Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Die Ableitungsfunktion hat die Gleichung $f'(x) = 2x \cdot \sin(3x+1) + 3x^2 \cdot \cos(3x+1)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Das Integral hat den Wert -1.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Gleichung besitzt die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{-2;\ 2;\ \frac{1}{2}\ln 6\right\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

Im Wendepunkt $W(1\,|\,-2)$ hat das Schaubild die Wendetangente t: $y = 2x - 4$.

Aufgabe 5 (5VP)

a) Das Schaubild von F besitzt zwei Extremstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, da f zwei Nullstellen mit VZW hat.

Das Schaubild von F besitzt eine Wendestelle, da f eine Extremstelle hat.

Über die Nullstellen von F kann nichts ausgesagt werden.

b) $F(6) - F(2)$ bezeichnet den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[2;\ 6]$, welcher aber größer als 1 ist.

Aufgabe 6 (3VP)

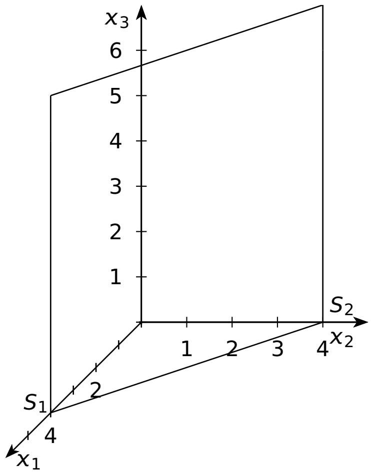
Bezeichnet man die drei Vektoren mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$, dann hat $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{o}$ nur die Lösung $a = b = c = 0$. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Aufgabe 7 (4VP)

a) Für die Zeichnung siehe rechts.

b) Die Gerade liegt in E.

c) Der Abstand von O zu E beträgt $d = 2\sqrt{2}$ LE.



Aufgabe 8

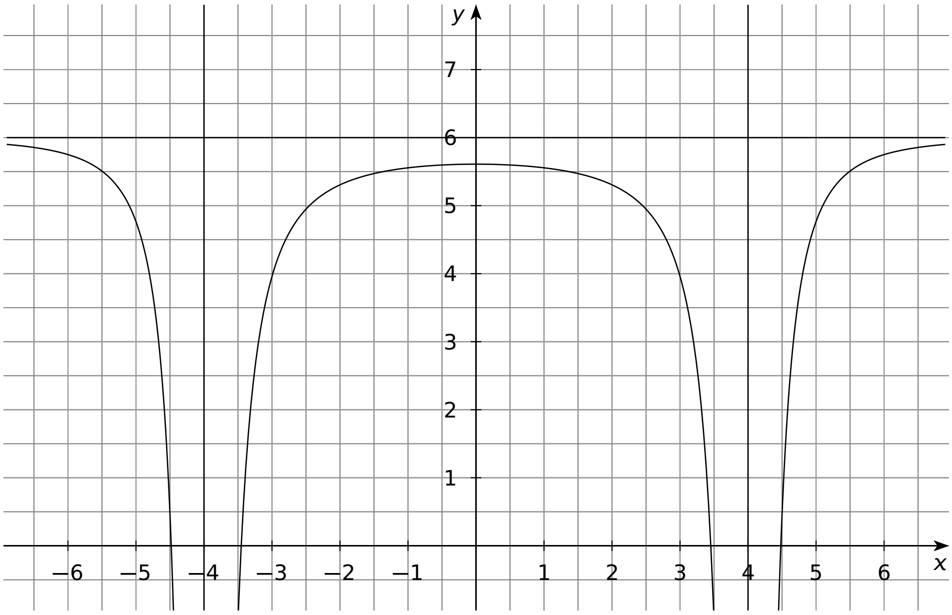
(3VP)

Aufstellen eines Lotfußpunktes S aus g mit $\overrightarrow{PS} \cdot \vec{u}_g = 0$; Berechnung des Spiegelpunktes über $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS}$.

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

a) K_f hat die waagrechte Asymptote $y = 6$ und die senkrechten Asymptoten $x = \pm 4$. (6VP)
f hat die Nullstellen $x_1 \approx -4{,}48$; $x_2 \approx -3{,}45$; $x_3 \approx 3{,}45$ und $x_4 \approx 4{,}48$.
Skizze:



Nur an der Stelle $x = 0$ gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$, also hat f genau eine Extremstelle.

b) Für die Brücke wurden etwa 380 Kubikmeter Stein verbaut. (4VP)

c) Der Zug kommt der gewölbten Wandfläche etwa 1,38 m nah. (4VP)

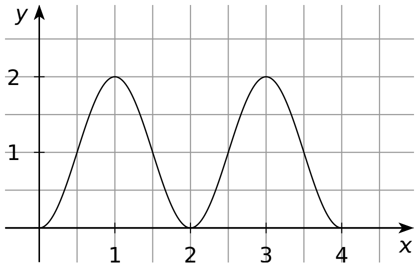
Aufgabe I 1.2

Für $n = 1$ gilt die Gleichung, der Induktionsanfang ist gesichert. (4VP)

Nimmt man weiterhin an, dass die Gleichung für eine Zahl k gilt, kann man damit zeigen, dass sie auch für $k + 1$ gilt. Damit gilt die Gleichung für alle $n \geq 1$.

Aufgabe I 1.2

a) Skizze siehe rechts. (5VP)
f hat die Periode $p = 2$.
Hochpunkte $H_k(1 + k \cdot 2 \mid 2)$ $(k \in \mathbb{Z})$
Tiefpunkte $T_k(k \cdot 2 \mid 0)$ $(k \in \mathbb{Z})$
Für $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$ ergibt sich der Funktionswert 1.



b) Es muss $a = 1$ und $b = \pi$ sein, dann ist $f(x) = 1 - \cos(\pi x)$. (4VP)
Eine solche Fläche hat den exakten Flächeninhalt 2 FE.

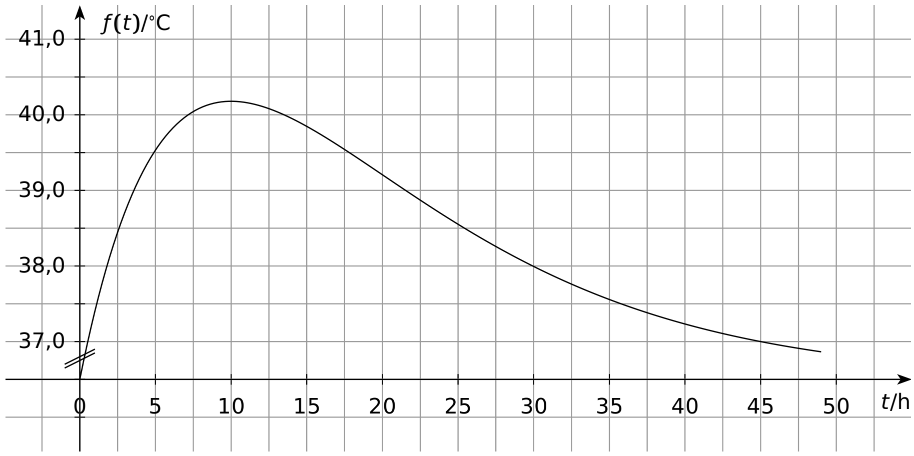
c) Die Funktion hat die Gleichung $g(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$. (4VP)
Die Funktionswerte von f und g weichen an den Stellen $x_1 \approx 1{,}28$ und $x_2 \approx 1{,}72$ am stärksten voneinander ab.

Aufgabe I 1.2

Die Lampen müssen in einer Höhe von 3,54 m befestigt werden, damit der Weg möglichst hell beleuchtet wird. (4VP)

Aufgabe I 3

a) Die maximale Körpertemperatur liegt 10 Stunden nach Ausbruch der Krankheit vor und beträgt etwa 40,2°C. (6VP)



Die Körpertemperatur nimmt beim Ausbruch der Krankheit am meisten zu und 20 Stunden danach am meisten ab.

b) Die Körpertemperatur sinkt 45 Stunden nach Ausbruch der Krankheit wieder unter 37°C. (7VP)
Da ab hier stets $f'(t) < 0$ gilt, ist f streng monoton fallend und die Körper-temperatur steigt nicht wieder über 37°C.
In den ersten 45 Stunden der Krankheit beträgt die mittlere Körpertemperatur 38,6°C.
Im Zeitraum zwischen 2,2 und 4,2 Stunden nach Ausbruch der Krankheit nimmt die Körpertemperatur um exakt 1°C zu.

c) Die Körpertemperatur nach Einnahme des Medikaments wird durch die Funktion g mit $g(t) = 36{,}5 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}288t}$ beschrieben (t in Stunden ab Einnahme des Medikaments, $g(t)$ in °C). (5VP)

Etwa 1,1 Stunden nach Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur zum ersten Mal um 1°C niedriger, als sie ohne Medikament wäre.

Wahlteil II

Aufgabe II 1.1

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.
Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1\,(6|3|0)$.
Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P\,(7|29|7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}7\\29\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$ (t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km.)

a) **Position des Flugzeugs um 7.01 Uhr** (6VP)

Um 7.01 Uhr befindet sich das Flugzeug im Punkt $Q\,(10|27|6)$.

Begründung des Sinkflugs

Wir sehen uns den Richtungsvektor der Geraden an. Mit jeder Minute wird die x_3 Koordinate des Flugzeugs um eine Einheit verringert. Somit verliert das Flugzeug durchgehend an Höhe und befindet sich somit im Sinkflug.

Geschwindigkeit des Flugzeugs bestimmen

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt $224{,}49\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Winkel zwischen Flugbahn und Boden bestimmen

Das Flugzeug fliegt unter einem Winkel von etwa $15{,}5^\circ$ auf den Boden zu.

Zeitpunkt und Position des Aufsetzens bestimmen

Das Flugzeug setzt um 7.07 Uhr im Punkt $A\,(28|15|0)$ auf dem Boden auf.

b) **Auf Lage in einer Ebene überprüfen** (6VP)

Die Flugbahn und die beiden Radarstationen liegen alle in einer Ebene, der Anflug ist somit optimal.

Zeitpunkt der Übernahme bestimmen

Die Radarstation R_2 übernimmt um 7.04 Uhr die Flugüberwachung.

c) **Abstand der Flugzeuge um 7.04 Uhr bestimmen** (4VP)

Um 7.04 Uhr sind die beiden Flugzeuge etwa $8{,}3$ Kilometer von einander entfernt.

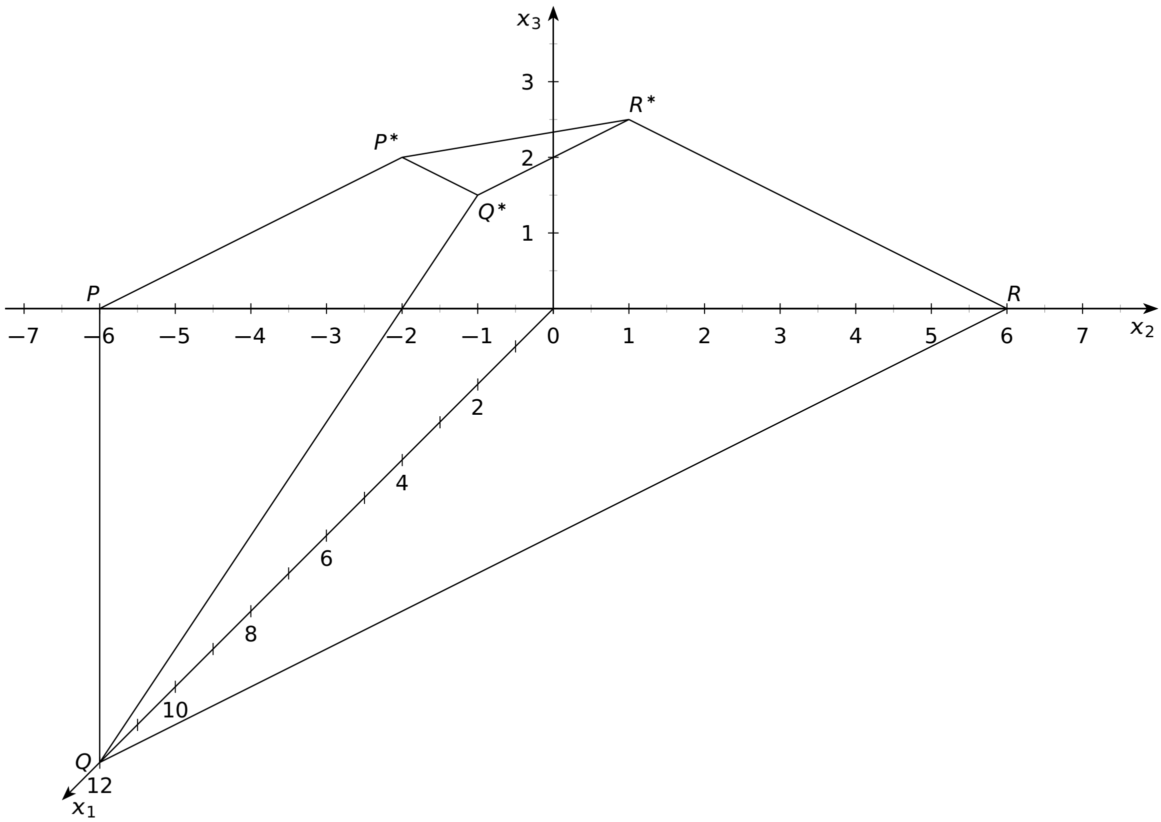
Kleinsten Abstand der Flugzeuge bestimmen

Die beiden Flugzeuge kommen sich $7{,}89$ Kilometer nah.

Aufgabe II 2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P(0|-6|0)$, $Q(12|0|0)$ und $R(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfes hat die Eckpunkte $P^*(0|-2|2)$, $Q^*(2|0|2,5)$ und $R^*(0|1|2,5)$.

a) **Skizze des Pyramidenstumpfes** (6VP)



Begründung, dass die Flächen nicht parallel sind

Wir sehen uns die Koordinaten der Punkte der Boden- bzw. der Dachfläche an.
Die Punkte der Bodenfläche haben als x_3-Koordinate alle $x_3 = 0$, sie liegen also in der x_3-Ebene.

Die Punkte der Dachfläche hingegen weisen unterschiedliche x_3-Koordinaten auf: P^* hat eine andere x_3-Koordinate als Q^* und R^*.
Somit liegen diese drei Punkte in einer Ebene, die nicht parallel zur x_1x_2-Ebene ist, und somit auch nicht zur Bodenfläche.

Winkel berechnen

Die Kante QQ^* schneidet die x_1-Achse unter einem Winkel von etwa $14,04^\circ$.

Nachweis der ursprünglichen Spitze

$S(0|0|)$ liegt auf allen drei Geraden. Damit ist nachgewiesen, dass S die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

b) **Abstand bestimmen** (6VP)

Der Punkt Q^* hat einen Abstand von etwa $5,12$LE von der Geraden durch Q und R.

Trapez nachweisen

Wir sehen, dass $\overrightarrow{QR} = 6 \cdot \overrightarrow{Q^*R^*}$ ist. Somit sind die Kanten parallel und es ist nachgewiesen, dass die Seitenfläche ein Trapez ist.

Flächeninhalt berechnen

Der Flächeninhalt des Trapezes beträgt etwa 40 FE.

Aufgabe I 2.2

Es gilt $\dfrac{\left|\overrightarrow{OT}\right|}{\left|\overrightarrow{OC}\right|} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$. (4VP)

Die beiden Dreiecke OTC und OAB sind damit ähnlich. Ähnliche Dreiecke stimmen in ihren Winkeln überein.

Aus $\alpha + \beta = 90^\circ$ und der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich beim Dreieck OTS mit S als Schnittpunkt von $\overline{OB}$ und $\overline{CT}$ ein rechter Winkel.