Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x^2}{2x^2-3}$.

Bilden Sie die Ableitung von f und fassen Sie diese so weit wie möglich zusammen.

Aufgabe 2 (2VP)

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2 - 3\,\sin(4x)$. Der Punkt $P(0 \mid 1)$ liegt auf dem Schaubild von G. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G.

Aufgabe 3 (3VP)

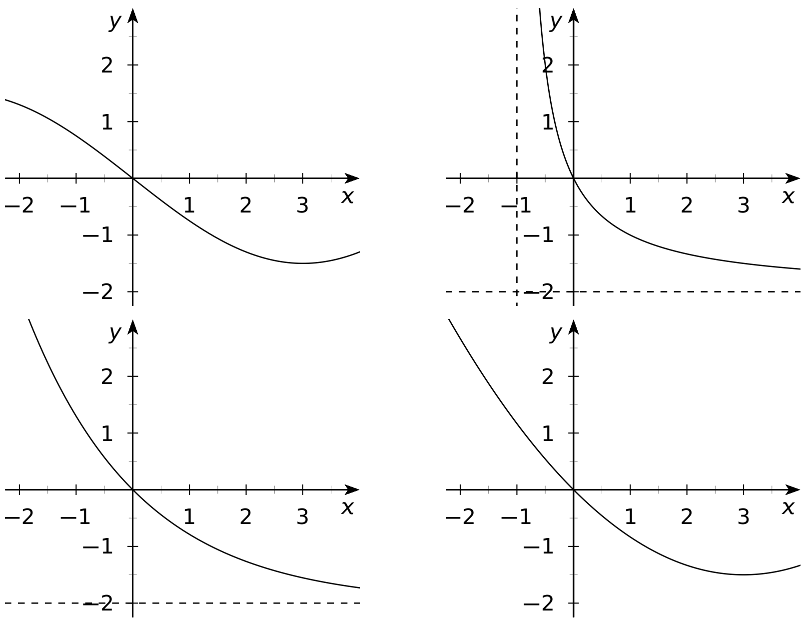
Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} = 1 \quad (x \neq 0)$.

Aufgabe 4 (4VP)

Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: $T(-1 \mid -4)$ ist Tiefpunkt und $Q(2 \mid 5)$ ein weiterer Punkt ihres Schaubildes. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h.

Aufgabe 5 (5VP)

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$$f(x) = \frac{-2x}{x+a}, \quad g(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}, \quad h(x) = c \cdot x^2 - x.$$

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Bestimmen Sie die Werte für a und b.

Aufgabe 6 (4VP)

Gegeben sind die zwei parallelen Geraden g und h durch

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 7 (3VP)

Die Ebene E geht durch die Punkte $A(1,5\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,3\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,6)$.
Untersuchen Sie, ob die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene E verläuft.

Aufgabe 8 (3VP)

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1\colon (\vec{x} - \vec{p}_1) \cdot \vec{n}_1 = 0$ und $E_2\colon (\vec{x} - \vec{p}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man anhand dieser Normalengleichungen die gegenseitige Lage der beiden Ebenen untersuchen kann.

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.

Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125 \text{ im Bereich } -2,5 \leq x \leq 5,$$

dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes. (8VP)

Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.

Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie $312,5$ m hoch. Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante.

Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Dorfes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben. (6VP)

Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

Aufgabe I 1.2

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = \dfrac{1}{1-2x}$; $\quad x \neq 0,5$. (4VP)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass g für alle $n \geq 1$ die n-te Ableitung

$$g^{(n)}(x) = n! \cdot \frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}}$$

besitzt, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \geq 1$ gilt.

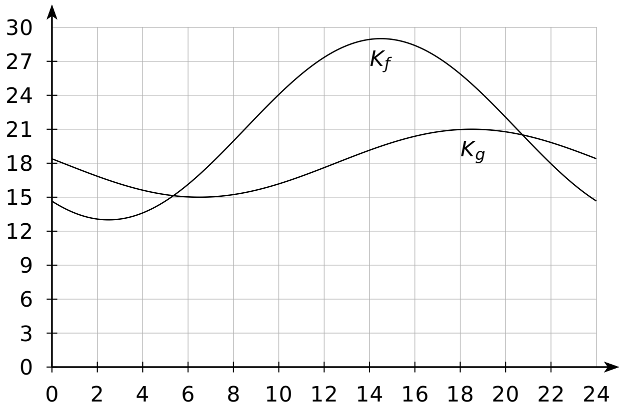
Aufgabe I 2

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + 21;\ \ 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, $f(x)$ in °C).

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22°C? (5VP)

Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?

Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt. (7VP)

Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht.

Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.

Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit (6VP)

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + ax + b;\ \ 24 \leq x \leq 48$$

beschrieben werden kann (x in Stunden, $h(x)$ in °C). Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b.

Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax + b$ bestimmt wird.

Aufgabe I 3.1

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01t}; \quad t \geq 0$$

(t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter bis zur Hälfte gefüllt? (6VP)
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1% des jeweiligen Inhalts pro Minute. (3VP)
Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.
Geben Sie a und b an.
Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2% des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter. (5VP)
Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen?

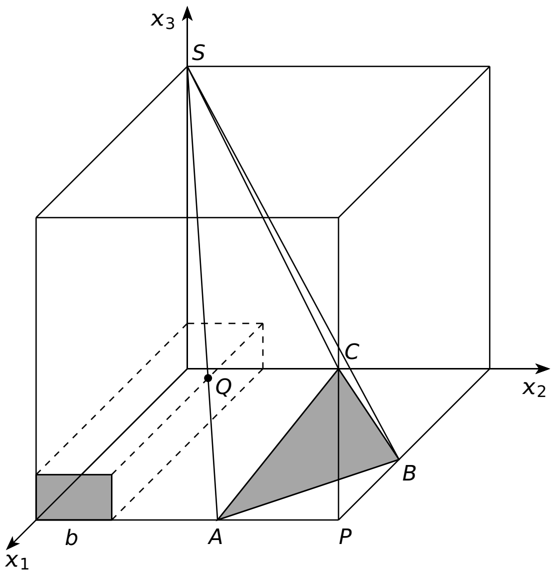
Aufgabe I 3.2

Die Folge (a_n) ist gegeben durch $a_0 = 5; \quad a_{n+1} = 10 + 0{,}8 \cdot a_n \quad$ für $n \in \mathbb{N}$. (4VP)
50 ist eine obere Schranke dieser Folge. Zeigen Sie damit, dass die Folge monoton wachsend ist.
Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.
Berechnen Sie den Grenzwert exakt.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(10\,|\,10\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10\,|\,6\,|\,0)$, $B(6\,|\,10\,|\,0)$ und $C(10\,|\,10\,|\,5)$.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt. (6VP)
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$)

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen? (5VP)

c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze). (5VP)
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

Aufgabe II 2.1

Die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,0)$, $C(5\,|\,0\,|\,4)$, $F(0\,|\,0\,|\,0)$, $G(0\,|\,3\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar. (6VP)
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchen Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.
(Teilergebnis: $E: 4x_2 + 3x_3 = 12$)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius 0,5 und Grundkreismittelpunkt $M(0 \mid 0,5 \mid 0,5)$, dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft. (6VP)

Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.

Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?

Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt $M^*(0 \mid r \mid r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren.

Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.

Aufgabe II 2.2

In einem Viereck $ABCD$ gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0,4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. (4VP)

Zeichnen Sie ein solches Viereck $ABCD$.

In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonalen geteilt?