Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Ableitung bilden

Zur Bestimmung der Ableitung der Funktion f wird die Kettenregel verwendet:
Zum einen wird die innere Funktion $v(x) = 4x^2$ und zum anderen die äußere Funktion $u(x) = \frac{1}{8}\sin(v(x))$ abgeleitet.

$$f(x) = \frac{1}{8}\sin\left(4x^2\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}\cos\left(4x^2\right)\cdot 8x$$

$$f'(x) = x\cdot\cos\left(4x^2\right)$$

Die Ableitung von Sinus- und Kosinusfunktionen wird nach folgender Regel durchgeführt:

$$\begin{tikzcd}
 & \sin(x)' \arrow[dr, bend left] & \\
-\cos(x)' \arrow[ur, bend left] & & \cos(x)' \arrow[dl, bend left] \\
 & -\sin(x)' \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$

Merkhilfe Trig-Kreis

Aus z.B. $\cos(x)$ wird demnach $-\sin(x)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Stammfunktion angeben

Zur Bestimmung einer Stammfunktion wird die Funktion zuerst mit Hilfe von Potenzen dargestellt:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$$

$$f(x) = 4\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^3$$

Danach wird im Exponenten jeweils 1 addiert. “Davor“ wird dann durch den gesamten Exponenten geteilt.

$$F(x) = \frac{4}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2\cdot(3+1)}x^{3+1}$$

$$= 8\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}x^4$$

$$F(x) = 8\sqrt{x} + \frac{1}{8}x^4$$

Aufgabe 3 (3VP)

Weitere Nullstellen bestimmen

Bei einem Polynom mit der Nullstelle x_1 gilt generell: Um weitere Nullstellen zu berechnen, muss das gesamte Polynom durch (x minus Nullstelle) dividiert werden, hier also durch $(x-1)$. Bei der Polynomdivision ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^3-3x^2\quad -x+3):(x-1)=x^2-2x-3 \\
\underline{-x^3\quad +x^2} \\
\qquad -2x^2\quad -x \\
\qquad\quad \underline{2x^2-2x} \\
\qquad\qquad\quad -3x+3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{3x-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2-2x-3=0$ wird mit Hilfe der *abc*- oder der *pq*-Formel gelöst:

$$x_{2/3}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2$$

$x_2=3;\;\; x_3=-1$

Es ergeben sich damit die beide weiteren Nullstellen $x_2=3$ und $x_3=-1$.

Aufgabe 4 (4VP)

Funktionsgleichung bestimmen

Allgemein hat eine ganzrationale Funktion dritten Grades die Funktionsgleichung $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ und dadurch die Ableitung $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Die Gleichung beinhaltet vier Unbekannte, daher müssen vier Bedingungen aufgestellt werden.

Bedingungen aufstellen

Das Schaubild berührt die x-Achse im Ursprung.	$f(0)=0$ (Koordinaten des Punkts) $f'(0)=0$ (Steigung gleich Null)
$H(1\mid 1)$ ist Hochpunkt des Schaubilds	$f(1)=1$ (Koordinaten des Punkts) $f'(1)=0$ (Steigung gleich Null)

LGS aufstellen

Nach Einsetzen dieser vier Bedingungen in $f(x)$ bzw. $f'(x)$ erhält man folgendes LGS:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{I} & a\cdot 0^3 & + & b\cdot 0^2 & + & c\cdot 0 & + & d & = & 0 \\
\text{II} & 3a\cdot 0^2 & + & 2b\cdot 0 & + & c & & & = & 0 \\
\text{III} & a\cdot 1^3 & + & b\cdot 1^2 & + & c\cdot 1 & + & d & = & 1 \\
\text{IV} & 3a\cdot 1^2 & + & 2b\cdot 1 & + & c & & & = & 0
\end{array}
$$

Lässt man die Null–Faktoren weg, so ergibt sich folgendes LGS:

$$
\begin{array}{lcccccc}
\text{I} & & & & & d & = & 0 \\
\text{II} & & & & c & & = & 0 \\
\text{III} & a & + & b & & & = & 1 \\
\text{IV} & 3a & + & 2b & & & = & 0
\end{array}
$$

$3\cdot\text{III}-\text{IV}$ ergibt $b=3$. Diesen Wert setzt man nun in die dritte Gleichung ein und erhält somit $a=-2$.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x)=-2x^3+3x^2$.

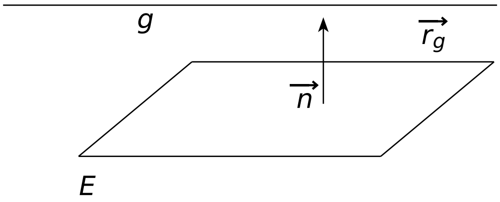
Aufgabe 5 (5VP)

1. Falsch, denn f' hat bei $x=-2$ keinen Vorzeichenwechsel. Das Schaubild von f hat somit bei $x=-2$ einen Wendepunkt bzw. einen Sattelpunkt; ein Tiefpunkt liegt jedoch nicht vor. a)

2. Richtig, da das Schaubild von f' für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Extrempunkte aufweist.
3. Richtig, da im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung des Schaubilds größer als die Steigung der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$) ist, welche die Steigung 1 besitzt.
4. Falsch, da das Schaubild der Ableitungsfunktion für $0 \leq x < 5$ stets oberhalb der x-Achse verläuft und somit f monoton steigend ist.

Aufgabe 6 (4VP)

Folgendes Schaubild dient der Orientierung:



a) Um zu zeigen, dass die Gerade und die Ebene parallel sind, wird das Skalarprodukt des

Richtungsvektors $\overrightarrow{r_g}$ der Geraden mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Ebene E gebildet, denn damit wird gezeigt, dass die beiden Vektoren senkrecht zueinander sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$$

Das Skalarprodukt ist gleich Null, die Gerade und die Ebene sind daher parallel oder die Gerade liegt in der Ebene.

Nun überprüft man, ob der Punkt $P(2\,|\,-16\,|\,2)$ der Geraden g in der Ebene enthalten ist.

$-2 \cdot 2 + (-16) - 2 \cdot 2 + 15 = -9 \neq 0$. P ist demnach nicht in E enthalten.

Die Gerade und die Ebene sind also parallel.

b) g und E liegen parallel zueinander. Der Abstand eines Punktes, z.B. $P(2\,|\,-16\,|\,2)$ der Geraden g zur Ebene E entspricht daher dem Abstand der Geraden zur Ebene.

Der Abstand wird mit Hilfe der Hesse'schen Normalenform berechnet.

HNF aufstellen

Um die Hesse'sche Normalenform aufzustellen, benötigt man die Länge des Normalenvektors. Diese Länge berechnet sich über den Betrag des Vektors:

$$\left|\overrightarrow{n}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

Die Hesse'sche Normalenform der Ebene lautet: *HNF*: $\dfrac{-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = 0$.

Abstand berechnen

Nun wird der Punkt P in die Gleichung eingesetzt und somit der Abstand berechnet. Dabei muss im Zähler ein Betrag gesetzt werden.

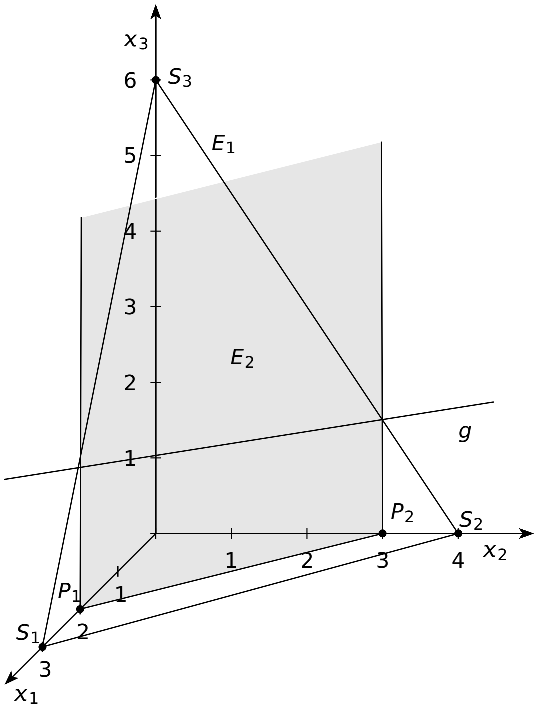
$$d(g;E)=\frac{|-2\cdot(2)+(-16)-2\cdot(2)+15|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{|-4-16-4+15|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

Der Abstand beträgt demnach $3LE$.

Aufgabe 7 (3VP)

Ebene und Schnittgerade darstellen

Damit die Ebenen in einem Koordinatensystem dargestellt werden können, werden ihre Spurpunkte bestimmt.



Spurpunkte der Ebene E_1

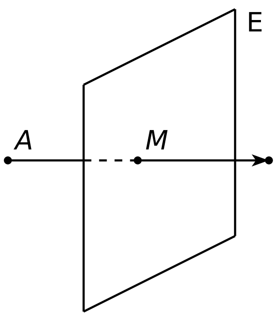
Für die Ebene E_1: $4x_1+3x_2+2x_3=12$ erhält man $S_1(3\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$ und $S_3(0\,|\,0\,|\,6)$.
Die Spurpunkte werden berechnet, indem jeweils zwei Koordinaten gleich Null gesetzt werden.

Spurpunkte der Ebene E_2

E_2 ist parallel zur x_3-Achse. Daher gibt es auf der x_3-Achse keinen Spurpunkt.

Für die Ebene E_2: $3x_1+2x_2=6$ erhält man $P_1(2\,|\,0\,|\,0)$ und $P_2(0\,|\,3\,|\,0)$.
Verbindet man die Schnittpunkte von je zwei Spurgeraden, so erhält man die Schnittgerade g.

Aufgabe 8 (3VP)



Die Punkte liegen symmetrisch zur Ebene, somit ist deren Verbindungsvektor gleich dem Normalenvektor der Ebene. Damit lässt sich eine Koordinatengleichung der Ebene bestimmen.

Somit erhält man die Ebenengleichung $E: n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=d$.

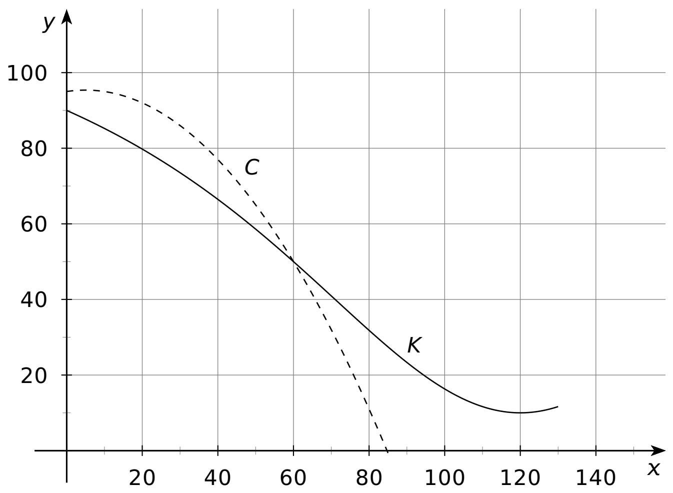
Damit die Konstante d bestimmt werden kann, wird ein Punkt der Ebene benötigt. Dieser Punkt muss der Mittelpunkt der Strecke AB sein.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) **Skizze des Schaubilds *K*** (5VP)

Mit Hilfe des GTR erhält man folgendes Schaubild:



Bestimmung der Koeffizienten von *g*

Auf der Funktion g mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ sollen die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen. Es ergeben sich damit drei Bedingungen.

Zunächst soll der Punkt $P_1(0\,|\,95)$ auf dem Schaubild von g liegen, also muss $g(0) = 95$ sein:

$$g(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 95$$
$$c = 95 \quad \text{(I)}$$

Weiterhin soll $P_2(10\,|\,95) \in C$ sein:

$$g(10) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 95$$
$$100a + 10b + c = 95 \quad \text{(II)}$$

Die dritte und letzte Bedingung ergibt sich aus $P_3(20\,|\,92) \in C$:

$$g(20) = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 92$$
$$400a + 20b + c = 92 \quad \text{(III)}$$

Es ergibt sich also insgesamt das LGS

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & c &=& 95 \\ \text{II} & 100a + 10b + c &=& 95\,. \\ \text{III} & 400a + 20b + c &=& 92 \end{array}$$

Mit dem GTR kann dieses LGS gelöst werden, indem es in Matrizenschreibweise unter $\boxed{\text{2nd} \rightarrow x^{-1}\ \text{(MATRX)} \rightarrow \text{EDIT}}$ eingegeben und die Matrix dann über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow x^{-1}\ \text{(MATRX)} \rightarrow \text{MATH}}$ mit dem Befehl $\boxed{\text{B: rref}}$ auf Stufenform gebracht wird.

Nebenstehend ist die Eingabematrix und unterhalb die auf Stufenform gebrachte Ausgabematrix dargestellt.
Aus der Ausgabematrix lässt sich dann gleich ablesen: $a = -0,015$, $b = 0,15$ und $c = 95$.
Die Funktion g ist somit durch
$g(x) = -0,015x^2 + 0,15x + 95$ gegeben.

```
 [[0    0   1  95]
  [100  10  1  95]
  [400  20  1  92]]
rref([A])
 [[1  0  0  -.015]
  [0  1  0  .15  ]
  [0  0  1  95   ]]
```

Handschriftliche Lösung

Das LGS kann auch genauso schnell von Hand gelöst werden. Mit $c = 95$ bleiben nämlich nur noch zwei Gleichungen übrig:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 100a + 10b & = & 0 \\ \text{II} & 400a + 20b & = & -3 \\ \hline \text{I} & 100a + 10b & = & 95 \\ \text{IIa} & 200a & = & -3 \qquad (\text{II} - 2\cdot\text{I}) \end{array}$$

Aus (II) folgt dann $a = -\dfrac{3}{200} = -0,015$. Eingesetzt in (I) ergibt sich:

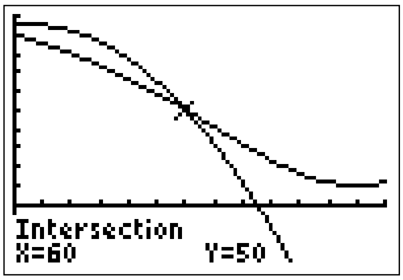
$100 \cdot (-0,015) + 10b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10b = 1,5 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0,15.$

Auch hier ergibt sich $a = -0,015$, $b = 0,15$ und $c = 95$, somit hat g auch hier die Funktionsgleichung $g(x) = -0,015x^2 + 0,15x + 95$.

b) **Berechnung der Koordinaten des Aufsetzpunktes** (5VP)

Der Aufsetzpunkt liegt an dem Ort, an dem die Flugbahn C des Springers den Aufsprunghang K das erste mal trifft – es ist also der Schnittpunkt zwischen f und g gesucht.

Dazu werden die Schaubilder K und C von f bzw. g über $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{5: intersect}}$ geschnitten. Es ergibt sich der Schnittpunkt $S(60 \mid 50)$.
Der Springer setzt im Punkt $S(60 \mid 50)$ auf dem Hang auf.



Bestimmung der maximalen Höhe des Springers über dem Hang

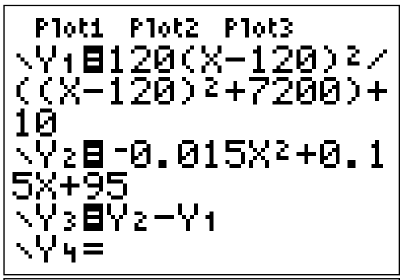
Der Springer befindet sich für $0 \leq x \leq 60$ noch in der Luft über dem Hang (bei $x = 0$ springt er ab, bei $x = 60$ trifft er auf). In diesem Bereich entspricht die Höhe des Springers dem Unterschied zwischen der Flugbahn C und dem Hang K. Dieser Unterschied ist durch $d(x) = g(x) - f(x)$ gegeben.

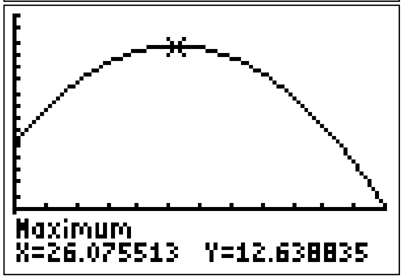
Die maximale Höhe entspricht dabei dem Maximum dieser Funktion d.

Dazu werden im Graph-Menü des GTR unter Y_1 und Y_2 die Funktionsgleichungen von f und g eingegeben, unter Y_3 schließlich $Y_2 - Y_1$.

Nebenstehend wurde das Graphikfenster im entsprechenden Menü auf $0 \leq x \leq 60$ und auch $-4 \leq y \leq 15$ heruntergesetzt, um das Schaubild von d gut sichtbar zu machen. Dann kann über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ das Maximum von d bestimmt werden, es liegt etwa bei $x \approx 26,1$ und beträgt $d_{\max} \approx 12,6$.

Die maximale Höhe des Springers über dem Aufsprunghang beträgt somit etwa $12,6$ m.





c) **Bestimmung des maximalen Werts von** k (4VP)

Die Flugbahnen des Springers werden nun durch die Gleichungen der Funktionsschar g_k mit $g_k(x) = -0,015x^2 + kx + 95$ beschrieben.

Der Springer landet hinter dem kritischen Punkt $W(71 \mid 40)$, wenn er sich an der Stelle $x = 71$ in einer Höhe von mehr als 40 Metern befindet, wenn also $g_k(71) > 40$ ist.

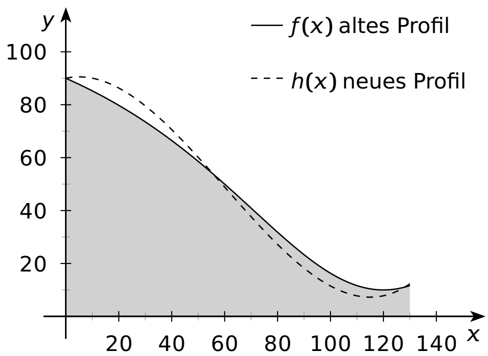
Da der Springer jedoch nicht hinter dem kritischen Punkt auftreffen soll, muss $g_k(71) \leq 40$ gelten:

$$\begin{aligned} g_k(71) &\leq 40 \\ -0,015 \cdot 71^2 + k \cdot 71 + 95 &\leq 40 \\ 71k + 19,385 &\leq 40 \\ 71k &\leq 20,615 \\ k &\leq \frac{20,615}{71} \approx 0,29 \end{aligned}$$

Für $k \leq 0,29$ landet der Springer somit hinter dem kritischen Punkt.

d) **Überprüfung, ob Erde angeliefert oder weggefahren werden muss** (4VP)

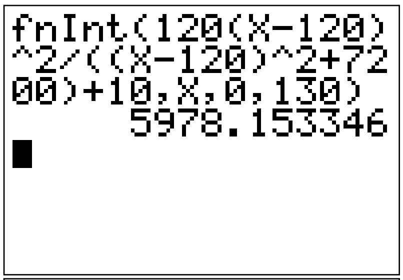
Ob Erde weggefahren oder angeliefert wird muss, hängt davon ab, ob die Querschnittsfläche A_{neu} des neuen Profils kleiner oder größer als die Querschnittsfläche A_{alt} des alten Profils ist. Die Querschnittsfläche wird über das Integral berechnet und dieses wiederum mit dem GTR.



Die Integrale lassen sich jeweils über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnen.

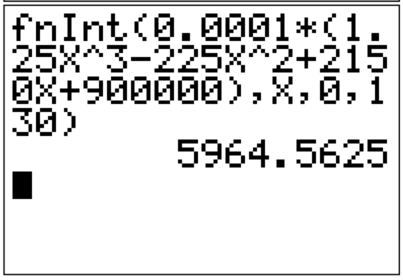
Für das alte Profil (wird durch f beschrieben) ergibt sich:

$$A_{\text{alt}} = \int_0^{130} f(x)\,dx \approx 5.978,2.$$



Entsprechend gilt für das neue Profil:

$$A_{\text{neu}} = \int_0^{130} h(x)\,dx \approx 5.964,6.$$



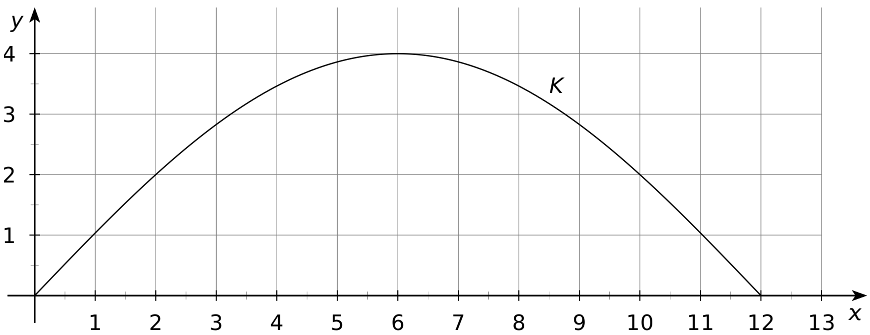
Wie nun erkennbar ist, hat das neue Profil eine **kleinere** Querschnittsfläche, der neue Hang hat damit insgesamt ein kleineres Volumen.
Es muss damit Erde weggefahren werden, wenn die Schanze umgebaut wird.

Aufgabe I 2.1

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Skizze des Schaubilds von f** (4VP)

Mit Hilfe des GTR oder mit den typischen Eigenschaften (Amplitude, Periode, ...) dieser Sinusfunktion erhält man das Schaubild von f:



Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte

Die Gerade $y = mx$ sind für alle Werte von m Ursprungsgeraden, da ihr y-Achsenabschnitt Null ist.

Da auch $f(0) = 0$ ist, gibt es immer mindestens einen gemeinsamen Punkt von K mit der Geraden $y = mx$. Es ergibt sich ein weiterer gemeinsamer Punkt, wenn die Steigung der Geraden größer oder gleich Null ist, aber gleichzeitig kleiner als die Steigung m_t von f im Ursprung (d.h. $0 \leq m < m_t$).

Die Tangentensteigung m_t im Ursprung berechnet man mit Hilfe von f', die nach der Kettenregel gebildet wird:

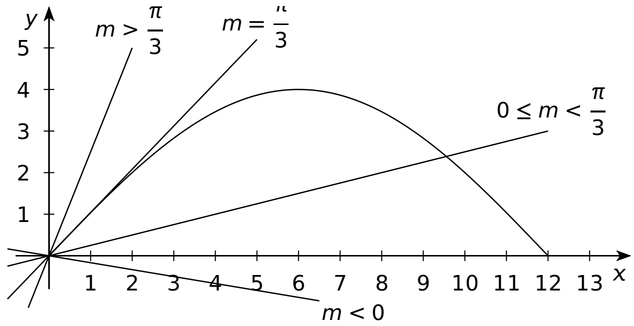
$$f'(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right).$$

Die Steigung im Ursprung beträgt somit:

$$f'(0) = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{\pi}{3}.$$

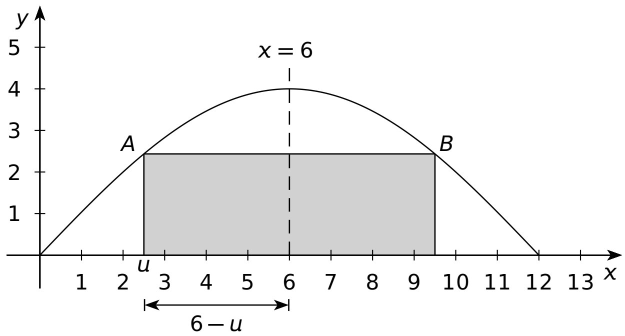
Somit hat K mit der Geraden $y = mx$ für $0 \leq m < \frac{\pi}{3}$ **zwei Punkte** gemeinsam.

Am Schaubild von f lässt sich dann weiterhin erkennen, dass K mit $y = mx$ nur einen Punkt (und zwar den Ursprung) gemeinsam hat, wenn $m < 0$ oder $m \geq \frac{\pi}{3}$ ist.



b) **Berechnung der Seitenlängen des flächengrößten Rechtecks** (5VP)

Wegen der Symmetrie von K muss auch das entsprechende Rechteck achsensymmetrisch sein — und zwar zur senkrechten Geraden $x = 6$.
Es sei $A(u \mid f(u))$ (mit $0 < u < 6$) ein Eckpunkt des Rechtsecks, der auf K liegt. Dann hat Rechteck die Länge $2 \cdot (6 - u)$ und die Höhe $f(u)$ (vgl Skizze).

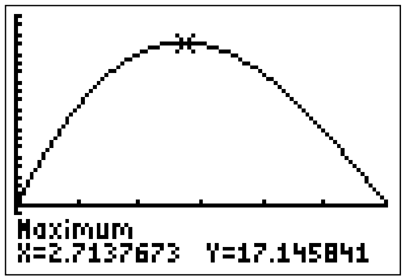


Das Rechteck hat somit den Flächeninhalt.

$$A(u) = 2(6-u) \cdot f(u) = (12-2u) \cdot 4\sin\left(\frac{\pi}{12}u\right).$$

Da die Seitenlängen des flächen**größten** Rechtecks gesucht sind, muss nun zunächst der u-Wert gesucht werden, bei dem $A(u)$ im Bereich $0 < u < 6$ maximal ist.

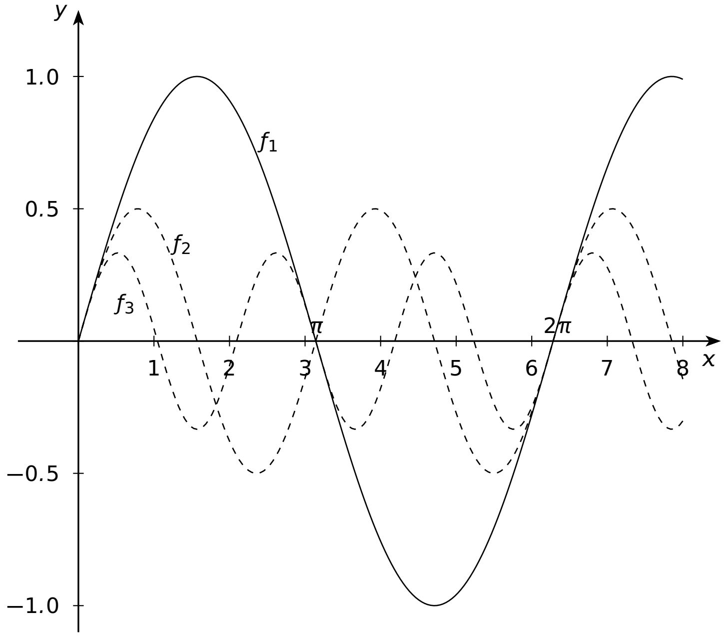
Dazu wird mit dem GTR zunächst das Schaubild von $A(u)$ gezeichnet und anschließend über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{4: maximum}}$ das Maximum bestimmt. Es liegt etwa bei $u \approx 2{,}71$.



Bei maximalem Flächeninhalt hat das Rechteck somit eine Länge von $a = 12 - 2u \approx 6{,}58$ und eine Breite von $b = f(u) \approx 2{,}61$.

Aufgabe I 2.2

Es ist $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax)$; $x \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.



a) **Auswirkung einer Veränderung des Parameters a** (4VP)

Die Funktionen f_a haben jeweils die Amplitude $\frac{1}{a}$ sowie die Periode $p = \frac{2\pi}{a}$. Da der Parameter a stets im Nenner dieser beiden Faktoren steht gilt: Bei größer werdendem a wird sowohl die Amplitude als auch die Periode von f_a immer kleiner, das bedeutet:

Das Schaubild von f_a wird mit wachsendem a sowohl in x- als auch in y-Richtung gestaucht.

Dies ist auch an den obigen Schaubildern der Scharfunktionen f_1, f_2 und f_3 deutlich erkennbar.

Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei benachbarten Nullstellen

Die Nullstellen der Funktionen f_a ergeben sich aus der Bedingung $\sin(ax) = 0$. Die einfachsten Nullstellen der Sinusfunktion sind 0 und π, also sind hier die beiden Nullstellen $ax = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ sowie $ax = \pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{\pi}{a}$.

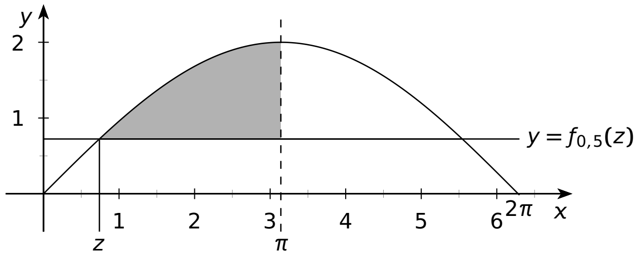
Für den Flächeninhalt unter dem Schaubild von f_a zwischen diesen beiden Nullstellen gilt dann:

$$
\begin{aligned}
A(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(ax)\right) dx = \left[\frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \left[-\frac{1}{a^2} \cdot \cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} \\
&= \left(-\frac{1}{a^2} \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi}{a}\right)\right) - \left(-\frac{1}{a^2} \cdot \cos(a \cdot 0)\right) \\
&= -\frac{1}{a^2} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{1}{a^2} \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} \\
&= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}
\end{aligned}
$$

Zwischen zwei benachbarten Nullstellen schließt das Schaubild von f_a mit der x-Achse eine Fläche mit einem Inhalt von $\frac{2}{a^2}$ ein.

b) **Bestimmung der Stelle** z (5VP)

Die Scharfunktion $f_{0,5}$ mit $f_{0,5}(x) = 2 \cdot \sin(0,5x)$ schließt zwischen ihren Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$ eine Fläche von $A = \frac{2}{0,5^2} = 8$ FE ein (vgl. Teilaufgabe a).



Aufgrund der Achsensymmetrie zur Geraden $x = \pi$ beträgt der Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von $f_{0,5}$ und der x-Achse über dem Intervall $[0;\, \pi]$ die Hälfte davon, also 4 FE.

Wird diese Fläche durch eine Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = f_{0,5}(z)$ halbiert, so beträgt der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Parallelen $y = f_{0,5}(z)$ im Intervall $[z;\, \pi]$ 2 FE (in der Zeichnung grau unterlegt).

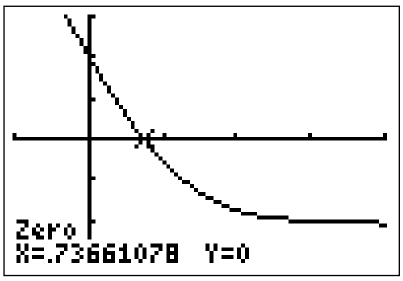
$$\int_z^{\pi} (f_{0,5}(x) - f_{0,5}(z))\, dx = \int_z^{\pi} (2 \cdot \sin(0,5x) - 2 \cdot \sin(0,5z))\, dx = 2$$

Beachten Sie nun bei der anschließenden Integration, dass es sich bei dem Term $2\sin(0,5z)$ um eine **feste Zahl** und keinen variablen Term handelt, eine Stammfunktion dieses Ausdrucks wäre somit $2\sin(0,5z) \cdot x$.

$$\begin{aligned}
[-4 \cdot \cos(0,5x) - 2\sin(0,5z) \cdot x]_z^{\pi} &= 2 \\
(-4 \cdot \underbrace{\cos(0,5\pi)}_{=0} - 2\sin(0,5z) \cdot \pi) - (-4 \cdot \cos(0,5z) - 2\sin(0,5z) \cdot z) &= 2 \\
-2\pi \cdot \sin(0,5z) + 4\cos(0,5z) + 2z \cdot \sin(0,5z) &= 2 \\
-2\pi \sin(0,5z) + 4\cos(0,5z) + 2z \cdot \sin(0,5z) - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hier nur mit dem GTR und näherungsweise lösbar. Um sie zu lösen, wird eine Funktion g mit $g(z) = -2\pi\sin(0,5z) + 4\cos(0,5z) + 2z \cdot \sin(0,5z) - 2$ aufgestellt und deren Nullstelle im Bereich $0 < z < \pi$ berechnet.

Dazu wird im Graph-Menü das Schaubild von g gezeichnet und anschließend über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{2: zero}}$ die Nullstelle im Bereich $0 < z < \pi$ berechnet. Es ergibt sich näherungsweise $z \approx 0,74$.

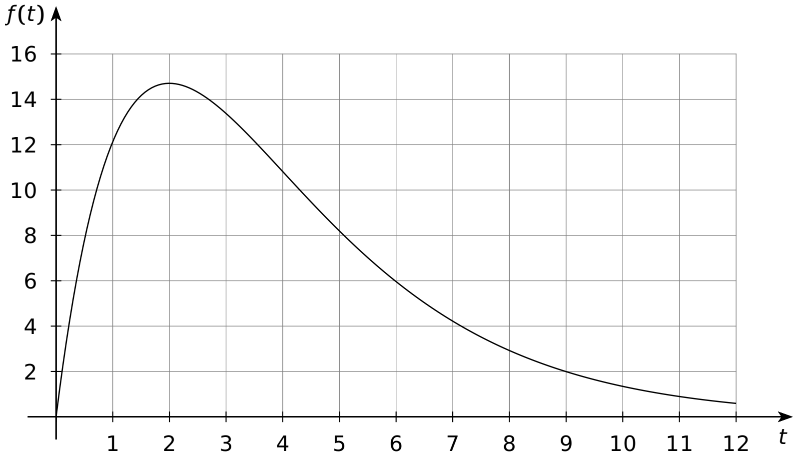


Die Parallele zur x-Achse durch $P(z \mid f_{0,5}(z))$ mit $z \approx 0,74$ halbiert die eingeschlossene Fläche.

Aufgabe I 3

a) **Skizze des zeitlichen Konzentrationsverlaufs** (5VP)

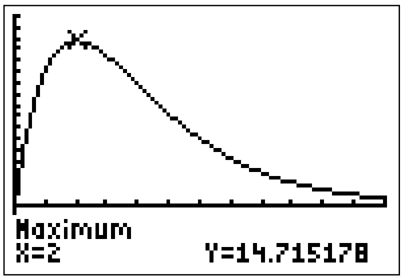
Das entsprechende Schaubild ergibt sich mit dem GTR.



Bestimmung des Konzentrationsmaximums

Der höchste Wert der Konzentration entspricht dem **Maximum** von $f(t)$.

Um dieses zu bestimmen, wird das Schaubild von $f(t)$ gezeichnet und anschließend über 2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum das Maximum von f berechnet. Es liegt an der Stelle $t = 2$ und beträgt $f(2) \approx 14,7$.

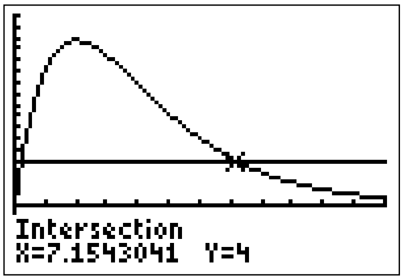


Somit erreicht die Konzentration nach exakt 2 Stunden ihren höchsten Wert von etwa $14,7\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

Berechnung der Wirksamkeitsspanne

Gesucht ist der Bereich, in dem die Konzentration $f(t) \geq 4$ ist. Wir können mit dem GTR allerdings nur die Stellen berechnen, an denen die Konzentration **genau** $4\ \frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt.

Dazu wird mit dem GTR das Schaubild von $f(t)$ mit der Geraden $y = 4$ über die Befehlsfolge 2nd → TRACE (CALC) → 5: intersect geschnitten.
Es ergeben sich die zwei Schnittstellen $t_1 \approx 0,22$ und $t_2 \approx 7,15$.
Am Schaubild von f ist erkennbar, dass im Bereich **zwischen** diesen beiden Stellen die Konzentration größer als $4\ \frac{\text{mg}}{\ell}$ ist. Dieser Bereich ist $t_2 - t_1 \approx 6,9$ groß.



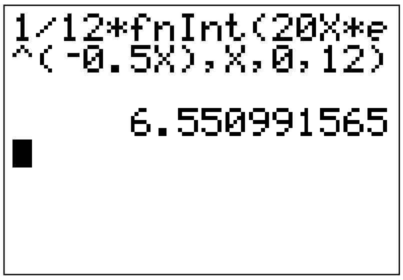
Somit wirkt das Medikament in einer Zeitspanne, die etwa 6,9 Stunden umfasst.

Bestimmung der mittleren Konzentration

Die mittlere Konzentration in den ersten 12 Stunden entspricht dem mittleren Funktionswert von f im Intervall $[0; 12]$:

$$\overline{K} = \frac{1}{12-0} \cdot \int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(t)\,dt$$

Dieses Integral wird mit dem GTR über MATH → 9: fnInt berechnet und beträgt etwa 6,6.
Die mittlere Konzentration des Medikaments betrug in den ersten 12 Stunden etwa $6,6\ \frac{\text{mg}}{\ell}$.

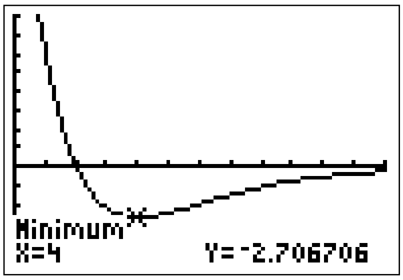


b) **Berechnung des Zeitpunkts des stärksten Abbaus** (4VP)

Eine Änderung der Konzentration – also auch eine Zunahme bzw. ein Abbau – wird durch die **Ableitung** von f beschrieben. Wenn diese negativ ist, wird das Medikament im entsprechenden Bereich abgebaut.

Der stärkste Abbau wird durch das **Minimum** von $f'(t)$ beschrieben. Um dieses zu bestimmen, wird zunächst f' benötigt, die nach der Produktregel gebildet wird. Beachten Sie dabei, dass $\mathrm{e}^{-0,5t}$ nach der Kettenregel abgeleitet $\left(\mathrm{e}^{-0,5t}\right)' = \mathrm{e}^{-0,5t} \cdot (-0,5) = -0,5\mathrm{e}^{-0,5t}$ ergibt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 20 \cdot \mathrm{e}^{-0,5t} + 20t \cdot \left(-0,5\mathrm{e}^{-0,5t}\right) \\ &= 20 \cdot \mathrm{e}^{-0,5t} - 10t \cdot \mathrm{e}^{-0,5t} \\ &= (20 - 10t)\mathrm{e}^{-0,5t} \end{aligned}$$



Die Ableitungsfunktion wird nun mit dem GTR gezeichnet und anschließend über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ ihr Minimum berechnet, es liegt an der Stelle $t = 4$ und beträgt $f'(4) \approx -2,71$.
Somit wird das Medikament nach 4 Stunden am stärksten abgebaut.

Der Funktionsterm der Ableitung muss nicht dringend gebildet werden, über den Befehl $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{8: nDeriv}}$ kann sie im Y-Editor auch direkt gezeichnet werden. Der GTR kann dabei allerdings keinen Funktionsterm von f' angeben.

Bestimmung der momentanen Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 4$

Die momentane Änderungsrate f' hat – wie eben berechnet wurde – an der Stelle $t = 4$ ihr Minimum, welches etwa $-2,71$ beträgt. Somit beträgt die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 4$ etwa $-2,71\ \frac{\frac{\mathrm{mg}}{\ell}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{mg}}{\ell\mathrm{h}}$.

Der exakte Wert wäre hierbei $f'(4) = (20 - 10 \cdot 4) \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot 4} = -20\mathrm{e}^{-2}$.

Bestimmung des Zeitpunktes des vollständigen Abbaus

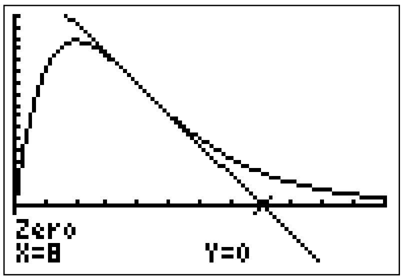
Für die Tangente an das Schaubild von f an einer Stelle x_0 gilt allgemein:
$t\colon y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Für die Tangente an der Stelle $t = 4$ gilt somit:

$$\begin{aligned} t\colon y &= f'(4)(t-4) + f(4) \\ y &= -20\mathrm{e}^{-2}(t-4) + 80\mathrm{e}^{-2} \\ y &= -20\mathrm{e}^{-2} \cdot t + 160\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Oder näherungsweise $y \approx -2,71 \cdot t + 21,67$.

Nach diesem Modell wäre das Medikament genau dann abgebaut, wenn die Tangente den y-Wert Null besitzt, also die x-Achse schneidet:



$$0 = -20e^{-2} \cdot t + 160e^{-2}$$

$$20e^{-2} \cdot t = 160e^{-2}$$

$$t = \frac{160e^{-2}}{20e^{-2}} = 8$$

Alternativ kann die Tangente auch mit dem GTR gezeichnet und dann über 2nd → TRACE (CALC) → 2: zero deren Nullstelle bestimmt werden, auch hier ergibt sich $t = 8$.

Bei dieser Näherung wäre das Medikament 8 Stunden nach der Einnahme vollständig abgebaut.

c) **Skizze des zeitlichen Verlaufs der Gesamtkonzentration** (5VP)

Nach den ersten 4 Stunden, in denen die Konzentration noch durch $f(t)$ beschrieben wird, wird erneut eine Spritze mit derselben Dosierung verabreicht. Das entsprechende Schaubild entspricht dabei wieder dem Schaubild von f, nur das es nun um 4 LE nach rechts verschoben wurde. Dieses Schaubild wird durch $f(t-4)$ beschrieben.

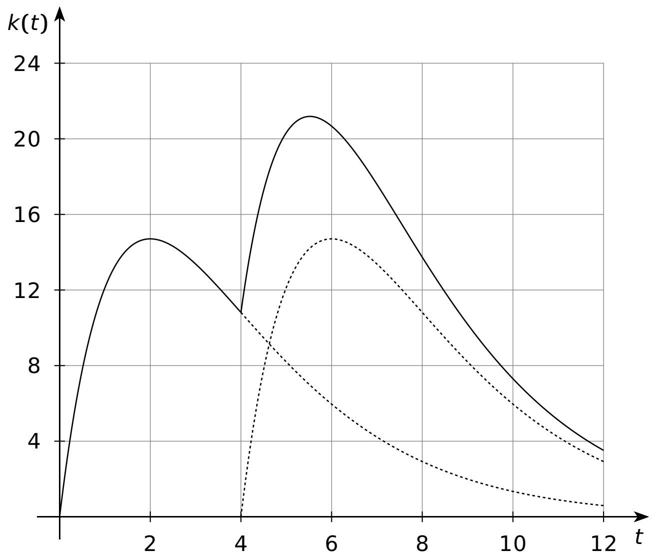
Gleichzeitig addiert sich zu $f(t-4)$ in diesem Bereich auch noch die Konzentrationsmenge $f(t)$, die zu Beginn verabreicht wurde. Somit gilt insgesamt:

$$k(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } \ 0 \le t < 4 \\ f(t) + f(t-4) & \text{für } \ 4 \le t \le 12 \end{cases}$$

Um das Schaubild von k zeichnen zu können, sind sowohl der GTR als auch eine Wertetabelle sehr hilfreich.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	0	12,1	14,7	13,4	10,8	8,2	6,0	4,2	2,9	2,0	1,3	0,9	0,6
$f(t-4)$					0	12,1	14,7	13,4	10,8	8,2	6,0	4,2	2,9
$k(t)$	0	12,1	14,7	13,4	10,8	20,3	20,7	17,6	13,7	10,2	7,3	5,1	3,5

Letztlich ergibt sich das nebenstehende Schaubild von $k(t)$, das aus den beiden Teilkurven $k_1(t) = f(t)$ und $k_2(t) = f(t) + f(t-4)$ besteht.

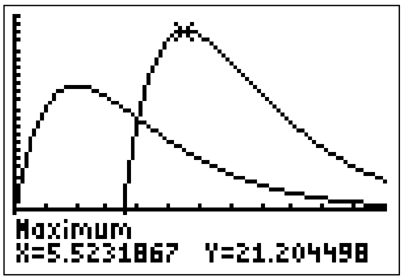


Überprüfung, ob die Vorgabe eingehalten wird

Bereits an der Wertetabelle ist erkennbar, dass die Konzentration $k(t)$ im Bereich $4 \leq t \leq 12$ die Maximalkonzentration von 20 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ überschreitet.

Das Maximum von $k(t)$ kann mit dem GTR bestimmt werden. Dazu werden die beiden Teilkurven gezeichnet und das Maximum über 2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum bestimmt. Das Maximum liegt dabei auf der zweiten Teilkurve für $4 \leq t \leq 12$.

Das Maximum liegt an der Stelle $t \approx 5,52$ mit $k(5,52) \approx 21,2$.



Somit wird die Vorgabe nicht eingehalten.

Hinweis: Das Schaubild von k kann einfach mit dem GTR gezeichnet werden, wenn bei Y_1 die Funktionsgleichung von f eingegeben wird. Bei Y_2 wird dann $Y_2 = Y_1 + Y_1(X-4)$ eingegeben, was letztlich $f(t) + f(t+4)$ entspricht.

d) **Bestimmung der beiden Parameter a und b** (4VP)

Die Konzentration im Blut wird nun, nach einer Veränderung des Medikaments, durch eine Funktion g mit $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ beschrieben, wobei sowohl $a > 0$ als auch $b > 0$ gilt.

Die Funktion besitzt nach der Produktregel die Ableitung

$$\begin{aligned} g'(t) &= a \cdot e^{-bt} + at \cdot e^{-bt} \cdot (-b) \\ &= (a - ab \cdot t)e^{-bt} \\ &= (1 - b \cdot t) \cdot ae^{-bt}. \end{aligned}$$

Die Funktion g soll nach 4 Stunden ihren **größten Wert** 10 annehmen. Da es sich bei diesem Wert um ein **Extremum** handelt, muss gelten:

$$\begin{aligned} g'(4) &= 0 \\ (1 - 4b) \cdot ae^{-4b} &= 0 \end{aligned}$$

Die e-Funktion ae^{-4b} kann wegen $a > 0$ **nie** gleich Null werden. Die obige Gleichung wird also nur dann Null, wenn $1 - 4b = 0$, also $b = \frac{1}{4} = 0,25$ ist.

Der größte Wert der Funktion g soll weiterhin 10 betragen, somit ist $g(4) = 10$:

$$\begin{aligned} g(4) &= 10 \\ 4a \cdot e^{-4b} &= 10 \qquad | \; b = 0,25 \text{ einsetzen} \\ 4a \cdot e^{-1} &= 10 \\ a &= \frac{10}{4e^{-1}} = \frac{5}{2}e = 2,5e \approx 6,80 \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt $a \approx 6,80$ und $b = 0,25$. Die Konzentration des Medikaments wird also nun durch die Funktion g mit $g(t) = 6,80t \cdot e^{-0,25t}$ beschrieben.

Wahlteil IIAufgabe II 1.1

a) **Bestimmung einer Koordinatengleichung von** E (5VP)

Von der Ebene E durch die Punkte $A(3 \mid 5 \mid -4)$, $B(4 \mid 1 \mid 4)$ und $D(-4 \mid 9 \mid 0)$ lässt sich zunächst eine Parametergleichung aufstellen:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ dieser Ebene ergibt sich aus dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) ihrer beiden Spannvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot 4 - 8 \cdot 4 \\ 8 \cdot (-7) - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 4 - (-4)\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurde innerhalb des Vektors mit -12 gekürzt. Dies ist allerdings nur zulässig, da es sich beim Normalenvektor um einen Richtungsvektor handelt!

Als Ansatz für eine Koordinatengleichung ergibt sich damit $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = d$. Um den fehlenden Summand d zu bestimmen, werden die Koordinaten von einem der drei Punkte in die Gleichung eingesetzt, z.B. von $A(3 \mid 5 \mid -4)$:

$$A \text{ in } E\colon \quad 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = d$$
$$29 = d$$

Eine Koordinatengleichung von E ist somit $E\colon 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$.

Nachweis, dass das Dreieck gleichschenklig aber nicht gleichseitig ist

Für die Längen der drei Seiten des Dreiecks ABD gilt jeweils:

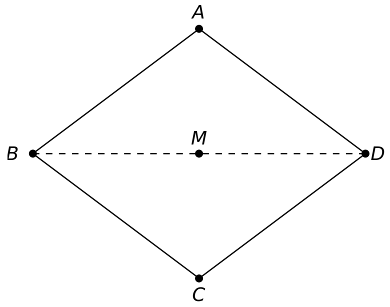
$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9,$$

$$\overline{AD} = |\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9,$$

$$\overline{BD} = |\overrightarrow{BD}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

Das Dreieck hat also zwei gleich lange Seiten und ist damit gleichschenklig. Als gleichseitiges Dreieck müssten sogar alle drei Seiten gleich lang sein, was hier aber offensichtlich nicht der Fall ist.

Bestimmung der Koordinaten des Eckpunktes C



Das Dreieck soll zu einer Raute, also einem Viereck mit vier gleich langen Seiten ergänzt werden. Für den Punkt C gilt dann z.B. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Wegen der Rauteneigenschaft muss weiterhin $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gelten:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(-3 \mid 5 \mid 8)$$

Bestimmung der Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M

In einer Raute **halbieren** sich die beiden Diagonalen. Der Punkt M kann also als Mittelpunkt der Strecke AC (oder auch BD) angesehen werden.

Mit $A(3 \mid 5 \mid -4)$ und $C(-3 \mid 5 \mid 8)$ ergeben sich die Koordinaten von M dann beispielsweise zu:

$$M\left(\frac{3+(-3)}{2} \mid dle \mid \frac{5+5}{2} \mid dle \mid \frac{-4+8}{2}\right) = M(0 \mid 5 \mid 2).$$

b) **Bestimmung des Pyramidenvolumens** (7VP)

Das Volumen der Pyramide berechnet sich über $V = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h$. Dafür wird die Grundfläche G_1 und die Höhe h der Pyramide benötigt.

Die Grundfläche ist die Fläche der Raute, die sich über $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ berechnen lässt. Dabei sind e und f die Längen der Diagonalen AC und BD.

$$e = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{180},$$

$$f = |\overrightarrow{BD}| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

Für die Grundfläche gilt somit $G_1 = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{180}$.

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand ihrer Spitze S von der Grundfläche, die in der Ebene E liegt. Dieser Abstand wird mithilfe der Hesse'schen Normalenform von E bestimmt:

$$E_{\text{HNF}}: \frac{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 29}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 29}{\sqrt{45}} = 0.$$

Der Abstand von $S(8 \mid 15 \mid 6)$ zur Ebene E wird bestimmt, indem die Koordinaten des Punktes in die HNF eingesetzt werden:

$$h = d(S; E) = \left|\frac{4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 6 - 29}{\sqrt{45}}\right| = \frac{90}{\sqrt{45}}.$$

Für das Pyramidenvolumen ergibt sich damit:

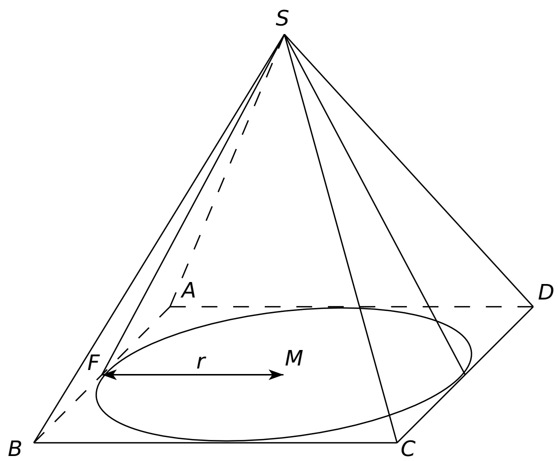
$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{180} \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} = 360.$$

Die Pyramide besitzt ein Volumen von 360 VE.

Bestimmung des Kreiskegelvolumens

Das Volumen des Kreiskegels wird mit Hilfe von $V = \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h$ bestimmt.

Dafür wird die Grundfläche G_2 und die Höhe des Kegels benötigt.
Die Höhe des Kreiskegels entspricht der Pyramidenhöhe, nämlich $h = \frac{90}{\sqrt{45}}$.
Die Grundfläche des Kreiskegels ist ein Kreis, dessen Radius r der Abstand des Mittelpunkts M zu einer Seite der Raute, z.B. AB ist. Der Grundkreis berührt diese Strecke in einem bestimmten Punkt F.
F liegt auf der Geraden g durch A und B, für die gilt:



$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}; \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Der Punkt F hat somit allgemein die Koordinaten $F(3 + t \mid 5 - 4t \mid -4 + 8t)$ für einen bestimmten t-Wert.

Da der Kreis in diesem Punkt die Seite AB berührt, muss der Verbindungsvektor $\overrightarrow{MF}$ zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ **senkrecht** sein, ihr Skalarprodukt damit Null betragen:

$$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3+t \\ -4t \\ -6+8t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (3+t) \cdot 1 - 4t \cdot (-4) + (-6+8t) \cdot 8 &= 0 \\ 3 + t + 16t - 48 + 64t &= 0 \\ 81t &= 45 \\ t = \frac{45}{81} &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Somit hat F die Koordinaten $F\left(3 + \frac{5}{9} \mid dle \mid 5 - 4 \cdot \frac{5}{9} \mid dle \mid -4 + 8 \cdot \frac{5}{9}\right) = F\left(\frac{32}{9} \mid dle \mid \frac{25}{9} \mid dle \mid \frac{4}{9}\right)$.

Für den Radius des Grundkreises gilt damit:

$$r = |\overrightarrow{MT}| = \left|\begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ -\frac{20}{9} \\ -\frac{14}{9} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(-\frac{20}{9}\right)^2 + \left(-\frac{14}{9}\right)^2} = \sqrt{20}.$$

Die Grundfläche hat damit den Flächeninhalt $G_2 = r^2\pi = (\sqrt{20})^2 \cdot \pi = 20\pi$.

Für das Volumen des Kreiskegels ergibt sich letztlich:

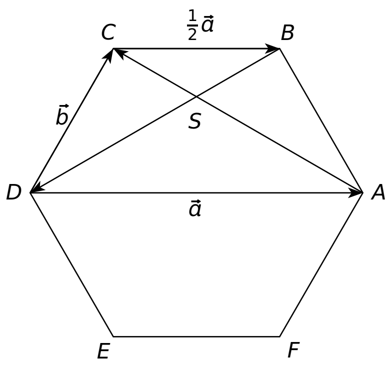
$$V_K = \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 20\pi \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} = \frac{600}{\sqrt{45}}\pi \approx 281.$$

Der Kegel hat ein Volumen von etwa 281 VE.

Aufgabe II 1.2

(4VP)

Aus der Regelmäßigkeit des Sechsecks $ABCDEF$ lässt sich sofort ableiten, dass die Strecke BC parallel zu AD und halb so lang wie diese ist.
Für die folgenden Betrachtungen bietet es sich an, die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ als Grundlage zu verwenden. Es gilt nun sofort $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a}$.
Um das Teilungsverhältnis zu bestimmen, muss ein **geschlossener Vektorzug** aufgestellt werden, der über



den Schnittpunkt S führt:

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \vec{o}$

Nun müssen die einzelnen Vektoren durch unsere „Grundvektoren“ $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ dargestellt werden. Dazu müssen Abhängigkeiten erkannt werden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= r \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \text{(da } \overrightarrow{AS} \text{ ein Bruchteil von } \overrightarrow{AC} \text{ ist)} \\ &= r \cdot (-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \\ &= r \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) \end{aligned}$$

Für den Vektor $\overrightarrow{SD}$ ergibt sich auf dieselbe Weise:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SD} &= s \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= s \cdot (-\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}) \\ &= s \cdot (-\tfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) \end{aligned}$$

Dies wird nun in den Vektorzug eingesetzt und ausmultipliziert:

$$\vec{a} + r \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) + s \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{o}$$

$$\vec{a} - r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}s \cdot \vec{a} - s \cdot \vec{b} = \vec{o} \qquad |\ \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ ausklammern}$$

$$\left(1 - r - \frac{1}{2}s\right) \cdot \vec{a} + (r - s) \cdot \vec{b} = \vec{o}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeigen in verschiedene Richtungen, sie sind linear unabhängig. Der Term kann also nur dann den Nullvektor ergeben, wenn die Ausdrücke $1 - r - \frac{1}{2}s$ und $r - s$ jeweils gleich Null sind, dann ergibt sich nämlich $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{o}$:

$$1-r-\frac{1}{2}s=0$$
$$r-s=0$$

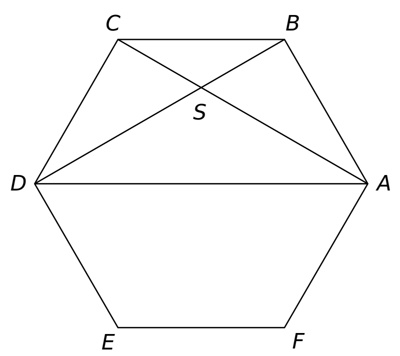
Aus der zweiten Gleichung folgt $r=s$. In die erste Gleichung eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}1-r-\frac{1}{2}r&=0\\ \frac{3}{2}r&=1\\ r&=\frac{2}{3}=s\end{aligned}$$

Somit gilt beispielsweise $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$. Dies bedeutet, dass die Strecke 3 „Teile“ lang ist und die eine Strecke 2 Teile davon belegt. Somit gilt:

Die Strecken AC und BD teilen sich im Verhältnis 1 : 2.

Alternativer Lösungsweg



Eine sehr einfache und schnelle Lösung ergibt sich auch mithilfe des **2. Strahlensatzes**. Da die Seiten BC und AD parallel zueinander sind und BC halb so lang wie AD ist, lässt sich nämlich sagen:

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}=\frac{1}{2}.$$

Somit schneiden sich die Strecken AC und BD im Verhältnis 1 : 2.

Aufgabe II 2.1

a) Die Grundseite des Pyramidenstumpfes ist das Viereck $ABCD$ mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(6\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,18\,|\,0)$ und $D(-8\,|\,4\,|\,0)$. Es liegt – wie an den x_3-Koordinaten der Punkte erkennbar – in der x_1x_2-Ebene. (5VP)

Die Deckfläche ist das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ mit $A^*(4\,|\,1\,|\,20)$, $B^*(7\,|\,4\,|\,20)$ und $C^*(4\,|\,10\,|\,20)$ sie liegt in der Ebene E: $x_3=20$, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist.

Nachweis, dass S die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist

Die Seitenkanten der ursprünglichen Pyramide werden durch die Geraden beschrieben, die jeweils durch einen Punkt (z.B. A) der Grundfläche und seinem zugehörigen Punkt der Deckfläche (z.B. A^*) verläuft. Diese Seitenkanten enden alle in der Pyramidenspitze S.

S ist daher z.B. der Schnittpunkt der Geraden g durch A und A^* mit der Geraden h durch B und B^*. Für diese gilt:

$$g\colon \vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AA^*}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix};\quad r\in\mathbb{R},$$

$$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s\cdot\overrightarrow{BB^*} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\20\end{pmatrix};\quad s\in\mathbb{R}.$$

Diese beiden Geraden werden geschnitten, indem ihre beiden Geradengleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\20\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{ll}\text{(I)} & 4r = 6+s\\ \text{(II)} & r = 6-2s\\ \text{(III)} & 20r = 20s\end{array}$$

Aus Gleichung (III) folgt $r = s$. Eingesetzt in Gleichung (II) ergibt sich:

$$r = 6-2r \quad\Leftrightarrow\quad 3r = 6 \quad\Leftrightarrow\quad r = 2.$$

Somit gilt hier $r = s = 2$. Es muss noch überprüft werden, ob diese Werte auch die erste Gleichung erfüllen, denn nur dann ist das LGS vollständig lösbar. Es ergibt sich $4\cdot 2 = 6+2$, also $8 = 8$. Es entsteht eine wahre Aussage, das LGS ist lösbar.

Wird z.B. $r = 2$ in die Geradengleichung von g eingesetzt, ergibt sich der gesuchte Schnittpunkt bzw. die Pyramidenspitze S:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\40\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S(8\,|\,2\,|\,40)$$

Alternativ hätte man auch einfach durch eine Punktprobe zeigen können, dass S sowohl auf g als auch auf h liegt.

Die Pyramidenspitze wird durch den Punkt $S(8\,|\,2\,|\,40)$ beschrieben.

Berechnung der Koordinaten des Punktes D^*

Die Seitenkante, auf der der Punkt D^* liegen muss, wird durch die Gerade k durch D und die Spitze S beschrieben. Für diese gilt:Alternativ hätte man auch einfach durch eine Punktprobe zeigen können, dass S sowohl auf g als auch auf h liegt.

$$k\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + t\cdot\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}16\\-2\\40\end{pmatrix};\quad t\in\mathbb{R}$$

Weiterhin liegen **alle** Punkte der Deckfläche, wie oben bereits beschrieben, in der Ebene E: $x_3 = 20$. Der Punkt D^* muss also dem **Schnittpunkt** der Geraden k mit der Ebene E sein:

$$k\cap E\colon\quad 0+40t = 20$$
$$t = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

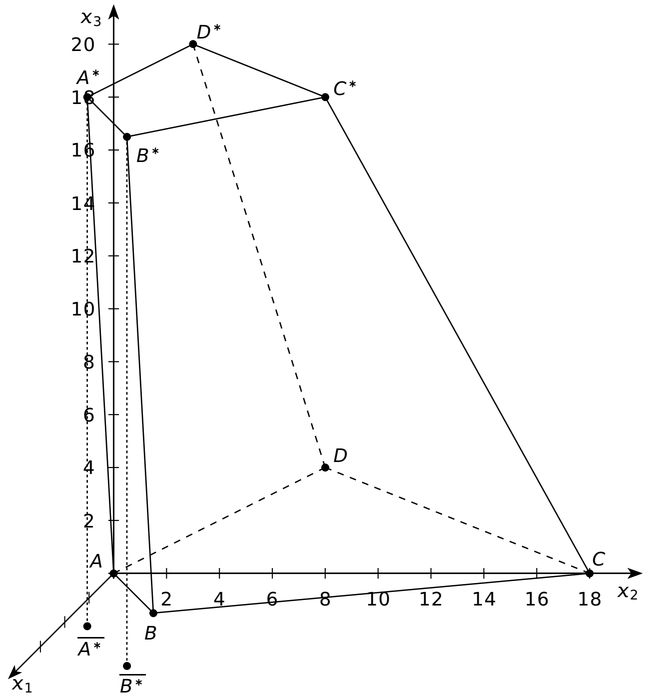
Der Punkt D^* liegt somit für $t = 0,5$ auf der Geraden. Es ergibt sich:

$$\overrightarrow{OD^*} = \begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix} + 0,5\begin{pmatrix}16\\-2\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\20\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad D^*(0\,|\,3\,|\,20)$$

Der Punkt D^* der Deckfläche hat die Koordinaten $D^*(0\,|\,3\,|\,20)$.

Zeichnung des Pyramidenstumpfes in einem Koordinatensystem

Um den Pyramidenstumpf zu zeichnen, werden zunächst die Grundfläche $ABCD$ und die Deckfläche $A^*B^*C^*D^*$ gezeichnet und anschließend die entsprechenden zugehörigen Punkte miteinander verbunden.



b) **Berechnung des Flächeninhalts der Wand** ABB^*A^* (6VP)

Da die beiden Strecken AB und A^*B^* **parallel** zueinander sind, handelt es sich bei der Wand um ein besonderes Viereck – einem Trapez. Für seinen Flächeninhalt gilt allgemein $A_T = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h$, wobei a und c die Längen der parallelen Grundseiten und h die Höhe des Trapezes ist.

Für die Längen der Grundseiten gilt:

$$a = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+6^2+0^2} = \sqrt{72};$$

$$c = |\overrightarrow{A^*B^*}| = \left|\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18}.$$

Die Höhe h des Trapezes ergibt sich beispielsweise als Abstand des Punktes A^* der oberen Grundseite zur Geraden g_{AB}, die die untere Grundseite AB enthält. Für sie gilt:

$$g_{AB}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + u\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix};\quad u\in\mathbb{R}.$$

Der Abstand kann berechnet werden, indem eine zu g_{AB} **senkrechte** Hilfsebene H aufgestellt wird, die durch A^* verläuft.

Da diese Ebene senkrecht zu g_{AB} verläuft, ist der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ von g_{AB} ein **Normalenvektor** von H. Als Ansatz für eine Koordinatengleichung ergibt sich H: $6x_1 + 6x_2 = d$.

Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, wird der Punkt $A^*(4\,|\,1\,|\,20)$ in die Ebenengleichung eingesetzt, denn er soll ja auf H liegen:

$$\begin{aligned} A^* \text{ in } H\text{:}\quad 6\cdot 4 + 6\cdot 1 &= d \\ 30 &= d \end{aligned}$$

Somit ist $6x_1 + 6x_2 = 30$ bzw. nach Teilen durch 6 $x_1 + x_2 = 5$ eine Koordinatengleichung von H.

Geschnitten mit der Geraden g_{AB} ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_{AB} \cap H\text{: } (0+6u) + (0+6u) &= 5 \\ 12u &= 5 \\ u &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Somit gilt für den Schnittpunkt F:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(2,5\,|\,2,5\,|\,0)$$

Der Abstand von A^* zu g_{AB} ergibt sich nun als Abstand zu genau diesem Punkt F und entspricht der gesuchten Höhe h:

$$h = |\overrightarrow{A^*F}| = \left|\begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ -20 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1,5)^2 + 1,5^2 + (-20)^2} = \sqrt{404,5}.$$

Als Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich somit:

$$A_T = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h = \frac{1}{2}(\sqrt{72} + \sqrt{18})\cdot\sqrt{404,5} \approx 128$$

Die Wand hat einen Flächeninhalt von etwa 128 m^2.

Untersuchen, ob Wand überhängt

Fällt man von den Punkten A^* und B^* aus das Lot auf die x_1x_2-Ebene, so erhält man die Punkte $\overline{A^*}(4\,|\,1\,|\,0)$ und $\overline{B^*}(7\,|\,4\,|\,0)$. Es werden dabei einfach die x_3-Koordinaten auf Null gesetzt.

Werden die beiden Lotpunkte wie oben in der Zeichnung noch eingezeichnet, ist erkennbar, dass diese **außerhalb** der Grundfläche liegen. Die Wand hängt somit über.

Aufgabe II 2.2

Untersucht werden sollen $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. (5VP)

Der Richtungsvektor von h sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

1) **Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $S(-4 \mid 0 \mid -1)$.**

Es muss zunächst gezeigt werden, dass der Punkt S auch auf der Geraden g liegt, denn diese können wir nicht verändern. Dazu wird sein Ortsvektor in die Geradengleichung eingesetzt:

$$S \text{ in } g\colon \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \; s = -4 \\ \Rightarrow \; 0 = 0 \\ \Rightarrow \; s = -4 \end{array}$$

Somit liegt S für $s = -4$ auf der Geraden g.

Stützpunkt der Geraden h ist der Punkt $P(2 \mid 2 \mid 0)$. Wenn der Vektor $\vec{v}$ von diesem Punkt aus zum Schnittpunkt S zeigt, schneidet h die Gerade g in diesem Punkt.

Es wäre somit $\vec{v} = \overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor für diesen Fall.

2) **Die beiden Geraden sind windschief**

Zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann hier z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gewählt werden – denn diese Vektoren sind auf keinen Fall Vielfache voneinander, somit linear unabhängig und zeigen in verschiedene Richtungen. g und h wären somit auf keinen Fall parallel zueinander.

Es muss nun noch überprüft werden, ob sich die beiden Geraden in diesem Fall auch nicht schneiden. Dazu werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & s = 2 + t \\ \text{(II)} & 0 = 2 \\ \text{(III)} & 3 + s = 0 \end{array}$$

Im entstehenden LGS bildet die zweite Zeile wegen $0 \neq 2$ einen Widerspruch. Somit schneiden sich die Geraden nicht, der obige Vektor wäre ein möglicher Vektor für diesen Fall.

3) **Die beiden Geraden schneiden sich orthogonal**

Wie oben bereits gesagt, ist $P(2 \mid 2 \mid 0)$ der Stützpunkt der Geraden h. Ein weiterer, beliebiger Punkt auf der Geraden g ist $Q(s \mid 0 \mid 3 + s)$.

Wenn der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ orthogonal zum Richtungsvektor von g ist, kann er als gesuchter Vektor $\vec{v}$ benutzt werden.

Es muss also gelten:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_g = \begin{pmatrix} s-2 \\ -2 \\ 3+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (s-2)\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + (3+s)\cdot 1 &=; 0 \\ s-2+3+s &= 0 \\ 2s &= -1 \\ s &= -0,5 \end{aligned}$$

Somit wäre $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ oder auch das Vielfache $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor von h für diesen Fall.