswert entspricht gerade der gesuchten maximalen Ankunftsrate.

1. Schritt: Notwendige Bedingung überprüfen

Um die notwendige Bedingung einer Maximalstelle der Funktion f zu überprüfen, benötigst du die erste Ableitungsfunktion der Funktion f.
Diese erhältst du, indem du die **Produktregel** anwendest:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000} \\ &= (1.300.000 \cdot t) \cdot (t^4 + 30.000)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1.300.000 \cdot (t^4 + 30.000)^{-1} + (1.300.000 \cdot t) \cdot (-1) \cdot (t^4 + 30.000)^{-2} \cdot (4 \cdot t^3) \\ &= 1.300.000 \cdot (t^4 + 30.000)^{-1} - (1.300.000 \cdot t) \cdot (t^4 + 30.000)^{-2} \cdot (4 \cdot t^3) \end{aligned}$$

Für die notwendige Bedingung einer Maximalstelle muss $\boldsymbol{f'(x_M) = 0}$ gelten. Setze den Funktionsterm der ersten Ableitung f' mit Null gleich und ermittle alle potentielle Werte, für die diese Gleichung erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
0 =&\ 1.300.000 \cdot (t^4 + 30.000)^{-1} \\
&-(1.300.000 \cdot t) \cdot (t^4 + 30.000)^{-2} \cdot (4 \cdot t^3) && \mid : 1.300.000 \\
0 =&\ (t^4 + 30.000)^{-1} - 4 \cdot t^4 \cdot (t^4 + 30.000)^{-2} && \mid \cdot (t^4 + 30.000)^2 \\
0 =&\ t^4 + 30.000 - 4 \cdot t^4 \\
0 =&\ 30.000 - 3 \cdot t^4 && \mid +3 \cdot t^4 \\
3 \cdot t^4 =&\ 30.000 && \mid : 3 \\
t^4 =&\ 10.000 && \mid ^{\left(\frac{1}{4}\right)} \\
t_{1,2} =&\ \pm 10
\end{aligned}$$

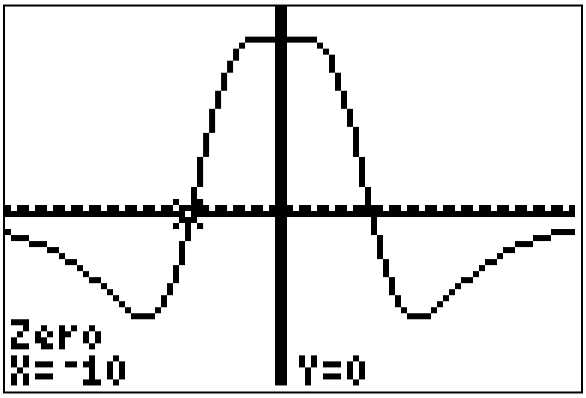
Damit hast du zwei potentielle Maximalstellen an $t_{1,2} = \pm 10$ ermittelt und kannst für diese Stellen nun das hinreichende Kriterium überprüfen.

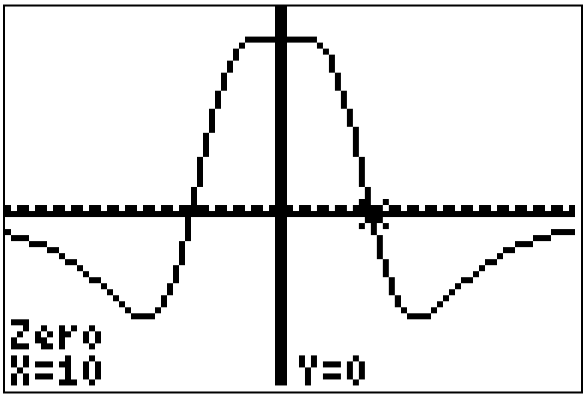
Alternativ bietet es sich auch an, die potentiellen Maximalstellen mit dem GTR zu bestimmen:
Gib dazu den Term der ersten Ableitungsfunktion f' an und lass deren Schaubild im `Graph`-Modus anzeigen. Wähle dann unter

`menu → CALC → 2: Zero`

den Befehl zum Bestimmen der Nullstelle aus und bestätige mit `Enter`.

Der GTR liefert dir zwei potentielle Maximalstellen an $t_{1,2} = \pm 10$.





2. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Damit eine Maximalstelle vorliegt, muss weiterhin die hinreichende Bedingung $\boldsymbol{f''(t_{1,2} = \pm 10) < 0}$ erfüllt werden. Das heißt, du benötigst zunächst die zweite Ableitung der Funktion f. Diese erhältst du, indem du den Term von f' erneut mit Hilfe der **Produktregel** ableitest:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 1.300.000 \cdot (t^4+30.000)^{-1} - (5.200.000 \cdot t^4) \cdot (t^4+30.000)^{-2} \\
f''(t) &= -1.300.000 \cdot (t^4+30.000)^{-2} \cdot (4 \cdot t^3) - 4 \cdot 5.200.000 \cdot t^3 \cdot (t^4+30.000)^{-2} \\
&\quad -(-2) \cdot (5.200.000 \cdot t^4) \cdot (t^4+30.000)^{-3} \cdot (4 \cdot t^3) \\
&= -5.200.000 \cdot t^3 \cdot (t^4+30.000)^{-2} - 20.800.000 \cdot t^3 \cdot (t^4+30.000)^{-2} \\
&\quad +(41.600.000 \cdot t^7) \cdot (t^4+30.000)^{-3} \\
&= -26.000.000 \cdot t^3 \cdot (t^4+30.000)^{-2} + 41.600.000 \cdot t^7 \cdot (t^4+30.000)^{-3}
\end{aligned}$$

Überprüfe nun, ob $\boldsymbol{f''(t_1=10)<0}$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
f''(t_1=10) &= -26.000.000 \cdot (10)^3 \cdot ((10)^4+30.000)^{-2} + 41.600.000 \cdot (10)^7 \cdot ((10)^4+30.000)^{-3} \\
&= -26.000.000 \cdot 1.000 \cdot (10.000+30.000)^{-2} \\
&\quad +41.600.000 \cdot 10.000.000 \cdot (10.000+30.000)^{-3} \\
&= -26.000.000.000 \cdot (40.000)^{-2} + 41.600.000 \cdot 10.000.000 \cdot (40.000)^{-3} \\
&= -\tfrac{65}{4} + \tfrac{13}{20} \\
&= -\tfrac{78}{5} < 0
\end{aligned}$$

Bzw. ob $\boldsymbol{f''(t_2=-10)<0}$ ebenfalls gilt:

$$\begin{aligned}
f''t_2=-10) &= -26.000.000 \cdot (-10)^3 \cdot ((-10)^4+30.000)^{-2} \\
&\quad +41.600.000 \cdot (-10)^7 \cdot ((-10)^4+30.000)^{-3} \\
&= -26.000.000 \cdot (-1.000) \cdot (10.000+30.000)^{-2} \\
&\quad +41.600.000 \cdot (-10.000.000) \cdot (10.000+30.000)^{-3} \\
&= 26.000.000.000 \cdot (40.000)^{-2} - 41.600.000 \cdot 10.000.000 \cdot (40.000)^{-3} \\
&= \tfrac{65}{4} - \tfrac{13}{20} \\
&= \tfrac{78}{5} > 0
\end{aligned}$$

Damit ist die hinreichende Bedingung nur für $\boldsymbol{t_1=1}$ erfüllt und es liegt nur an der Stelle $\boldsymbol{t_1=1}$ eine Maximalstelle vor.

3. Schritt: Koordinaten des Hochpunktes angeben

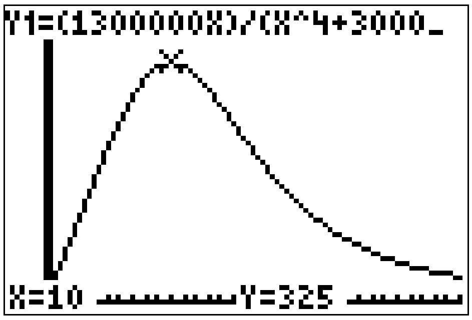
Aus den Berechnungen zuvor weißt du, dass sich an der Stelle $t_1=10$ ein Hochpunkt befindet. Damit hast du die x-Koordinate des Hochpunktes ermittelt. Die y-Koordinate erhältst du, indem du $t_1=10$ in den Funktionsterm von f einsetzt und berechnest:

$$\begin{aligned}
f(t_1=10) &= \frac{1.300.000 \cdot 10}{10^4+30.000} \\
&= \frac{13.000.000}{10.000+30.000} \\
&= \frac{13.000.000}{40.000} \\
&= 325
\end{aligned}$$

Alternativ kannst du den Funktionswert an der Stelle $t_1 = 10$ auch mit Hilfe des GTR bestimmen. Gib dazu die Funktion f im `Graph`-Modus an und lass deren Graph anzeigen.

Den Funktionswert an der besagten Stelle $t_1 = 10$ erhältst du über folgende Befehlsfolge:

`menu → CALC → 1: Value`



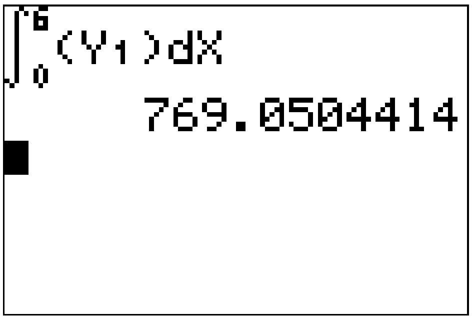
Die Koordinaten des Hochpunktes H lauten $H(10 \mid 325)$. Die maximale momentane Ankunftsrate beträgt demnach 325 Fahrzeuge pro Stunde.

▸ Anzahl der Fahrzeuge bestimmen, die in den ersten 6 Stunden ankommen

Beschreibt die Funktion f die momentane Ankunftsrate, so entspricht ihre Stammfunktion F der Anzahl der ankommenden Fahrzeuge. Bestimme die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden am Grenzübergang ankommen. Diese Anzahl erhältst du über folgenden Zusammenhang:

$$\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^6 \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000}\mathrm{d}t$$

Laut Aufgabentext befinden sich zu Beginn keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang. Daher ist die Konstante, die sich bei der Integration ergibt, gleich Null. Das Integral über das Intervall $[0; 6]$ kannst du mit Hilfe der GTR bestimmen.



Den entsprechenden Befehl findest du unter

`MATH → 9:fnInt()`

Gib die Integrationsgrenzen und den Integranden an. Diesen erhältst du über die folgende Befehlsfolge:

`VARS → ▸ Y-VARS → 1: Function`

Wähle in diesem Menü dann die entsprechende Funktion Y_i aus, unter welcher du den Term von $f(t)$ abgespeichert hast.

Der GTR liefert dir, dass ungefähr 769 Fahrzeuge in den ersten 6 Stunde am Grenzübergang ankommen.

b)

▸ Zeitpunkt bestimmen, an dem sich erstmals Fahrzeuge stauen

Pro Stunde können am Grenzübergang **110** Fahrzeuge abgefertigt werden. Aus dem Aufgabenteil zuvor weißt du jedoch, dass die maximale momentane Ankunftsrate 325 Fahrzeuge pro Stunde beträgt. Das heißt, dass zu einem gewissen Zeitpunkt mehr Fahrzeuge am Grenzübergang ankommen als abgefertigt werden können.
Deine Aufgabe ist es, diesen Zeitpunkt t_0 zu bestimmen. Dabei kannst du wie folgt vorge-

hen:

- Der Zeitpunkt entspricht der Stelle von $f(t)$, an der $f(t)$ erstmals den Funktionswert 110 erreicht. Setze also den Term der Funktion f mit 110 gleich.
- Löse nach t auf, um den gesuchten Zeitpunkt zu erhalten.

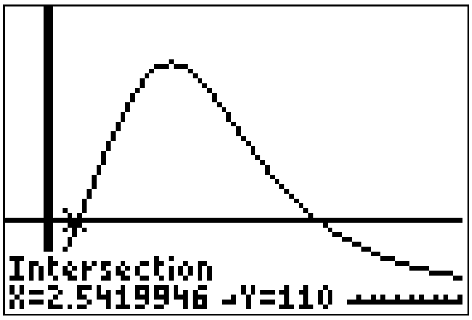
Diese Aufgabe kannst du mittels GTR graphisch lösen. Gib dazu den Term der Funktion f und der Geraden $y = 110$ im `Graph`-Modus an und bestimme ihre Schnittstelle. Denn diese entspricht gerade dem gesuchten Zeitpunkt, an dem $f(t)$ den Funktionswert 110 erreicht.

Um Schnittstellen von Graphen zu bestimmen, kannst du im `Graph`-Modus folgenden Befehl auswählen:

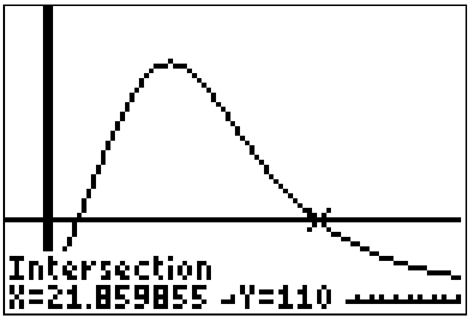
`menu → CALC → 5: intersect`

Bestätigen mit `Enter` liefert dir zwei verschiedene Resultate:

- $t_0 = 2,54$
- $t_1 = 21,86$

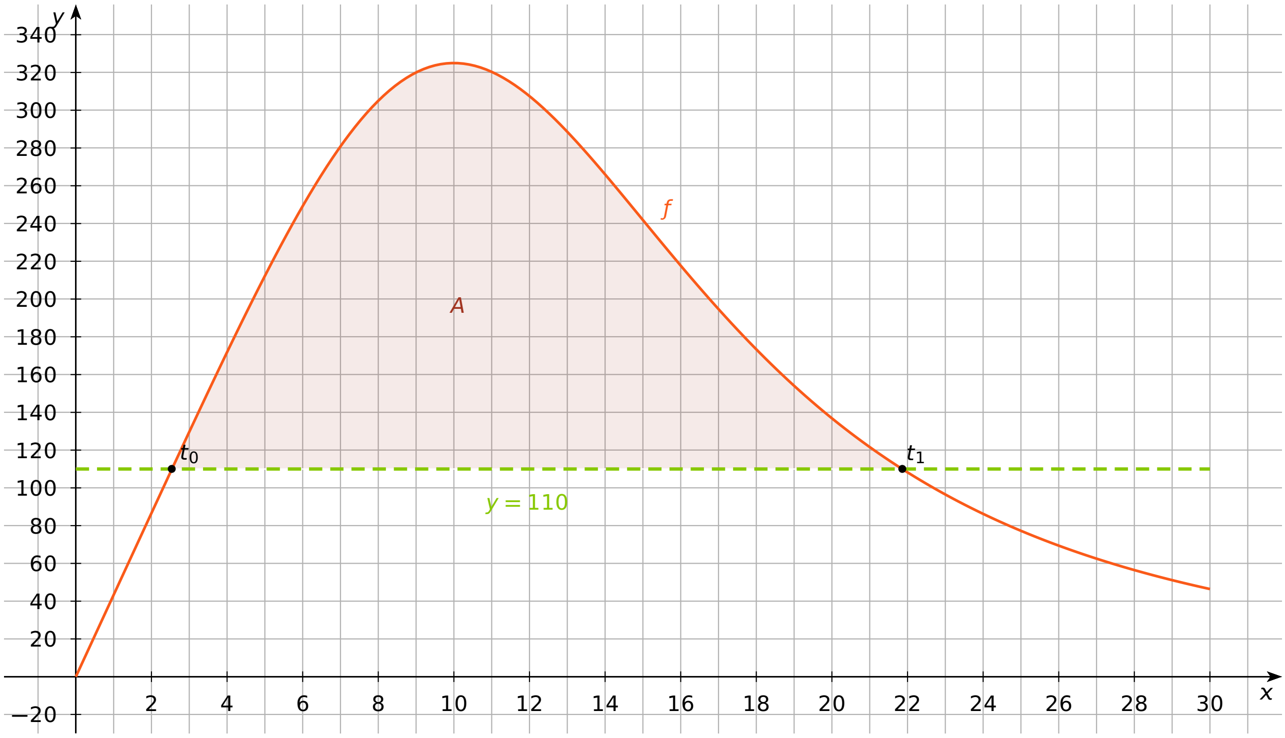


Anhand des Graphen der Funktion f kannst du erkennen, dass an $\boldsymbol{t_0 = 2,54}$ **erstmalig** die Anzahl von 110 pro Stunde ankommenden Fahrzeugen überschritten wird. Das liefert dir, dass der gesuchte Zeitpunkt $\boldsymbol{t_0 = 2,54}$ ist.
Nach 2,54 Stunden beginnen sich Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen.



▶ Anzahl der Fahrzeuge ermitteln, die sich vor dem Übergang stauen

In der Abbildung unten siehst du den skizzierten Graphen der Funktion f und der Geraden $y = 110$. Zuvor hast du ermittelt, dass sich erstmalig zum Zeitpunkt $t_0 = 2,54$ Fahrzeuge vor dem Übergang stauen. Die Anzahl A der Fahrzeuge, die sich maximal vor dem Übergang anstauen, entspricht der rot markierten Fläche:



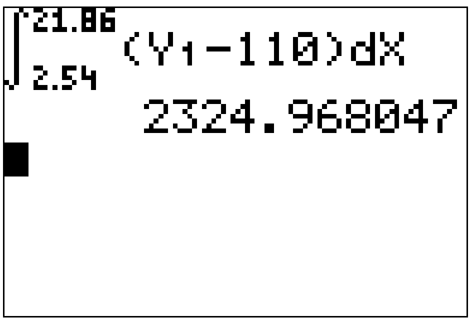
Diese Fläche entspricht weiterhin gerade der folgenden Differenz:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) - 110 \, dt$$

Dabei sind t_0 und t_1 die Schnittstellen der Funktion f und der Gerdaden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit:

- $t_0 = 2,54$
- $t_1 = 21,86$

Für die maximale Anzahl an anstauenden Fahrzeugen wird das Integral $[t_0; t_1]$ gewählt, da ab dem Zeitpunkt t_1 wieder weniger Fahrzeuge ankommen, als abgefertigt werden können. Das heißt, die Anzahl A nimmt ab.
Berechne also die Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge, indem du oben angeführtes Integral berechnest.
Das Integral über das Intervall $[t_0; t_1]$ kannst du mit Hilfe der GTR bestimmen.



Den entsprechenden Befehl findest du unter

`MATH → 9:fnInt()`

Gib die Integrationsgrenzen und den Integranden an. Diesen erhältst du über die folgende Befehlsfolge:

`VARS → ▶ Y-VARS → 1: Function`

Wähle in diesem Menü dann die entsprechende Funktion Y_i aus, unter welcher du den Term von $f(t)$ abgespeichert hast.

Der GTR liefert dir, dass sich maximal 2.325 Fahrzeuge am Grenzübergang anstauen.

▶ Anzahl bei einer Abfertigungsrate von 220 Fahrzeugen pro Stunde

12 Stunden nach Beobachtungsbeginn soll die momentane Abfertigungsate auf **220** Fahrzeuge pro Stunde erhöht werden. In den Stunden davor soll die momentane Abfertigungsrate weiterhin 110 Fahrzeuge pro Stunde betragen.
Berechne unter diesen Voraussetzungen die Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge. Die gesuchte Anzahl A entspricht hier der rot markierten Fläche.

Diese Fläche entspricht weiterhin gerade der folgenden Differenz:

$$\int_{t_0}^{12} f(t) - 110 \,\mathrm{d}t + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220 \,\mathrm{d}t$$

Dabei ist t_0 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit: $t_0 = 2,54$.
Dahingegen ist t_2 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $z = 220$. Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, kannst du also wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Schnittstelle t_2 der Funktion f und der Geraden $z = 220$.
- Berechne das Integral $\displaystyle\int_{t_0}^{12} f(t) - 110 \,\mathrm{d}t + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220 \,\mathrm{d}t$

1. Schritt: Schnittstelle t_2 bestimmen

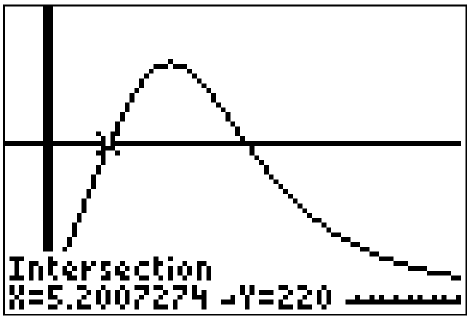
Das kannst du mittels GTR graphisch lösen. Gib dazu den Term der Funktion f und der Geraden $z = 220$ im Graph-Modus an und bestimme ihre Schnittstelle. Denn diese entspricht gerade dem gesuchten Zeitpunkt, an dem $f(t)$ den Funktionswert 220 erreicht.

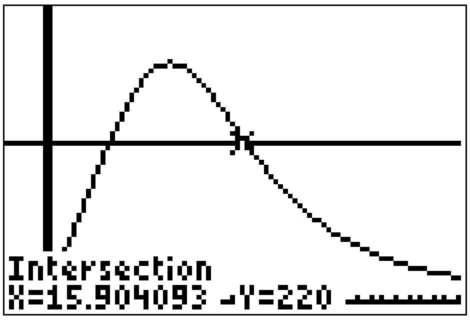
Um Schnittstellen von Graphen zu bestimmen, kannst du im `Graph`-Modus folgenden Befehl auswählen:

`menu → CALC → 5: intersect`

Bestätigen mit `Enter` liefert dir zwei verschiedene Resultate:

- $t_2 = 15,9$
- $t_3 = 5,2$





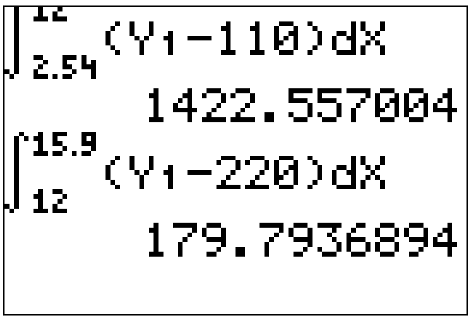
Anhand des Graphen der Funktion f kannst du erkennen, dass an $t_3 = 5,2$ erstmalig die Anzahl von 220 pro Stunde ankommenden Fahrzeugen überschritten wird. Da aber erst nach 12 Stunden auf 220 erhöht werden soll, kannst du dieses Resultat vernachlässigen. Das liefert dir, dass der gesuchte Zeitpunkt $\boldsymbol{t_2 = 15,9}$ ist.

2. Schritt: Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge berechnen

Berechne also die Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge, indem du oben angeführtes Integral berechnest. Das Integral

$$\int_{t_0}^{12} f(t) - 110\,dt + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220\,dt$$

kannst du mit Hilfe der GTR bestimmen.



Den entsprechenden Befehl findest du unter

`MATH → 9:fnInt()`

Gib die Integrationsgrenzen und den Integranden an. Diesen erhältst du über die folgende Befehlsfolge:

`VARS → ▶ Y-VARS → 1: Function`

Wähle in diesem Menü dann die entsprechende Funktion Y_i aus, unter welcher du den Term von $f(t)$ abgespeichert hast.

Der GTR liefert dir, dass sich durch die Erhöhung ab der 12. Stunde auf 220 Fahrzeuge pro Stunde maximal $1.422,56 + 179,79 \approx 1.602$ Fahrzeuge am Grenzübergang anstauen. **Aufgabe 2.2** a)

▶ Koordinaten des Extrempunktes angeben

Die Funktionenschar f_a mit $0 < a$ und dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : -\pi < x < \pi\}$ ist durch folgenden Term definiert:

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2$$

In der Aufgabenstellung wird angegeben, dass der Graph der Funktionenschar G_a einen Extrempunkt besitzt. Deine Aufgabe ist es, dessen Koordinaten anzugeben. Beachte, dass diese Koordinaten vom Parameter a abhängig sein können, da es sich hierbei um eine Funktionenschar handelt.

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f_a müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f_a'(x_E) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f_a''(x_E) \neq 0}$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstelle der Funktionenschar f_a. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmte Stelle in den Funktionsterm von f_a einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Extremstelle.

1. Schritt: Notwendige Bedingung überprüfen

Um die notwendige Bedingung einer Extremstelle der Funktion f_a zu überprüfen, benötigst du die erste Ableitungsfunktion der Funktion f_a.

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2$$
$$f_a'(x) = -a \cdot \sin(x)$$

Für die notwendige Bedingung einer Extremstelle muss $\boldsymbol{f_a'(x_E) = 0}$ gelten. Setze den Funktionsterm der ersten Ableitung f_a' gleich Null und ermittle alle potentielle Werte, für die diese Gleichung erfüllt wird:

$$0 = -a \cdot \sin(x) \qquad | : (-a)$$
$$0 = \sin(x)$$

Im ersten Schritt dürfen wir durch $-a$ dividieren, da $a > 0$ Voraussetzung ist.
Weiterhin weißt du, dass die Sinusfunktion für $x_E \in \{\ldots; -2\cdot\pi; 0; 2\cdot\pi; 4\cdot\pi, \ldots\}$ den Wert Null annimmt. Da die Funktionenschar f_a aber nur im Bereich $\boldsymbol{-\pi < x < \pi}$ definiert ist, kommt nur $x_E = 0$ als Nullstelle in Frage.
Damit hast du eine potentielle Extremstelle an $\boldsymbol{x_E = 0}$ ermittelt und kannst für diese Stelle nun das hinreichende Kriterium überprüfen.

2. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Damit eine Extremstelle vorliegt, muss weiterhin die hinreichende Bedingung $\boldsymbol{f_a''(x_E = 0) \neq 0}$ erfüllt werden. Das heißt, du benötigst zunächst die zweite Ableitung der Funktion f. Diese erhältst du, indem du den Term von f_a' erneut ableitest:

$$f_a'(x) = -a \cdot \sin(x)$$
$$f_a''(x) = -a \cdot \cos(x)$$

Überprüfe nun, ob $\boldsymbol{f_a''(x_E = 0) \neq 0}$ erfüllt wird:

$$\begin{aligned} f_a''(x_E = 0) &= -a \cdot \cos(0) \\ &= -a \cdot 1 \\ &= -a \neq 0 \end{aligned}$$

Das liefert dir, dass ebenfalls die hinreichende Bedingung erfüllt ist, da $0 < a$ gilt. Das heißt, an $x_E = 0$ liegt eine Extremstelle vor. Wegen $f_a''(x_E = 0) < 0$ kannst du festhalten, dass es sich hierbei um einen **Hochpunkt** handelt.

3. Schritt: Koordinaten des Hochpunktes angeben

Aus den Berechnungen zuvor weißt du, dass sich an der Stelle $x_E = 0$ ein Hochpunkt befindet. Damit hast du die x-Koordinate des Hochpunktes ermittelt. Die y-Koordinate erhältst du, indem du $x_E = 0$ in den Funktionsterm von f_a einsetzt und berechnest:

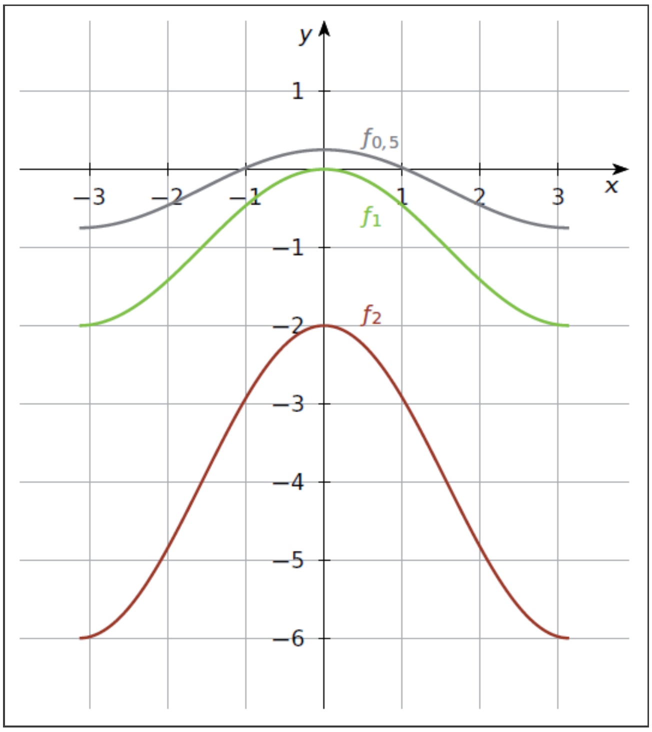
$$\begin{aligned} f(x_E = 0) &= a \cdot \cos(0) - a^2 \\ &= a \cdot 1 - a^2 \\ &= a - a^2 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Extrempunktes E lauten $E(0 \mid a - a^2)$.

b)

▶ Punkte auf der y-Achse angeben angeben

Im Schaubild kannst du erkennen, dass die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und $f_{0,5}$ der Funktionenschar f_a jeweils einen Punkt auf der y-Achse schneiden. Gib die Punkte an, durch welche **kein** Graph der Funktionenschar f_a verläuft.

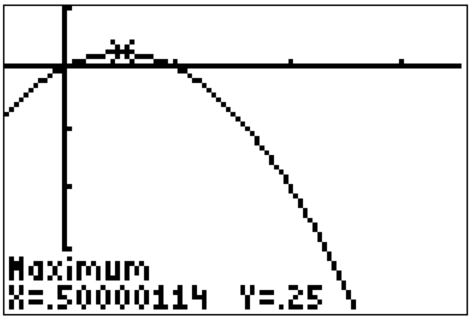


Dabei kannst du folgende Eigenschaften verwenden:

- Laut Aufgabentext muss $\mathbf{0 < a}$ gelten.
- Der Extrempunkt besitzt die Koordinaten $\mathbf{E(0 \mid a - a^2)}$ und stellt damit den Schnittpunkt mit der y-Achse dar.

Betrachte die Hilfsfunktion h mit dem Term $\mathbf{h(a) = a - a^2}$ und der Bedingung $\mathbf{0 < a}$.
Diese Hilfsfunktion gibt die y-Koordinate des Schnittpunktes $E(0 \mid a - a^2)$ mit der y-Achse in Abhängigkeit von a an.

Lässt du die Hilfsfunktion in deinem GTR zeichnen, so kannst du erkennen, dass die Funktion h nach unten nicht beschränkt ist.



Ihr Maximum kannst du ermitteln, indem du

`menu → CALC → 4: Maximum`

auswählst.

Der GTR liefert dir, dass sich das Maximum an $a = 0,5$ mit $\boldsymbol{h(a) = 0,25}$ befindet. Das heißt, der Extrempunkt bzw. Schnittpunkt mit der y-Achse kann maximal die y-Koordinate $0,25$ besitzen.

Du kannst also festhalten, dass der Graph der Funktionenschar f_a die Punkte $\boldsymbol{P(0 \mid y)}$ auf der y-Achse nicht berührt, für die $\boldsymbol{0,25 < y}$ gilt.

Wahlteil Aufgabe B 1

Aufgabe B 1.1

a)

▸ Bestimmen einer Koordinatengleichung für Ebene E

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass das Quadrat $ABCD$ die **Grundfläche einer Pyramide** mit der Spitze $S(0 \mid 0 \mid 12)$ ist. Weiterhin weißt du, dass die Seitenfläche BCS in der Ebene E liegt. Deine Aufgabe ist es dabei, eine **Koordinatengleichung der Ebene E** zu bestimmen. Die Koordinatengleichung einer Ebene baut sich dabei wie folgt auf:

$E: \quad n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** $\overrightarrow{n}$ der Ebene
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Willst du also eine Koordinatengleichung der Ebene E bestimmen, so bestimmst du zunächst den **Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$** über das **Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt**. Verwende dazu die Information, dass die Seitenfläche BCS der Pyramide in der Ebene E liegt.
Hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, so bestimmst du über eine **Punktprobe** die Konstante d. Verwende dazu die Koordinaten von Punkt B, C oder S.

1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ über das Vektorprodukt

Willst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ bestimmen, so benötigst du zunächst **2 Vektoren**, welche die Ebene E **aufspannen**. Da die Seitenfläche BCS in der Ebene E liegt, kannst du hier die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ verwenden:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & - & 5 \\ 5 & - & 5 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & 5 \\ 0 & - & 5 \\ 12 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechne nun wie folgt das Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$, um den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ zu bestimmen:

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 12 & - & 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot (-5) & - & (-10) \cdot 12 \\ -10 \cdot (-5) & - & 0 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Da beim Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ **nicht die Länge, sondern nur die Richtung entscheidend ist**, ist hier folgende Umformung zulässig:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinatengleichung über eine Punktprobe

Setzt du nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ in die allgemeine Koordinatengleichung von oben ein, so ergibt sich diese hier zu:

$E: \quad 0 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = d \quad \Leftrightarrow \quad 12 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = d.$

Die Konstante d bestimmst du hier nun, indem du beispielsweise die Koordinaten von B mit $B(5\,|\,5\,|\,0)$ für x_1, x_2 und x_3 einsetzt und die Gleichung nach d löst:

$$\begin{aligned} 12\cdot x_2+5\cdot x_3 &= d \qquad \text{mit} \quad B(5\,|\,5\,|\,0)\\ 12\cdot 5+5\cdot 0 &= d\\ 60 &= d \end{aligned}$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E lautet also:

$E: \quad 12\cdot x_2+5\cdot x_3=60.$

▶ Bestimmen des Winkels zwischen den Flächen *BCS* und *ABCD*

Nun ist es deine Aufgabe, den Winkel α zwischen Seitenfläche BCS und Grundfläche $ABCD$ der Pyramide zu berechnen. Hier gilt es also einen Winkel **zwischen zwei Ebenen** zu berechnen. Einen Winkel zwischen zwei gegebenen Ebenen berechnest du dabei über folgende Formel:

$\cos(\alpha)=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ mit:

- α: Winkel zwischen den Ebenen
- $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$: Normalenvektoren der Ebenen

Willst du also den Winkel α zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche $ABCD$ berechnen, so benötigst du hier die **Normalenvektoren dieser Ebenen**. Den Normalenvektor der Ebene E, in welcher die Seitenfläche BCS liegt, hast du oben schon bestimmt. Der Normalenvektor der Ebene, in welcher die Grundfläche $ABCD$ liegt, gilt es noch zu berechnen.

1. Schritt: Bestimmen des gesuchten Normalenvektors

Den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{ABCD}}$ der Ebene, in welcher die Grundfläche $ABCD$ liegt, könntest du wie oben über das Kreuzprodukt bestimmen. Vergleichst du jedoch die Variablen der Punkte A, B, C und D, mit

- $A(5\,|\,-5\,|\,0)$
- $B(5\,|\,5\,|\,0)$
- $C(-5\,|\,5\,|\,0)$
- $D(-5\,|\,-5\,|\,0)$

so kannst du erkennen, dass diese **alle** in der x_1x_2-Ebene liegen (x_3-Koordinate **ist überall Null**). Ein Vektor, welcher senkrecht auf der Ebene steht, in welcher sich auch die Grundfläche $ABCD$ befindet, zeigt also **in Richtung der x_3-Achse**. Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{ABCD}}$ gilt hier also:

$$\overrightarrow{n_{ABCD}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen des Winkels α

Den Winkel α bestimmst du nun, in dem du $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_{ABCD}}$ in den oben gezeigten Zusammenhang einsetzt und wie folgt berechnest:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_{ABCD}}}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot |\overrightarrow{n_{ABCD}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{\sqrt{0^2 \cdot 12^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{13} \qquad | \cos^{-1}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\tfrac{5}{13}\right) = 67,38^\circ$$

Der Winkel zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche $ABCD$ beträgt also 67,38°.

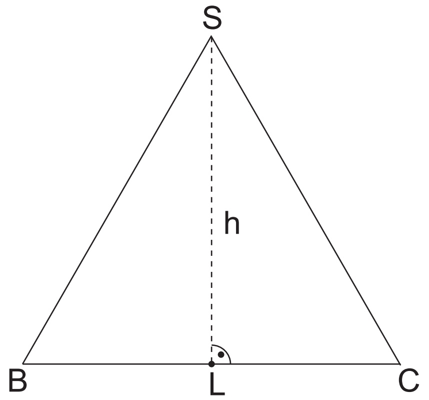
▸ Berechnen des Flächeninhalts des Dreiecks *BCS*

Zuletzt sollst den Flächeninhalt A des Dreiecks BCS berechnen. Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich dabei über folgenden Zusammenhang:

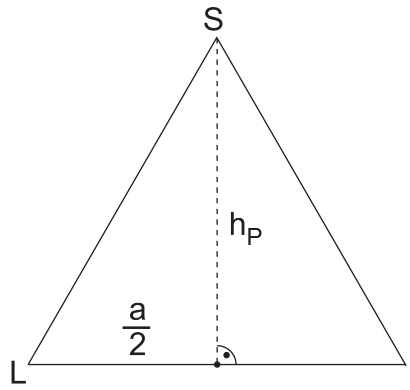
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit:

- g: Grundseite
- h: Höhe des Dreiecks

Fertige dir eine **Skizze des Dreiecks *BCS*** an, um dir das Lösen dieser Aufgabe einfacher zu gestalten:



Willst du hier den Flächeninhalt A des Dreiecks BCS bestimmen, so musst du die **Länge der Höhe *h*** berechnen. Diese Länge ermittelst du, in dem du zunächst die Länge der Strecke $\overline{SL}$ berechnest. Zeichnest du die Seitenansicht der Pyramide $ABCDS$, so kannst du erkennen, dass die Strecke $\overline{SL}$ eine der **Seitenlängen der Pyramiden** entspricht:



Betrachtest du die Skizze oben näher, so kannst du weiterhin erkennen, dass die Strecke $\overline{SL}$ mit der Höhe h_P der Pyramide und der Hälfte der Grundseitenlänge a **in einem rechtwinkligen Dreieck** liegt. Diese lässt sich also über den **Satz des Pythagoras** in diesem Dreieck bestimmen.
Gehe beim Berechnen des Flächeninhalts A also so vor:

- Bestimme die **Höhe h_P** der Pyramide
- Bestimme die **Grundseitenlänge a**
- Berechne die **Länge der Strecke $\overline{SL}$**
- Berechne den **Flächeninhalt A**

1. Schritt: Bestimmen von h_P und a

Die Höhe der Pyramide $ABCDS$ ergibt sich aus der x_3-Koordinaten der Spitze S der Pyramide:

$S(0\,|\,0\,|\,12) \quad \Longrightarrow h_P = 12\,\text{LE}$

Die Grundseiten Länge entspricht beispielsweise der Länge des Vektors $\overrightarrow{BC}$, da dieser Vektor eine der Quadratseiten des Quadrates $ABCD$ beschreibt:

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 0^2 + 0^2} = 10\,\text{LE}.$$

2. Schritt: Bestimmen der Länge der Strecke SL

Betrachtest du die Skizze oben näher, so kannst du erkennen, dass $\frac{a}{2}$ und h_P die **Katheten** des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks sind. Willst du die Länge der Strecke $\overline{SL}$ über den Satz des Pythagroas bestimmen, so gehst du hier also so vor:

$$\begin{aligned} \overline{SL}^2 &= \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + (h_P)^2 \\ \overline{SL}^2 &= 5^2 + 12^2 \\ \overline{SL}^2 &= 169 && \mid \sqrt{\ } \\ \overline{SL} &= 13\,\text{LE} \end{aligned}$$

Setzt du nun $h = \overline{SL} = 13\,\text{LE}$ sowie $\overline{BC} = 10\,\text{LE}$ in die oben gezeigte Formel für den Flächeninhalt des Dreicks BCS ein, so ergibt sich dieser wie folgt:

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65\,\text{FE}$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCS ist $65\,\text{FE}$.

b)

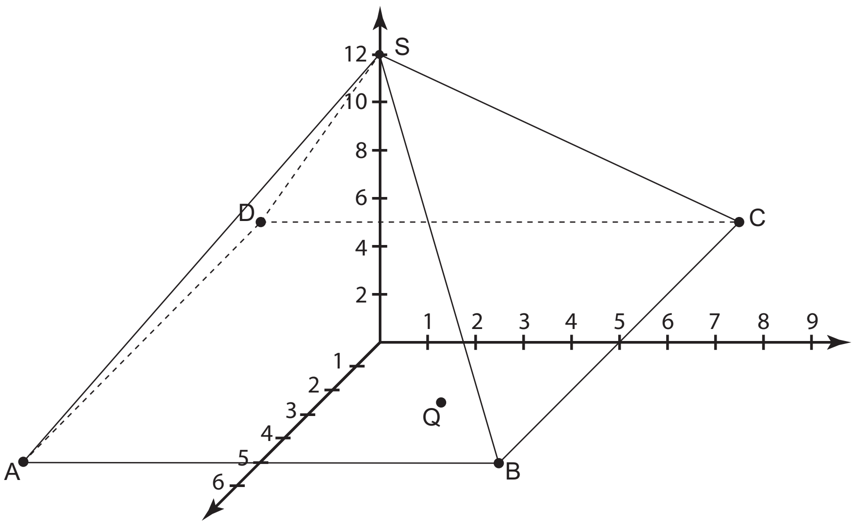
▶ Berechnen des Quadervolumens

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass nun **Quader** betrachtet werden, die jeweils vier Eckpunkte auf den **Pyramidenkanten** und vier Eckpunkte in der **Grundfläche der Pyramide** haben. Einer dieser Quader hat nun den Eckpunkt $Q(2,5\,|\,2,5\,|\,0)$.
Deine Aufgabe ist es nun, das **Volumen** dieses Quaders zu berechnen. Das Volumen V eines Quaders ergibt sich dabei über folgende Formel:

$V = l \cdot b \cdot h$ mit:

- l: **Länge** des Quaders
- b: **Breite** des Quaders
- h: **Höhe** des Quaders

Bevor du also das Volumen des Quaders bestimmen kannst, musst du dessen Länge, Breite und Höhe bestimmen. Fertige dir dazu eine **Skizze** des Sachverhalts an, in welche du zunächst die Pyramide $ABCDS$ und den Punkt Q einzeichnest:



Vergleichst du die Koordinaten von Q und dem Punkt B, so kannst du erkennen, dass der Punkt Q auf dem **Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$** liegt. Folglich liegt der darüberliegende Punkt R des Quaders auf der Strecke $\overline{BS}$. Willst du also die Höhe des Quaders berechnen, so bestimmst du die Länge des Vektors $\overrightarrow{QR}$. Berechne dazu die Koordinaten von R über die Gerade, auf welcher die Strecke $\overline{BS}$ liegt.
Die Länge und die Breite des Quaders ermittelst du, indem du die **relative Lage des Punktes Q zu den Koordinatenachsen** näher betrachtest.

1. Schritt: Berechnen der Quaderhöhe

Die Quaderhöhe h berechnest du hier, indem du zunächst die Gerade g definierst, auf welcher die Strecke $\overline{BS}$ liegt. Verwende dazu den Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ von Punkt B als Stütz- und den Vektor $\overrightarrow{BS}$ als Richtungsvektor:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Da der Punkt R senkrecht oberhalb des Punkte Q liegt, weißt du, dass für dessen Koordinaten folgendes gelten muss: $R(2,5\,|\,2,5\,|\,z)$.
Setzt du nun den Ortsvektor $\overrightarrow{OR}$ von R mit der Geradengleichung von g gleich, so kannst du wie folgt die vollständigen Koordinaten von R bestimmen:

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{x_g}$$
$$\begin{pmatrix}2,5\\2,5\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix}$$

Übertrage diese Gleichung wie folgt in ein Gleichungssystem, um die vollständigen Koordinaten von R zu bestimmen:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & 2,5 & = & 5 & - & 5\cdot t & \quad |-5\\
(2) & 2,5 & = & 5 & - & 5\cdot t & \\
(3) & z & = & 0 & + & 12\cdot t & \\
\hline
(1)a & -2,5 & = & & - & 5\cdot t & \quad |:(-5)\\
 & 0,5 & = & & & t & \\
(2) & 2,5 & = & 5 & - & 5\cdot t & \\
(3) & z & = & 0 & + & 12\cdot t & \quad \text{mit} \quad t=0,5\\
\hline
(1)a & 0,5 & = & & & t & \\
(2) & 2,5 & = & 5 & - & 5\cdot t & \\
(3)a & z & = & & & 12\cdot 0,5 & \\
 & z & = & & & 6 & \\
\hline
\end{array}$$

Die vollständigen Koordinaten von Punkt R sind also: $R(2,5\,|\,2,5\,|\,6)$. Vergleichst du nun die Koordinaten von Q und R, so kannst du erkennen, dass die Höhe des Quaders offensichtlich $h=6$ sein muss.

2. Schritt: Berechnen der Länge und der Breite des Quaders

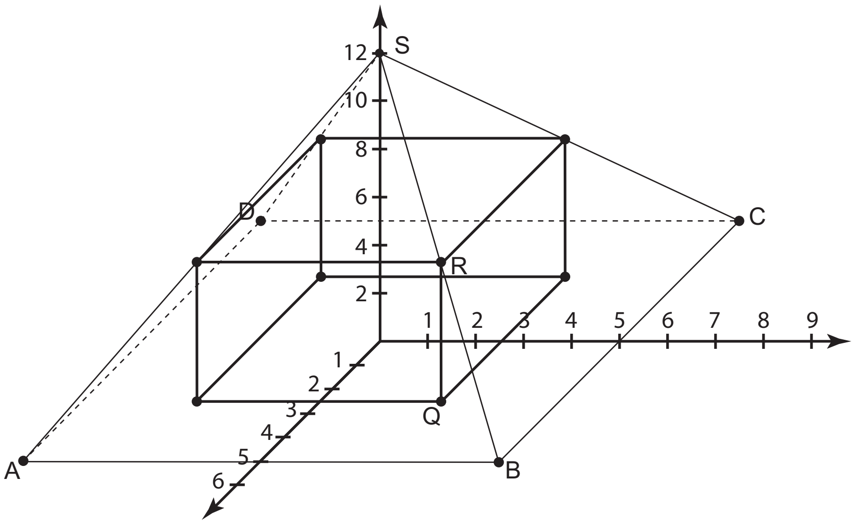
Willst du die Länge und die Breite des Quaders bestimmen, so betrachtest du die Koordinaten von Q. Q hat eine x_1-Koordinate von $x_1=2,5$. Das heißt der Abstand von Q zur x_1-Achse beträgt 2,5. Da es sich um einen Quader handelt, dessen Grundfläche in der Fläche $ABCD$ liegt, muss für dessen Länge gelten:

- $l=5\,\text{LE}$.

Gleiches gilt für die Breite des Quaders:

- $b=5\,\text{LE}$.

Überträgst du nun den Quader in die Skizze von oben, so sollte dieser so aussehen:



3. Schritt: Berechnen des Quadervolumens *V*

Das Quadervolumen V ergibt sich nun über den obigen Ansatz wie folgt:

$V = l \cdot b \cdot h = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150\,\text{VE}$.

Der Quader besitzt ein Volumen von 150 VE.

▶ Berechnen der Koordinaten des Eckpunktes

Nun soll ein weiterer Quader betrachtet werden, bei dem es sich um einen **Würfel** handelt. Dabei sollte dir bekannt sein, dass bei einem Würfel **Länge, Breite und Höhe übereinstimmen**. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten von dessen Eckpunkt auf der Kante $\overline{BS}$ zu bestimmen.
Wie oben schon beschrieben, bestimmte der Punkt Q unter anderem Breite und Länge des Würfels. Dabei entsprach gerade das Doppelte der x_1-Koordinate der Länge und das Doppelte der x_2-Koordinate der Breite des Würfels.
Da der hier zu bestimmende Punkt R_t auf der Kante $\overline{BS}$ liegt, werden dessen Koordinaten **von Gerade g bestimmt**. Von oben weißt du, dass dessen x_1- und x_2-Koordinate mit denen von Punkt Q, der unterhalb von R_t liegt, übereinstimmt.
Daraus folgt, dass die x_3-Koordinate dem **Doppelten** der x_1- und x_2-Koordinaten von R_t entsprechen muss, damit es sich beim betrachteten Quader um einen Würfel handelt.

1. Schritt: Bestimmen der allgemeinen Koordinaten von R_t

Die allgemeinen Koordinaten von R_t ergeben sich wie folgt aus der Gleichung von Gerade g:

$$\overrightarrow{OR_t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5\cdot t \\ 5-5\cdot t \\ 12\cdot t \end{pmatrix} \implies R_t(5-5\cdot t \,|\, 5-5\cdot t \,|\, 12\cdot t).$$

2. Schritt: Bestimmen der gesuchten Koordinaten von R_t

Wie oben erwähnt, handelt es sich dann um einen Würfel, wenn die x_3-Koordinate von R_t dem Doppelten der x_1- und der x_2-Koordinaten dieses Punktes entspricht. Berechne demnach die gesuchten Koordinaten von R_t über folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
2\cdot x_1 = 2\cdot x_2 &= x_3 \\
2\cdot(5-5\cdot t) = 2\cdot(5-5\cdot t) &= 12\cdot t \\
2\cdot(5-5\cdot t) &= 12\cdot t \\
10-10\cdot t &= 12\cdot t && \mid +10\cdot t \\
10 &= 22\cdot t && \mid :22 \\
\tfrac{10}{22} &= t \\
\tfrac{5}{11} &= t
\end{aligned}$$

Für t muss also $t = \frac{5}{11}$ gelten. Für die gesuchten Koordinaten gilt also:

$R_{\frac{5}{11}}(5-5\cdot\frac{5}{11} \mid 5-5\cdot\frac{5}{11} \mid 12\cdot\frac{5}{11}) \Leftrightarrow R_{\frac{5}{11}}(\frac{30}{11} \mid \frac{30}{11} \mid \frac{60}{11})$.

Die gesuchten Koordinaten des Eckpunktes auf der Kante $\overline{BS}$ sind also $R_{\frac{5}{11}}(\frac{30}{11} \mid \frac{30}{11} \mid \frac{60}{11})$.

Aufgabe B 1.2

a)

▸ Wahrscheinlichkeit, dass mind. 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass insgesamt 20 Mal eine Kugel aus dem Gefäß $G1$ gezogen wird. Die Kugeln werden dabei jeweils wieder ins Gefäß zurückgelegt, weswegen es sich hier um ein **Ziehen mit Zurücklegen** handelt. Im Gefäß $G1$ befinden sich 6 schwarze und 4 weiße Kugel. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass bei 20 Zügen mindestens 12 Mal eine schwarze Kugeln gezogen wird.
Willst du hier diese Wahrscheinlichkeit bestimmen, so betrachtest du zunächst die Zufallsvariable X. Zufallsvariable X beschreibt dabei die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Da bei diesem Zufallsversuch nur die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln relevant ist und es sich um ein **Ziehen mit Zurücklegen** handelt, ist Zufallsvariable X **binomialverteilt**. Da insgesamt 20 Mal gezogen wird ist $n = 20$.
Wahrscheinlichkeit p ergibt sich aus der **Gesamtanzahl** der schwarzen Kugeln unter allen Kugeln. Da hier die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht wird, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugeln gezogen wird, muss für die Zufallsvariable X hier folgendes gelten:

$P(X \geq 12)$.

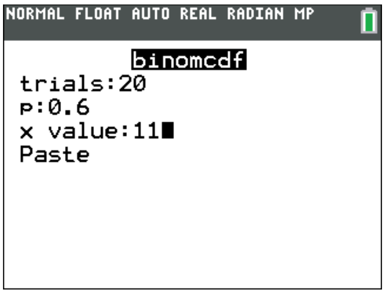
Diese Wahrscheinlichkeit kannst du mit deinem GTR berechnen. Dazu musst du den `binomCdf`-Befehl verwenden. Da dieser aber nur Ausdrücke wie $P(X \leq k)$ berechnen kann, musst du hier zunächst wie folgt das Gegenereignis zu $P(X \geq 12)$ bilden:

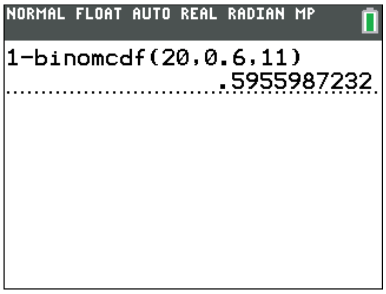
- $P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(X \leq 11)$.

Insgesamt befinden sich 10 Kugel im Gefäß, weswegen die Wahrscheinlichkeit p eine schwarze Kugel zu ziehen, die folgende ist:

- $p = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

Nun weißt du, dass $n = 20$, $p = 0,6$ gilt. Wende den `binomCdf`-Befehl wie in den Schaubildern unten an, um hier die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Greife dazu aber zunächst über `2nd → DISTR → B:binomcdf(` auf diesen zu.





Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 12 schwarze Kugeln aus Gefäß $G1$ zu ziehen beträgt also etwa 59,6 %.

▶ Wahrscheinlichkeit, dass 2 schwarze Kugeln hintereinander gezogen werden

Nun betrachtest du Gefäß $G2$, indem sich 3 schwarze und 7 weiße Kugeln befinden und aus dem **mit Zurücklegen** gezogen wird. Deine Aufgabe ist es dabei, die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass aus diesem Gefäß **genau** 2 schwarze Kugeln **hintereinander** gezogen werden.
Willst du diese Aufgabe lösen, so musst du dir zunächst überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei schwarze Kugeln bei insgesamt 8 Zügen aus dem Gefäß zu ziehen. Hast du dies ermittelt, so musst du dir klar machen, mit welcher Wahrscheinlichkeit überhaupt zwei schwarze Kugeln hintereinander aus dem Gefäß entnommen werden.

Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel aus dem Gefäß $G2$ zu ziehen ermittelst du hier wie oben:

- $p_s = \dfrac{3}{10} = 0,3$

Wird insgesamt 8 Mal aus dem Gefäß eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen, so gibt es insgesamt 7 Mal die Möglichkeit 2 schwarze Kugeln aus diesem Gefäß zu entnehmen. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ im Allgemeinen **genau** 2 schwarze Kugeln aus dem Gefäß zu ziehen, ergibt sich hier über die Pfadmultiplikation (mit p_w: Wahrscheinlichkeit für weiße Kugel):

- $P(A) = p_s \cdot p_s \cdot p_w \cdot \ldots \cdot p_w = p_s^2 \cdot p_w^6 = 0,3^2 \cdot 0,7^6$

Multiplizierst du dieses Ergebnis nun noch mit 7 so hast du die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ dafür berechnet, genau 2 schwarze Kugeln hintereinander aus dem Gefäß zu ziehen:

- $P(B) = 7 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^6 = 0,0741.$

Die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander aus dem Gefäß zu ziehen beträgt also 0,0741 bzw. 7,41 %.

b)

▶ Berechnen der Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel

Der Aufgabenstellung kannst du hier nun entnehmen, dass insgesamt 2 Kugeln aus Gefäß $G1$ **ohne Zurücklegen** gezogen und in das Gefäß $G2$ gelegt werden. Anschließend wird dann eine Kugel aus Gefäß $G2$ gezogen. Deine Aufgabe ist es nun, zu ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Kugel schwarz ist.
Willst du diese Wahrscheinlichkeit hier berechnen, so musst du hier folgende drei Fälle betrachten:

- Es werden 2 schwarze Kugeln in $G2$ gelegt;
- es wird eine schwarze Kugel in $G2$ gelegt und
- es wird keine schwarze Kugel in $G2$ gelegt.

Je nachdem, welcher dieser drei Fälle eintritt **verändert** sich die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel aus Gefäß $G2$ zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Kugel aus $G2$ zu ziehen, wird also **maßgeblich** von diesen Wahrscheinlichkeiten beeinflusst.
Hast du die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Fälle ermittelt, so kannst du ausgehend von diesen die Wahrscheinlichkeit für das **Ziehen einer schwarzen Kugel** aus dem Gefäß $G2$ ermitteln. Auch hier ergeben sich drei verschiedene Fälle:

- Die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich um 2 erhöht;
- die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich um 1 erhöht und
- die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich nicht erhöht.

Beachte dabei, dass sich in jedem dieser drei Fälle die Gesamtanzahl der Kugeln um 2 erhöht hat. Vereine zuletzt die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fälle über die Pfadregeln und berechne so die Wahrscheinlichkeit.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeiten, für die drei Fälle

Zwei schwarze Kugeln:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 schwarze Kugeln in Gefäß $G2$ gelegt werden, ergibt sich hier über die Pfadmultiplikation. Denke dabei daran, dass es sich um ein Ziehen **ohne Zurücklegen** handelt.

- $P(\text{2 schwarze Kugeln}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90}\frac{1}{3}$.

Eine schwarze Kugel:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel in Gefäß $G2$ gelegt wird, ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze und eine weiße Kugel in Gefäß $G2$ gelegt wird. Achte hierbei auf die Reihenfolge.

- $P(\text{1 schwarze Kugeln}) = P(\text{schwarz}) \cdot P(\text{weiß}) + P(\text{weiß}) \cdot P(\text{schwarz}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$.

Keine schwarze Kugel:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine schwarze Kugel ins Gefäß $G2$ gelegt wird, ergibt sich hier aus der Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei weiße Kugeln ins Gefäß gelegt werden:

- $P(\text{keine schwarze Kugeln}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel

Willst du hier nun die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus Gefäß $G2$ berechnen, so musst du auch hier wieder die drei Fälle von oben beachten. Denke dabei daran, dass sich die Anzahl der Kugeln in Gefäß $G2$ auf 12 erhöht ist und dass die Anzahl der schwarzen Kugel abhängig von dem eingetretenen Fall ist.

Fall 1: Zwei schwarze Kugeln

Wurden 2 schwarze Kugeln ins Gefäß gelegt, so befinden sich nun insgesamt 5 schwarze Kugeln in diesem Gefäß. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt und dass dann eine schwarze Kugel gezogen wird, ergibt sich wie folgt über die Pfadmultiplikation:

- $P(\text{Fall 1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$.

Fall 2: Eine schwarze Kugel

Wurde 1 schwarze Kugel ins Gefäß gelegt, so befinden sich nun insgesamt 4 schwarze Kugeln in diesem Gefäß.

- $P(\text{Fall 2}) = \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{12} = \frac{32}{180} = \frac{8}{45}$.

Fall 3: Keine schwarze Kugel

Wurde keine schwarze Kugel ins Gefäß gelegt, so befinden sich nun insgesamt 3 schwarze Kugeln in diesem Gefäß.

- $P(\text{Fall 3}) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{12} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30}$.

Die Wahrscheinlichkeit nun eine schwarze Kugel aus dem Gefäß $G2$ zu ziehen ergibt sich über die Pfadaddition. Bilde also die Summe der berechneten Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\text{schwarze Kugel}) = P(\text{Fall 1}) + P(\text{Fall 2}) + P(\text{Fall 3}) = \frac{5}{36} + \frac{8}{45} + \frac{1}{30} = \frac{7}{20} = 0,35$.

Die Wahrscheinlichkeit, unter den neuen Umständen, eine schwarze Kugel aus Gefäß $G2$ zu ziehen liegt also bei $\frac{7}{20}$ bzw. $35\,\%$.

Wahlteil Aufgabe B 2

a)

▶ Bestimmen der Koordinatengleichung der Ebene *E*, in der die Platte liegt

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die rechteckige Platte die folgenden Eckpunkte besitzt:

- $A(10\,|\,6\,|\,0)$;
- $B(0\,|\,6\,|\,0)$;
- $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und
- $D(10\,|\,0\,|\,3)$.

Deine Aufgabe ist es hierbei, eine **Ebenengleichung in Koordinatenform** für die Ebene E zu bestimmen, in welcher die rechteckige Platte liegt. Die Ebenengleichung in Koordinatenform einer Ebene baut sich dabei wie folgt auf:

$E: \quad n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** $\vec{n}$ der Ebene
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Willst du also eine eine **Ebenengleichung in Koordinatenform** der Ebene E bestimmen, so bestimmst du zunächst den **Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$** über das **Kreuz- bzw. Vektorprodukt**. Verwende dazu die Koordinaten der Eckpunkte der rechteckigen Platte.
Hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, so bestimmst du über eine **Punktprobe** die Konstante d. Verwende dazu die Koordinaten von Punkt A, B, C oder D.

1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ über das Kreuzprodukt

Willst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen, so benötigst du **zunächst 2 Vektoren**, welche die Ebene E **aufspannen**. Gehe hier beispielsweise von Punkte A aus. Punkt A ist über eine Kante mit Punkt B und D verbunden:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & 10 \\ 6 & - & 6 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & - & 10 \\ 0 & - & 6 \\ 3 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne nun wie folgt das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$, um den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ zu bestimmen:

$$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 & - & 0 \cdot (-6) \\ 0 \cdot 0 & - & (-10) \cdot 3 \\ (-10) \cdot (-6) & - & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Da beim Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ **nicht die Länge, sondern nur die Richtung entscheidend ist**, ist hier folgende Umformung zulässig:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen der Koordinatengleichung über eine Punktprobe

Setzt du nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ in die allgemeine Koordinatengleichung von oben ein, so ergibt sich diese hier zu:

$E: \quad 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = d \iff x_2 + 2 \cdot x_3 = d$

Die Konstante d bestimmst du hier nun, indem du beispielsweise die Koordinaten von A mit $A(10\,|\,6\,|\,0)$ für x_1, x_2 und x_3 einsetzt und die Gleichung nach d löst:

$$\begin{aligned} x_2 + 2 \cdot x_3 &= d \qquad \text{mit } A(10\,|\,6\,|\,0) \\ 6 + 2 \cdot 0 &= d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E lautet also:

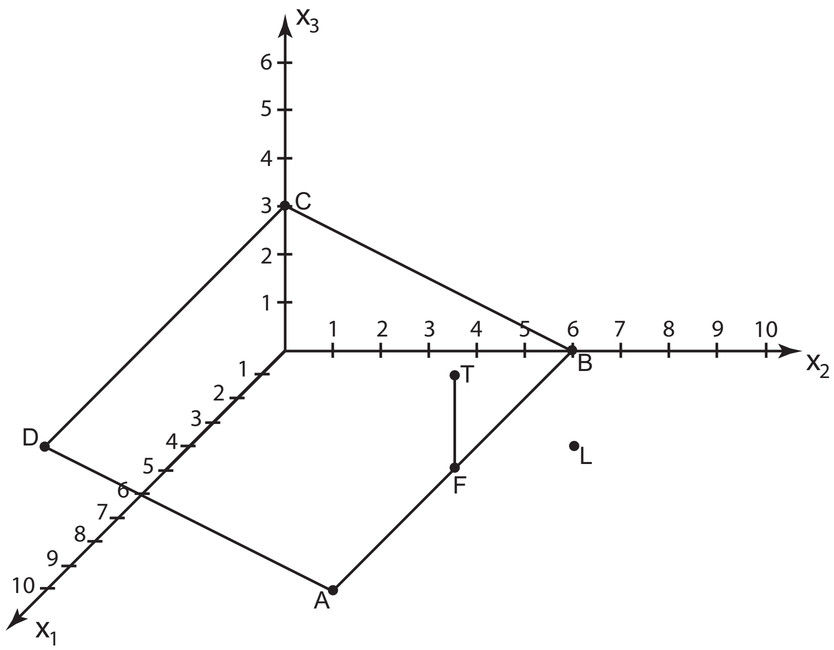
$E: \quad x_2 + 2 \cdot x_3 = 6.$

▶ Darstellen des Sachverhaltes in einem Koordinatensystem

Hier sollst du nun die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem darstellen. Orientiere dich beim Zeichnen der Achsen an den **Koordinaten der einzuzeichnenden Punkte** und denke daran, dass alle Koordinatenangaben in deinem Koordinatensystem **in m** sind. Zeichne zunächst die Platte mit:

- $A(10\,|\,6\,|\,0)$;
- $B(0\,|\,6\,|\,0)$;
- $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und
- $D(10\,|\,0\,|\,3)$.

und dann den Stab. Zeichne dazu den Punkt $F(5\,|\,6\,|\,0)$ ein und von diesem dann einen 2 m langen Stab. Zuletzt zeichnest du die Lichtquelle L bei $L(8\,|\,10\,|\,2)$ ein.
Deine Zeichnung sollte hier so aussehen:



▶ Bestimmen des Winkels zwischen Stab und Platte

Nun sollst du den Winkel α zwischen dem Stab bei F und der Platte $ABCD$ bestimmen. Da der Stab durch einen Vektor $\overrightarrow{FT}$ (siehe oben) und die Platte $ABCD$ durch eine Ebene repräsentiert werden können, gilt es hier einen **Winkel zwischen einer Ebene und einem Vektor** zu berechnen.
Für die Berechnung eines Winkels zwischen einem Vektor und einer Ebene gilt dabei folgendes:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} \text{ mit:}$$

- $\vec{d}$: Betrachteter **Vektor**;
- $\vec{n}$: **Normalenvektor** der betrachteten Ebene.

Bestimme also zunächst den Vektor $\overrightarrow{FT}$ der den Stab repräsentiert und bestimme dann mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E den hier gesuchten Winkel.

Da der Stab 2 m lang ist und in positive x_3-Richtung zeigt, ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{FT}$ hier wie folgt:

$$\overrightarrow{FT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Setze nun $\overrightarrow{FT}$ und $\overrightarrow{n_E}$ in den Zusammenhang von oben ein, um den hier gesuchten Winkel α zu bestimmen:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{FT} \cdot \vec{n}_E|}{|\vec{FT}| \cdot |\vec{n}_E|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{5}} && \mid \sin^{-1} \\ \alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 63,4 \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen Stab und Platte beträgt also ungefähr 63,4°.

b)

▶ Berechnen des Schattenpunktes des oberen Endes des Stabes

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich im Punkt $L(8\,|\,10\,|\,2)$ eine punktförmige Lichtquelle befindet. Weiterhin weißt du, dass der Stab einen Schatten auf die Platte wirft. Deine Aufgabe ist es dabei, die Koordinaten des **Schattenpunktes S** des oberen Endes des Stabes, welcher dieser auf die Platte wirft, zu bestimmen.
Aus dem vorhergegangenen Aufgabenteil weißt du, dass das obere Ende des Stabes die Koordinaten $T(5\,|\,6\,|\,2)$ besitzt. Nun werden von Punkt L aus Lichtstrahlen **in Richtung des Stabes** geworfen. Das heißt, die „Richtung des Schattens“ des oberen Endes des Stabes wird durch den **Vektor $\overrightarrow{LT}$** bestimmt. Willst du nun ausgehend von dem Wissen über diesen Vektor den Schattenpunkt S bestimmen, so gehst du hier so vor:

- Formuliere eine Gerade l, die die **Richtung des Lichtes** ausgehend vom Punkt T beschreibt.
- Schneide die Gerade mit der **Ebene E**, die die Platte repräsentiert
- Der **Schnittpunkt** von Gerade l und Ebene E ist dann der gesuchte Schattenpunkt S.

1. Schritt: Bestimmen der Geraden l

Soll Gerade l die Richtung des Lichtes, ausgehend von Punkt T beschreiben, so muss diese den Vektor $\overrightarrow{OT}$ als Stütz- und den Vektor $\overrightarrow{LT}$ als Richtungsvektor besitzen.

$$\overrightarrow{LT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & - & 8 \\ 6 & - & 10 \\ 2 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OT} + t \cdot \overrightarrow{LT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmen des Schattenpunktes S

Willst du den Schnittpunkt von Ebene E und Gerade l bestimmen, so formulierst du zunächst Gerade l als einen einzelnen Vektor. Anschließend setzt du die Einträge dieses Vektors in die Koordinatengleichung von E ein und berechnest den zu S zugehörigen Parameterwert von t.

$$l: \quad \overrightarrow{x_l} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \cdot t \\ 6 - 4 \cdot t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Einsetzen von $\overrightarrow{x_l}$ in die Koordinatengleichung von E, für x_1, x_2 und x_3 ergibt:

$$\begin{aligned} (6 - 4 \cdot t) + 2 \cdot 2 &= 6 \\ 6 - 4 \cdot t + 4 &= 6 \\ 10 - 4 \cdot t &= 6 \qquad \qquad |-10 \\ -4 \cdot t &= -4 \iff t = 1 \end{aligned}$$

Setze nun $t = 1$ in die Geradengleichung von l ein, um die Koordinaten von Schattenpunkt S zu bestimmen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & - & 3 \\ 6 & - & 4 \\ 2 & + & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes hat die Koordinaten: $S(2 \mid 2 \mid 2)$.

▶ Begründen, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt

Nun sollst du begründen, dass der Schatten, den der Stab wirft, sich **vollständig** auf der Platte befindet. Von oben weißt du, dass der Schattenpunkt, welcher vom oberen Ende des Stabes geworfen wird, die Koordinaten $S(2 \mid 2 \mid 2)$ besitzt.
Willst du hier begründen, dass der Schatten, welcher vom Stab geworfen wird, sich vollständig auf der Platte befindet, so musst du hier folgendes tun:

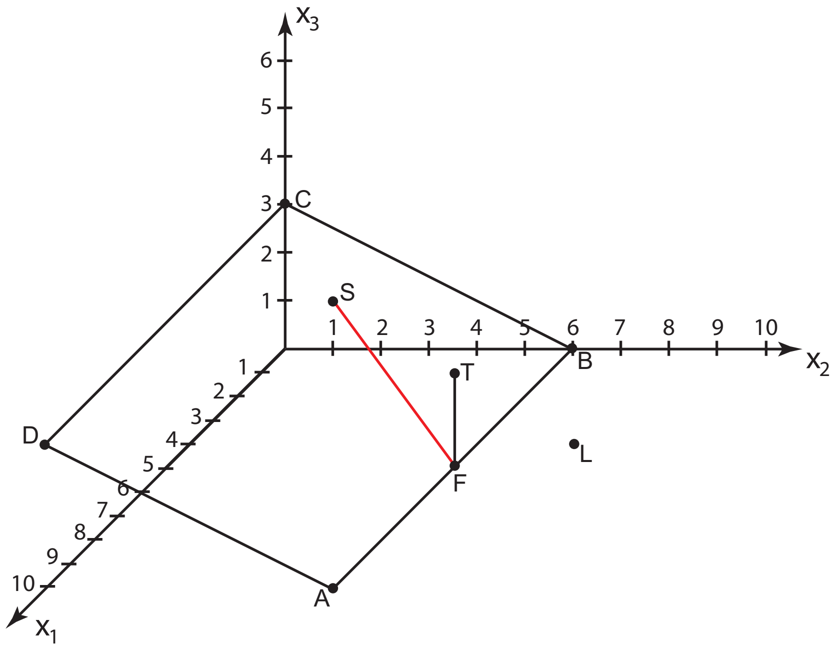
- **Vergleiche** die Koordinaten von Punkt S mit den Koordinaten der Eckpunkte der Platte.
- **Analysiere** die Koordinaten von Punkt F nochmals genauer und setze sie **in Relation** zu den Koordinaten von S.

- Veranschauliche deine Überlegungen an der **Skizze aus Aufgabenteil a**.

Vergleichst du hier die Koordinaten von S mit den Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D, so kannst du hier folgendes feststellen:

- Der Schattenpunkt S liegt in der Ebene E.
- Die x_1-Koordinate von S liegt zwischen den x_1-Koordinaten von A und B.
- Die x_2-Koordinate von S liegt zwischen den x_2-Koordinaten von B und C.

Der Schattenpunkt S liegt also offensichtlich auf der Platte. Da auch der Anfangspunkt F mit $F(5\mid 2\mid 0)$ des Stabes sich auf der Platte befindet, muss sich der Schatten zwischen S und F ebenfalls auf der Platte befinden. Dies lässt sich auch wie folgt an der Zeichnung aus a veranschaulichen:



Der Schatten wurde hier in rot eingezeichnet.

c)

▶ Berechnen der Koordinaten der möglichen Kollisionspunkte

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass sich die Lichtquelle von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene **parallelen Kreisbahn** bewegt. Der Mittelpunkt dieser Kreisbahn ist dabei Punkt T, also das **obere Ende des Stabes**. Bewegt sich die Lichtquelle wie eben beschrieben auf der Kreisbahn, so **kollidiert** diese mit der Platte $ABCD$. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten dieser **möglichen Kollisionspunkte** zu berechnen.
Willst du hier die möglichen Kollisionspunkte bestimmen, so bestimmst du zunächst die Ebene H, **auf welcher sich die Lichtquelle bewegt**. Beachte dabei, dass diese parallel zur x_1x_2-Ebene verlaufen muss.
Hast du Ebene H bestimmt, so schneidest du diese mit der Ebene E, in welcher sich auch die Platte befindet. Da du hier zwei Ebenen schneidest, ergibt sich als Resultat **eine Schnittgerade**. Auf dieser Schnittgeraden müssen sich dann die möglichen **Kollisionspunkte** befinden. Überlege dir folgendes, um diese dann zu bestimmen:

- Die Kollisionspunkte müssen sich **auf** der Schnittgeraden befinden;
- der Radius der Kreisbahn wird durch den **Abstand** zwischen T und S bestimmt;
- da es sich beim Punkt T um den Mittelpunkt des Kreises handelt, muss der Abstand zwischen T und den Kollisionspunkten gerade dem **Radius** entsprechen.
- Verwende beim Berechnen **die allgemeinen Koordinaten der Kollisionspunkte**, die sich aus der Schnittgeraden ergeben.

1. Schritt: Bestimmen der Schnittgeraden s

Wie oben beschrieben, müssen die gesuchten Kollisionspunkte auf der Schnittgeraden liegen, welche sich ergibt, wenn du Ebene H und Ebene E schneidest. Da die Kreisbahn parallel zur x_1x_2-Ebene sein soll, muss die Ebene, in welcher sie sich befindet, ebenfalls parallel zur x_1x_2-Ebene sein.
Betrachtest du die Koordinaten von L und T genauer, so kannst du erkennen, dass beide eine x_3-Koordinate von $x_3 = 2$ haben. Da nun Punkt L und Punkt T in der Ebene H liegen sollen und diese darüber hinaus auch noch parallel zur x_1x_2-Ebene sein soll, lautet eine Koordinatengleichung dieser Ebene:
$H: \quad x_3 = 2.$

Willst du nun die Schnittgerade s bestimmen, so formulierst du aus den Koordinatengleichungen von E und H ein unterbesetztes Gleichungssystem. Führe in diesem Gleichungssystem für x_1 einen Parameter ein, um es eindeutig lösen zu können:

$$\begin{array}{llcccccl}
(1) & 6 & = & & x_2 & + & 2\cdot x_3 & \text{mit} \quad x_3 = 2\\
(2) & 2 & = & & & & x_3 & \\
(3) & r & = & x_1 & & & & \\
\hline
(1)a & 6 & = & & x_2 & + & 2\cdot 2 & \\
 & 6 & = & & x_2 & + & 4 & \mid -4\\
 & 2 & = & & x_2 & & & \\
(2) & 2 & = & & & & x_3 & \\
(3) & r & = & x_1 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Gib nun die Lösungsmenge des LGS an und formuliere aus dieser wie folgt die Gerade s:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Schnittgerade s hat also folgende Gleichung:

$$s: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen der möglichen Kollisionspunkte

Nun weißt du folgende zwei Dinge über die Lage der Kollisionspunkte:

- Sie liegen auf der Gerade s und
- sie besitzen zum Punkt T einen Abstand von 5 m.

Willst du nun die mögliche Kollisionspunkte bestimmen, so musst du diese so bestimmen, dass sie auf s liegen und einen Abstand von 5 zu T besitzen. Formuliere dazu auch hier wieder Gerade s als Vektor um:

$$s: \quad \overrightarrow{x_S} = \overrightarrow{K_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmst du nun den Betrag des Vektors $\overrightarrow{TK_r}$, so hast du den von r abhängigen Abstand zwischen Punkt T und den Kollisionspunkten K_r. Setzt du diesen Abstand gleich 5 so kannst du wie folgt die Koordinaten der möglichen Kollisionspunkte bestimmen:

$$5 = \left|\overrightarrow{TK_r}\right| = \left|\begin{pmatrix} r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} r-5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

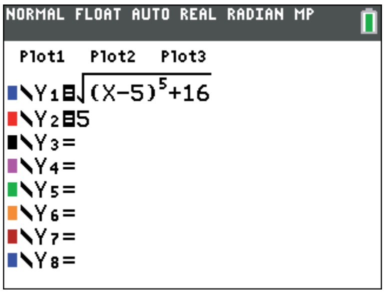
$$5 = \sqrt{(r-5)^2 + (-4)^2 + 0^2}$$

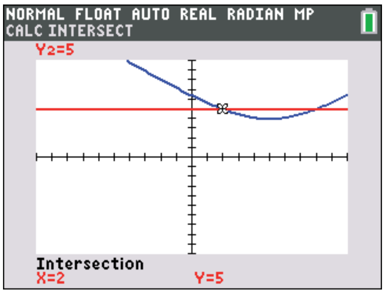
$$5 = \sqrt{(r-5)^2 + 16}$$

Diese Gleichung kannst du nun graphisch mit Hilfe deines GTR lösen. Übertrage die rechte Seite dazu in den Y=-Editor, als eine von x-abhängige Gleichung. Die linke Seite der Gleichung überträgst du als eine zur x-Achse parallele Gerade in deinen GTR (siehe unten links). Wechsle anschließend in den GRAPH-Modus und bestimme über

$\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow \texttt{CALC} \rightarrow \texttt{5:intersect}}$

die Schnittpunkte der beiden Funktionen.





Als Lösung der Gleichung hat sich also ergeben: $r_1 = 2$ und $r_2 = 8$. Setze diese nun in die allgemeinen Koordinaten von K_r ein, so ergeben sich folgende zwei möglich Kollisionspunkte:

- $K_2(2\,|\,2\,|\,2)$ und
- $K_8(8\,|\,2\,|\,2)$.

Aufgabe B 2.2

a)

▶ Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass bei der Produktion von Bleistiften erfahrungsgemäß der Anteil der fehlerhaften Stifte **bei 5 % liegt**. Nun werden der Produktion zur Qualitätsprüfung zufällig **800** Bleistifte entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die **Anzahl der fehlerhaften Stifte** in der vorliegenden Stichprobe. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 30)$ zu berechnen.
Da die Zufallsvariable X nur die Ausprägungen

- „Stift ist **fehlerhaft**“ und
- „Stift ist **nicht fehlerhaft**“

kennt und bei einem Stichprobenumfang von 800 näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** ausgegangen werden kann, ist die Zufallsvariable X näherungsweise **binomialverteilt**. Für den Stichprobenumfang gilt $n = 800$. Die Wahrscheinlichkeit p für einen fehlerhaften Stift ergibt sich aus dem relativen Anteil der fehlerhaften Stifte in der Produktion. Für p gilt also:

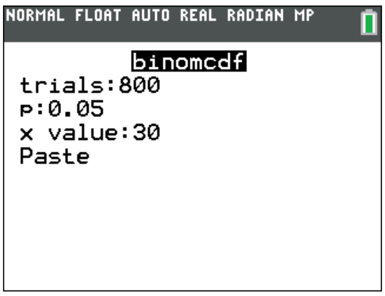
- $p = 5\,\% = 0,05$.

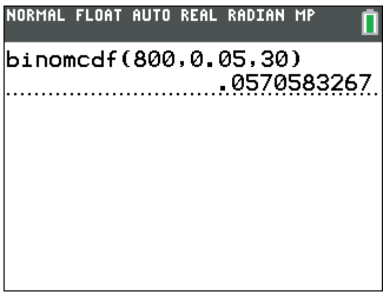
Die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit kannst du mit deinem GTR berechnen.

Willst du die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit mit deinem GTR berechnen, so wechselst du zunächst in den Calculator-Modus deines GTR. In diesem wendest du dann den `binomCdf`-Befehl an, auf welchen du über

`2ND → Vars (DISTR) → B:binomcdf(`

zugreifst. Willst du die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 30)$ hier berechnen, so wendest du den `binomCdf`-Befehl wie in den unten stehenden Schaubildern an.





Für die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 30)$ gilt also: $P(X \leq 30) \approx 0,05706 \approx 5,71\,\%$.

▶ Wahrscheinlichkeit, für die geg. Abweichung vom Erwartungswert

Hier sollst du nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass der Wert von X um weniger als 10 **vom Erwartungswert** der Zufallsvariable X abweicht. Bestimme dazu zunächst den **Erwartungswert** der Zufallsvariablen X. Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen ergibt sich dabei wie folgt:

- $E = n \cdot p$

Hast du den Erwartungswert von X bestimmt, so formulierst du im nächsten Schritt die hier zu berechnende Wahrscheinlichkeit. Beachte dabei das hier eine Abweichung **„nach oben“ und „nach unten“** beachtet werden muss. Die hier zu berechnende Wahrscheinlichkeit hat also diese Gestalt:

$P(k_1 \leq X \leq k_2)$ mit:

- k_1: untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit und
- k_2: obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit.

1. Schritt: Bestimmen des Erwartungswertes *E*

Setze $n = 800$ und $p = 0,05$ in die Formel für den Erwartungswert E ein, um diesen zu bestimmen:

- $E = n \cdot p = 800 \cdot 0,05 = 40.$

2. Schritt: Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit

Soll der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert $E = 40$ abweichen so müssen folgende zwei Sachverhalte für Zufallsvariable X erfüllt sein:

- X muss größer 30 und
- X muss kleiner 50 sein.

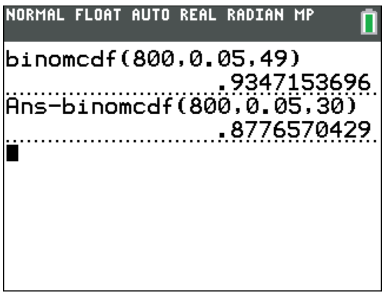
Formulierst du dies nun als Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich hier folgendes:

- $P(30 < X < 50) = P(31 \leq X \leq 49).$

Diese Wahrscheinlichkeit kannst du nun wie oben mit deinem GTR berechnen. Da dieser aber nur Wahrscheinlichkeiten der Gestalt $P(X \leq k)$ berechnen kann, musst du die hier vorliegende Wahrscheinlichkeit zunächst wie folgt umformen:

$P(31 \leq X \leq 49) = P(X \leq 49) - P(X \leq 30)$

Berechne nun $P(X \leq 49)$ und $P(X \leq 30)$ wie oben mit deinem GTR. Du solltest zu folgendem Ergebnis gekommen sein:



Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8777 bzw. 87,77 % weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert ab.

b)

▸ Bestimmen des Ablehnungsbereichs

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass der Betrieb eine neue Maschine erwirbt, von der behauptet wird, dass **höchstens 2 %** der von ihr produzierten Stifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll hier mit Hilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten

Stiften **überprüft** werden. Deine Aufgabe ist es dabei, zu bestimmen, **ab welcher Anzahl** von fehlerhaften Stiften man sich **gegen** die Hypothese entscheidet. Die **Irrtumswahrscheinlichkeit soll hier maximal 5 % betragen**.

Betrachte dazu zunächst die Zufallsvariable Y. Zufallsvariable Y beschreibt hier die **Anzahl der fehlerhaften Bleistifte** und ist mit gleicher Begründung wie oben **näherungsweise binomialverteilt**. Für diese gilt dabei $n = 800$ und $p = 0,02$. Da hier die Anzahl an fehlerhaften Bleistiften ermittelt werden soll, ab welcher nicht mehr angenommen wird, dass die Maschine eine Ausschussquote von 2 % hat, müssen hier die **Hypothesen** wie folgt lauten:

- $H_0: \quad p \leq 0,02$
- $H_1: \quad p > 0,02$

Es handelt sich also um einen **rechtsseitigen Hypothesentest**. Da du hier die Anzahl der Stifte ermitteln sollst, ab welcher man sich gegen die Hypothese H_0 entscheidet, suchst du hier den **Ablehnungsbereich** für die Hypothese H_0:

- Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{g, \ldots, 800\}$.

Um diese Aufgabe zu lösen, gilt es hier also den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ zu bestimmen. Bestimme diesen über die Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. über die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Der Ablehnungsbereich wird hier über die kleinste natürliche Zahl bestimmt, für welche folgender Zusammenhang noch erfüllt ist:

- $P(Y \geq g) \leq 0,05$.

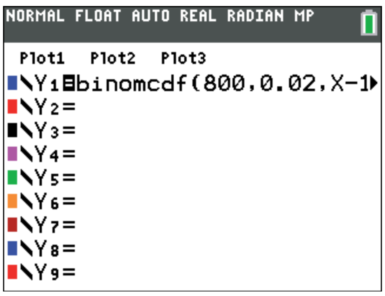
Diese Ungleichung kannst du nun mit deinem GTR lösen. Forme diese dazu zunächst wie folgt um:

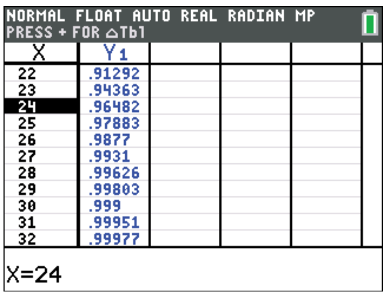
$$\begin{array}{llll}
P(Y \geq g) & \leq & 0,05 & \\
1 - P(Y < g) & \leq & 0,05 & \\
1 - P(Y \leq g-1) & \leq & 0,05 & \mid -1 \\
-P(Y \leq g-1) & \leq & -0,95 & \mid :(-1) \\
P(Y \leq g-1) & \geq & 0,95 &
\end{array}$$

Füge nun die linke Seite der Gleichung als Funktion in den Y=-Editor deines GTR ein, denke dabei daran, dass $n = 800$ und $p = 0,02$ gelten muss (linke Abbildung). Wechsle nun ins `Table`-Menü und suche die Stelle, an welcher zum ersten Mal

- $P(Y \leq g-1) \geq 0,95$

gilt (rechte Abbildung).





Da für X = 24 das erste mal die Aussage erfüllt ist, gilt hier für den Ablehnungsbereich:

- Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{24, \ldots, 800\}$.

Das heißt, bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften entscheidet man sich gegen die Nullhypothese.