Pflichtteil

Aufgabe 1

▶ Bilde die Ableitung

Um die Ableitung zu bilden kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Schreibe den Wurzelterm der Funktion zunächst um
2. Leite die Funktion mit Hilfe der **Produktregel** und der **Kettenregel** ab

1. Schritt: Umschreiben

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$$
$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}$$

2. Schritt: Ableiten

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{2x}$$
$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}\right)e^{2x}$$

Aufgabe 2

▶ Berechne das Integral

Um das **Integral** zu berechnen, benötigst du eine **Stammfunktion**.

Es gilt der **Hauptsatz der Integralrechnung**:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{f(x)dx} &= [\boldsymbol{F(x)}]_a^b \\ &= \boldsymbol{F(b) - F(a)}\end{aligned}}$$

Eine **Stammfunktion** einer Funktion f bildest du folgendermaßen:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{f(x)} &= \boldsymbol{x^n} \\ \boldsymbol{F(x)} &= \boldsymbol{\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c}\end{aligned}}$$

Um die Stammfunktion der gegebenen Funktion zu bilden, kannst du diese zunächst als Produkt schreiben.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}dx &= \int_0^1 4 \cdot (2x+1)^{-3}dx \\ &= \left[4 \cdot (-\tfrac{1}{2}) \cdot (2x+1)^{-2} \cdot \tfrac{1}{2}\right]_0^1 \\ &= \left[-(2x+1)^{-2}\right]_0^1 \\ &= -(2 \cdot 1 + 1)^{-2} - (-(2 \cdot 0 + 1)^{-2}) \\ &= -3^{-2} + 1^{-2} \\ &= -\tfrac{1}{9} + 1 \\ &= \tfrac{8}{9}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

▶ Löse die Gleichung

Um die Gleichung zu lösen, musst du zunächst alle Bestandteile der Gleichung auf eine Seite der Gleichung bringen. Der höchste Exponent von x beträgt 4. Diese Gleichung kannst du demnach durch **Substitution** lösen. Anschließend kannst du die Gleichung entweder mit der **Mitternachtsformel**, oder der ***pq*-Formel** lösen. Anschließend musst du resubstituieren.

$$\begin{aligned} x^4 &= 4+3x^2 && \mid -3x^2-4 \\ x^4-3x^2-4 &= 0 && \text{Substitution mit } u=x^2 \\ u^2-3u-4 &= 0 \end{aligned}$$

Nun hast du eine quadratische Gleichung gegeben. Du kannst sie mit der Mitternachtsformel oder der pq-Formel lösen.

Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es gilt: $a=1$, $b=-3$ und $c=-4$
Setze diese Werte nun in die Mitternachtsformel ein.

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$u_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = -1$$

pq-Formel:

$$x_1,2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dabei gilt: $p=-3$ und $q=-4$

$$u_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$u_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-4)}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$u_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$u_1 = 4$$
$$u_2 = -1$$

Nun kannst du resubstituieren. Dazu setzt du die Werte für u_1 und u_2 in die Gleichung $u = x^2$ ein.

$$u_1 = x^2$$
$$4 = x^2 \qquad | \sqrt{}$$
$$\pm\sqrt{4} = x_{1,2}$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 2$$

$$u_2 = x^2$$
$$-1 = x^2 \qquad | \sqrt{}$$

Da die Wurzel negativ ist, hat diese Gleichung keine Lösung.

Die Gleichung hat die Lösung $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Die Lösungsmenge lautet also: $L = \{-2, 2\}$

Aufgabe 4

a)

▶ **Erkläre den Graphen *g***

Du hast in der Aufgabe zwei Kosinus-Funktionen gegeben.

Die **allgemeine Kosinus-Funktion** lautet:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d}}$$

Der Faktor a gibt die Streckung bzw. Stauchung der **Amplitude** an. Durch den Faktor b wird die **Periode** verändert. Eine Verschiebung in die x-Richtung kommt durch den Faktor c zustande. Das d gibt eine Verschiebung in y-Richtung an.

Um zu erklären wie man den Graphen g aus f erhält schaust du, wie sich die Amplitude und Periode ändert. Außerdem prüfst du, ob der Graph der Funktion g verschoben ist.

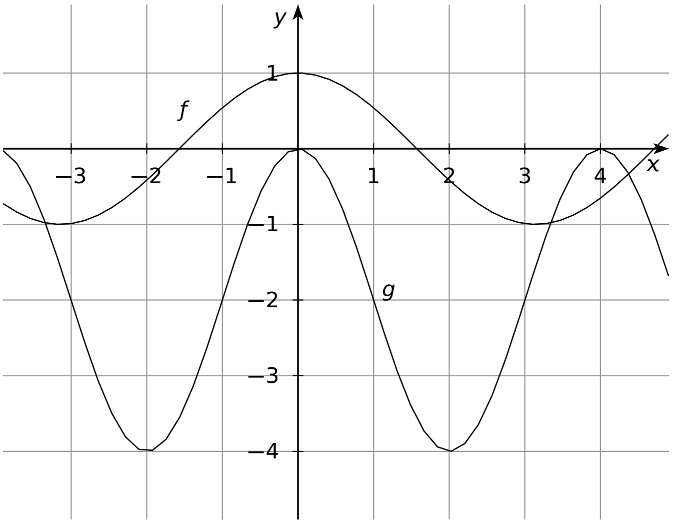
Den Graphen g erhältst du aus dem Graphen f, indem die Funktion gestreckt und verschoben wird. Außerdem verändert sich die Periode.

Die Funktion g hat demnach eine Amplitude von 2 und ist um einen Faktor 2 in negative y-Richtung verschoben. Die Periode hat sich ebenfalls verändert. Die **Periode** wird mit folgender Formel berechnet:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{b}}$$

Die Funktion g hat also die Periode $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

Du erhältst den Graphen g aus dem Graphen f, wenn du den Graphen f mit 2 streckst und um 2 Längeneinheiten in negative y-Richtung verschiebst. Außerdem ändert sich die Periode von 2π in 4.



b)

▸ Bestimme die Nullstellen von *g*

Bei dieser Teilaufgabe sollst du die **Nullstellen** der Funktion g im Bereich $0 \leq x \leq 4$ bestimmen.
Setze dazu die Funktion g gleich 0.

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - 2 &= 0 \qquad &| +2 \\ 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) &= 2 \qquad &| :2 \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) &= 1 \end{aligned}$$

Die Kosinus-Funktion hat bei den Werten 0, 2π,... den Wert 1.

Bestimme nun das x so, dass der Kosinus diese Werte annimmt.

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}x &= 0 \qquad &| \cdot \tfrac{2}{\pi} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2}x &= 2\pi \qquad &| \cdot \tfrac{2}{\pi} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Funktion g in dem gegebenen Bereich die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ hat.

Aufgabe 5

a)

▸ Bestimme $f(g(3))$

Um $f(g(3))$ zu bestimmen, liest du zunächst den Wert von $g(3)$ ab. Anschließend liest du den Funktionswert von f für diesen x-Wert ab.

Die Funktion g hat an der Stelle $x = 3$ den Wert -1. Der Wert bei $f(-1)$ beträgt 5.

Der Wert $f(g(3))$ beträgt 5.

▸ Bestimme $f(g(x)) = 0$

Bei dieser Aufgabe schaust du zunächst wo der Graph K_f eine Nullstelle hat. Anschließend liest du den x-Wert von K_g ab, der diesen Wert hat.

Der Graph K_f hat eine Nullstelle bei $x = 4$. Nun überprüfst du, wo der Graph K_g den Wert 4 annimmt. Dies ist bei $x = -2$ der Fall.

Alternativ

Der Graph K_f hat bei $x = 0$ eine Nullstelle. Der Graph K_g nimmt bei $x = 2$ den Wert 0 an.

Ein Wert damit $f(g(x)) = 0$ gilt, ist der Wert $x = -2$ oder $x = 2$.

b)

▸ Bestimme $h'(2)$

Du hast folgende Funktion gegeben: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Du kannst die Ableitung der Funktion h mit der **Produktregel** bestimmen.

$$\boxed{h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Lese aus dem Koordinatensystem die **Funktionswerte** von $f(2)$, $f'(2)$, $g(2)$ und $g'(2)$ und setze diese in die Ableitung ein.

Es gilt $f(2) = -4$. Dieser Punkt ist ein **Tiefpunkt**. Das bedeutet, dass die Ableitung nach der notwendigen Bedingung für ein Minimum an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 annehmen muss. Dadurch weißt du, dass $f'(2) = 0$ ist.
Der Funktionswert $g(2)$ beträgt 0. Die lineare Funktion g hat die Steigung -1. Dies kannst du aus dem Schaubild mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** bestimmen. Demnach beträgt die Ableitung -1 an der Stelle $x = 2$.
Nun kannst du die Werte in die Ableitung der Funktion h einsetzen.

$$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$$
$$h'(2) = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1)$$
$$h'(2) = 4$$

Es gilt: $h'(2) = 4$

Aufgabe 6

a)

▸ Stelle die Ebenen E und F dar

Um die Ebenen E und F in einem Koordinatensystem darstellen zu können, benötigst du die

Spurpunkte der Ebenen.
Die Spurpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Der Spurpunkt der x_1-Achse hat die Koordinaten $S_1(x_1 \mid 0 \mid 0)$, der der x_2-Achse $S_2(0 \mid x_2 \mid 0)$. Dementsprechend hat der Spurpunkt der x_3-Achse die Koordinaten $S_3(0 \mid 0 \mid x_3)$. Du erhältst die Spurpunkte, indem du die x-Werte der anderen Achsen gleich 0 setzt und die Ebenengleichung nach deinem gewünschten x auflöst.

Um den Spurpunkt S_1 der Ebene E zu bestimmen, setzt du das $x_2 = 0$. Du erhältst folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 0 &= 4 \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$$

Der Spurpunkt S_1 hat demnach die Koordinaten $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$.

Analog dazu bestimmst du auch den Spurpunkt S_2 der Ebene E:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 0 + x_2 &= 4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Dieser hat die Koordinaten $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$.

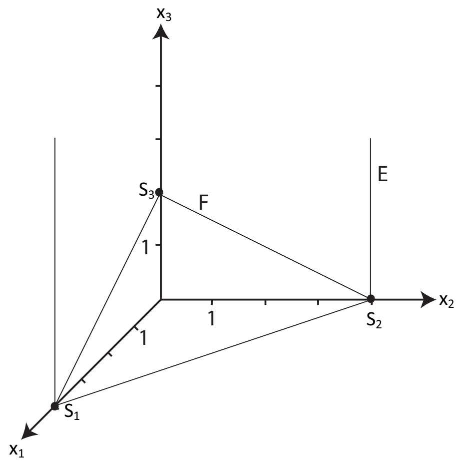
Bei der Ebene F verfährst du genauso. Diese hat die selben Spurpunkte S_1 und S_2 wie die Ebene E.

Für den Spurpunkt S_3 erhältst du folgendes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 0 + 0 + 2x_3 &= 4 \qquad \mid :2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Du erhältst die Spurpunkte $S_1(4 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 2)$.

Zeichne diese Punkte nun in ein Koordinatensystem ein und verbinde die Spurpunkte.



▶ **Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden**

Du weißt, dass die beiden Ebenen E und F die gleichen Spurpunkte S_1 und S_2 haben. Mit Hilfe der zwei Punkte kannst du eine Parametergleichung der Schnittgeraden aufstellen. Wenn du den Punkt S_1 als Stützpunkt verwendest, erhältst du folgende Parametergleichung der Schnittgeraden:

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS_1} + t \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Gleichung der Schnittgeraden lautet: $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)

▶ Gib eine Gleichung der Ebene G an

Die Ebene G soll **parallel** zu der x_1-Achse verlaufen. Das bedeutet, dass der Faktor vor dem x_1 gleich 0 ist. Außerdem besitzt die Ebene dieselbe Spurgerade, die die x_2x_3-Ebene schneidet wie die Ebene F.
Die Ebene G hat daher auch dieselbe Ebenengleichung wie die Ebene F. Allerdings mit den Unterschied, dass der Faktor vor dem x_1 gleich 0 ist.

Eine Ebenengleichung lautet: $G: x_2 + 2x_3 = 4$

Aufgabe 7

▶ Bestimme den Abstand d

Um den Abstand d des Punktes C von der Geraden g zu bestimmen, brauchst du außer der Geradengleichung den Punkt P auf der Geraden, der von C den geringsten Abstand hat. Der Abstand zwischen dem Punkt P und dem Punkt C ist dann am geringsten, wenn die Gerade durch die zwei Punkte orthogonal auf der Geraden g steht. Zwei Geraden sind orthogonal, wenn das **Skalarprodukt** der beiden Richtungsvektoren 0 ergibt.

Um den Abstand zu bestimmen kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Geradengleichung von g auf
2. Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts den Parameter t der Geradengleichung und somit den Punkt P
3. Bestimme den Abstand der Punkte P und C

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung g

Als Stützvektor wird hier der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ gewählt.

$$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3-1 \\ 13-10 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimmung der Koordinaten des Punktes *P*

Der Punkt P liegt auf der Geraden g. Daher hat er die von t abhängigen Koordinaten $P(1-4t\,|\,10+3t\,|\,1)$.
Das Skalarprodukt des Vektors $\overrightarrow{PC}$ und der Richtungsvektor der Geraden soll 0 ergeben, damit sie orthogonal zueinander stehen.

Der Vektor $\overrightarrow{PC}$ lautet:

$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 2-(1-4t) \\ 3-(10+3t) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+4t \\ 3-10-3t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4t \\ -7-3t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PC} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1+4t \\ -7-3t \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
(1+4t)\cdot(-4) + (-7-3t)\cdot 3 + 0\cdot 0 &= 0 \\
-4-16t-21-9t &= 0 \\
-25-25t &= 0 \qquad |\ +25 \\
-25t &= 25 \qquad |\ :(-25) \\
t &= -1
\end{aligned}$$

Wenn du den Wert $t=-1$ in die Geradengleichung g einsetzt, erhältst du die Koordinaten des Punktes P.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P hat die Koordinaten $P(5 \,|\, 7 \,|\, 1)$.

3. Schritt: Berechnung des Abstands d

Der Abstand d zwischen den Punkten P und C entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PC}$:

$$d = \left|\overrightarrow{PC}\right|$$

$$d = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$d = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5$$

Der Punkt C hat von der Geraden g den Abstand $d = 5$.

Aufgabe 8

a)

▶ Formuliere ein Ereignis A

Bei dem Ereignis A liegt eine Bernoulli-Kette vor. Die Formel zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit einer **Bernoulli-Kette** lautet:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \qquad 0\leq k\leq n$$

- n: Länge der Bernoulli-Kette
- k: Anzahl der Treffer
- p: Erfolgswahrscheinlichkeit

Schaue dir die einzelnen Terme und ihre Bedeutung an.

Das Ereignis setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Der erste Teile lautet: $\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$
Dieser Teil gibt an, dass das Ereignis eine Kettenlänge von 10 hat. Außerdem gibt es 8 Treffer.
Im zweiten Teil kommt die Wahrscheinlichkeit dazu, dass man neunmal verliert. Den Ausdruck $10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$ kann man umschreiben in $\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$.

Die $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man zehnmal verliert.
Man verliert also entweder achtmal, neunmal oder zehnmal.

Das Ereignis A lautet:
$P(A)$: Man verliert mindestens 8 von 10 Spielen.

b)

▶ Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X=2)$

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele an. Die Wahrscheinlichkeit ein Spiel zu verlieren, ist bei jedem Spiel gleich groß. Die Zufallsvariable ist somit **binomialverteilt** und folgt somit der **Bernoulli-Verteilung**. Setze die Kettenlänge, Anzahl der Treffer und die Erfolgswahrscheinlichkeit in die Bernoulli-Formel ein.

Für die **Erfolgswahrscheinlichkeit** p gilt $p=\frac{2}{3}$. Es wird viermal gespielt, d.h. die Kettenlänge der Bernoulli-Kette beträgt $n=4$. Der Spieler verliert genau zweimal, daher gilt: $k=2$
Setze diese Werte in die Bernoulli- Formel ein und berechne die Wahrscheinlichkeit.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \qquad 0\leq k\leq n$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-2}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$P(X=2)=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot(2)!}\cdot\frac{4}{81}$$

$$P(X=2)=\frac{24}{2\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4}{81}$$

$$P(X=2)=\frac{24}{4}\cdot\frac{4}{81}$$

$$P(X=2)=\frac{24}{81}$$

$$P(X=2)=\frac{8}{27}$$

Der Spieler verliert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ genau zweimal.

Aufgabe 9

▶ Beschreibe den Lösungsweg

Du hast einen Mittelpunkt M einer Kugel und eine Ebene gegeben. Die Ebene berührt die Kugel in einem Berührpunkt B. Eine Gerade durch die Punkte M und B muss demnach **orthogonal** zu der Ebene stehen. Der **Schnittpunkt** dieser Geraden mit der Ebenen entspricht dem Berührpunkt.

Um den Kugelradius und den Berührpunkt zu bestimmen, kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Lotgerade zu der Ebene durch den Mittelpunkt M auf. Dabei dienen die Koordinaten des Punktes M als Stützvektor. Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Lotgerade.

2. Berechne den Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene. Der Schnittpunkt entspricht dem Berührpunkt B.

3. Berechne den Abstand der Punkte M und B. Der Abstand entspricht dem Kugelradius. Den Abstand berechnest du mit der Formel:
   $d=\sqrt{(m_1-b_1)^2+(m_2-b_2)^2+(m_3-b_3)^2}$

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe 1.2 a)

▶ Koordinate des Extrempunktes E angeben

Die Koordinaten des Extrempunktes E lauten $E(2\,|\,7,3576)$.

▶ Koordinate des Wendepunktes W angeben

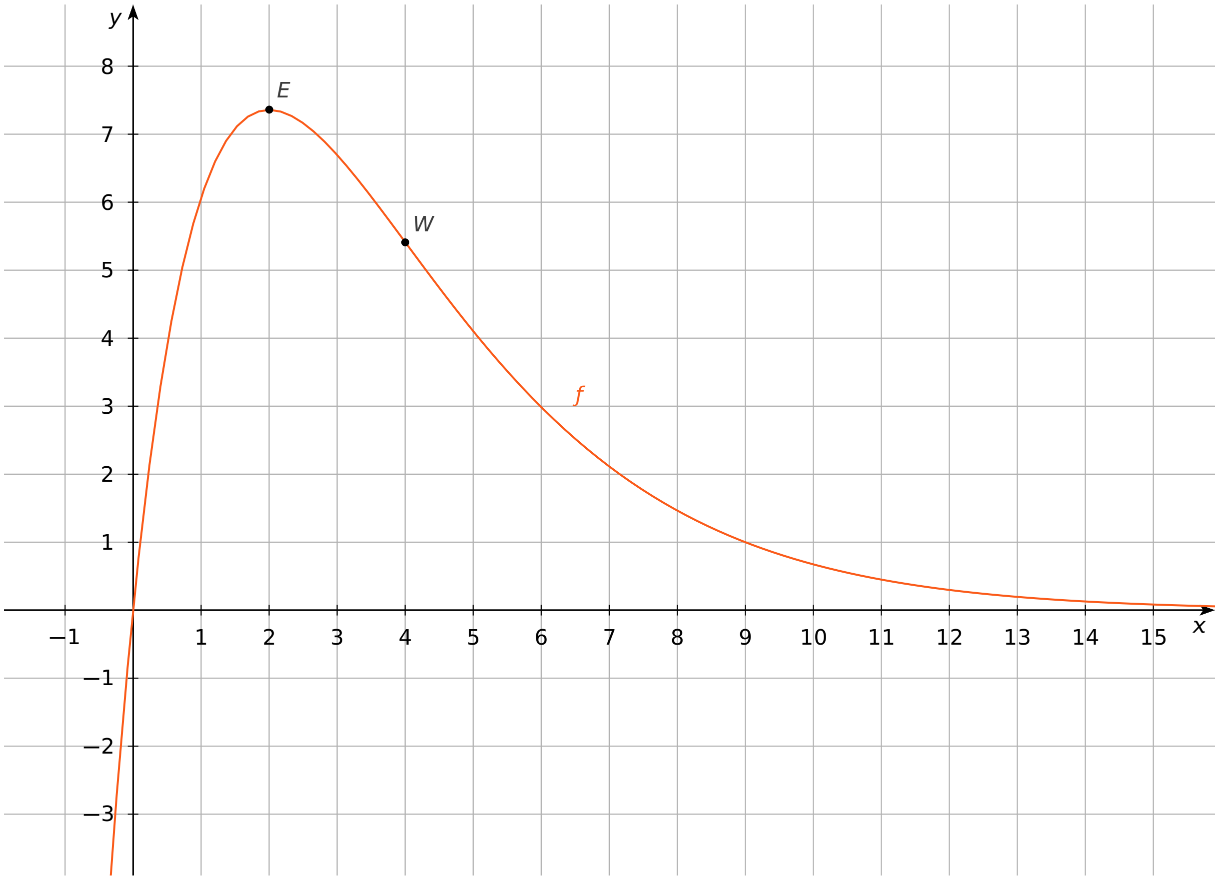
Die Koordinaten des des Wendepunktes W lauten $W(4\,|\,5,413)$.

▶ Gleichung der Asymptote von K angeben

Die Gleichung der Asymptote lautet $y = 0$.

▶ Skizzieren des Schaubildes K

Das Schaubild K sollte dann folgendermaßen aussehen:



b)

▶ Wert für u bestimmen, sodass der Flächeninhalt 8 FE beträgt

Folgende Werte können für u in Frage kommen mit

- $u_1 \approx 2,183$,
- $u_2 \approx 6,621$.

▶ Wert für u bestimmen, sodass das Dreieck gleichschenklig ist

Für $u = 4,605$ ist das Dreieck gleichschenklig. c)

▸ Grenzen des Intervalls bestimme, sodass der Mittelwert 2,2 beträgt

Für das Intervall $[a;b]$ mit $a_1 = -0,862$ und $b_1 = 3 + (-0,862) = 2,138$ sowie $a_2 = 5,497$ und $b_2 = 3 + 5,497 = 8,497$ beträgt der Mittelwert der Funktion 2,2.

Aufgabe 1.2

▸ Parameter t bestimmen

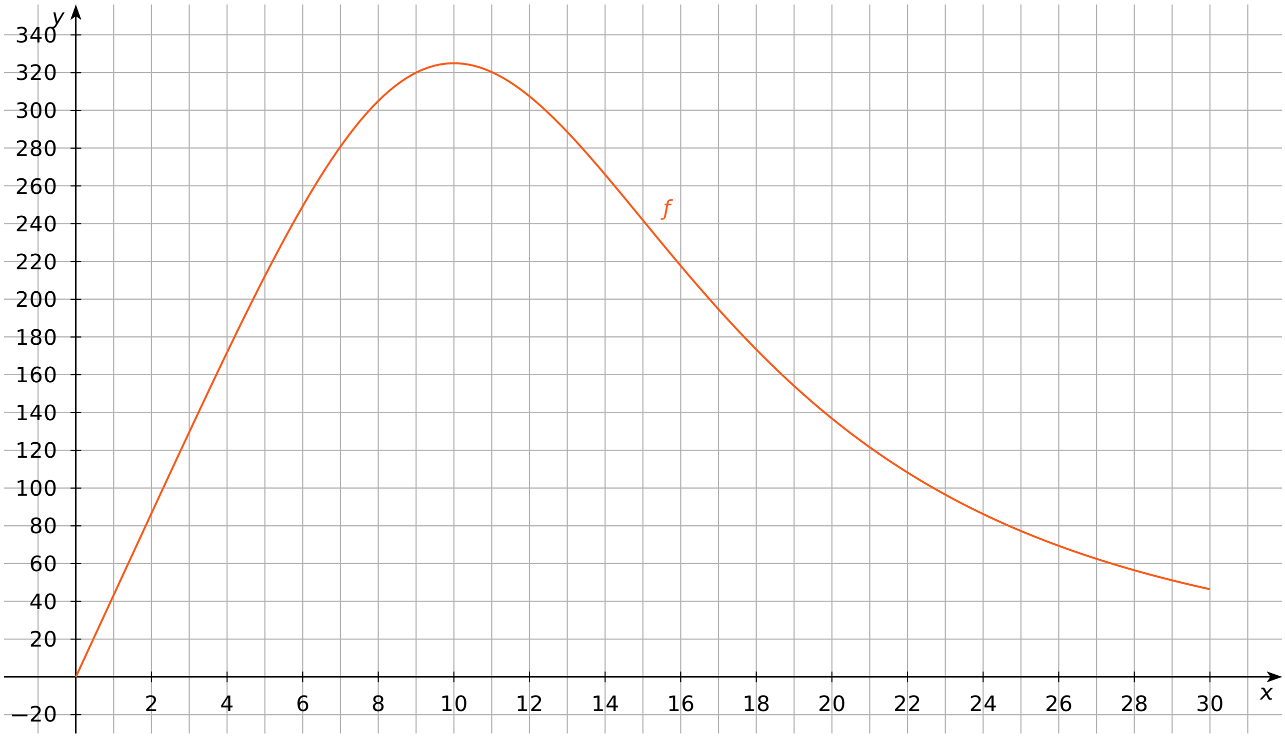
Es muss $t = 2,13633$ gelten, damit der Abstand der beiden Extrempunkte 13 beträgt.

Wahlteil Aufgabe A 2

Aufgabe 2.1 a)

▶ Graphen von f skizzieren

Das Schaubild K sollte folgendermaßen aussehen:



▶ Maximale momentane Ankunftsrate bestimmen

Die Koordinaten des Hochpunktes H lauten $H(10 \mid 325)$. Die maximale momentane Ankunftsrate beträgt demnach 325 Fahrzeuge pro Stunde.

▶ Anzahl der Fahrzeuge bestimmen, die in den ersten 6 Stunden ankommen

Beschreibt die Funktion f die momentane Ankunftsrate, so entspricht ihre Stammfunktion F der Anzahl der ankommenden Fahrzeuge. Bestimme die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden am Grenzübergang ankommen. Diese Anzahl erhältst du über folgenden Zusammenhang:

$$\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^6 \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000}\mathrm{d}t$$

Laut Aufgabentext befinden sich zu Beginn keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang. Daher ist die Konstante, die sich bei der Integration ergibt, gleich Null.

Der GTR liefert dir, dass ungefähr 769 Fahrzeuge in den ersten 6 Stunde am Grenzübergang ankommen. b)

▶ Zeitpunkt bestimmen, an dem sich erstmals Fahrzeuge stauen

Du kannst wie folgt vorgehen:

- Der gesuchte Zeitpunkt entspricht der Stelle von $f(t)$, an der $f(t)$ erstmals den Funktionswert 110 erreicht. Setze also den Term der Funktion f mit 110 gleich.

- Löse nach t auf, um den gesuchten Zeitpunkt zu erhalten.

Der GTR liefert dir zwei verschiedene Resultate:

- $t_0 = 2,54$
- $t_1 = 21,86$

Anhand des Graphen der Funktion f kannst du erkennen, dass an $t_0 = 2,54$ erstmalig die Anzahl von 110 pro Stunde ankommenden Fahrzeugen überschritten wird. Das liefert dir, dass der gesuchte Zeitpunkt $\boldsymbol{t_0 = 2,54}$ ist.
Nach 2,54 Stunden beginnen sich Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen.

▶ Anzahl der Fahrzeuge ermitteln, die sich vor dem Übergang stauen

Die Anzahl A der Fahrzeuge, die sich maximal vor dem Übergang anstauen, entspricht gerade der folgenden Differenz:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) - 110 \, dt$$

Dabei sind t_0 und t_1 die Schnittstellen der Funktion f und der Gerdaden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit:

- $t_0 = 2,54$
- $t_1 = 21,86$

Der GTR liefert dir, dass sich maximal 2.325 Fahrzeuge am Grenzübergang anstauen.

▶ Anzahl bei einer Abfertigungsrate von 220 Fahrzeugen pro Stunde

12 Stunden nach Beobachtungsbeginn soll die momentane Abfertigungsate auf **220** Fahrzeuge pro Stunde erhöht werden. In den Stunden davor soll die momentane Abfertigungsrate weiterhin 110 Fahrzeuge pro Stunde betragen.
Diese Fläche entspricht der folgenden Differenz:

$$\int_{t_0}^{12} f(t) - 110 \, dt + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220 \, dt$$

Dabei ist t_0 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit: $t_0 = 2,54$.
Dahingegen ist t_2 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $z = 220$. Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, kannst du also wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Schnittstelle t_2 der Funktion f und der Geraden $z = 220$.
- Berechne das Integral $\int_{t_0}^{12} f(t) - 110 \, dt + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220 \, dt$

Der gesuchte Zeitpunkt ist $\boldsymbol{t_2 = 15,9}$.

Berechne also die Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge, indem du oben angeführtes Integral berechnest.

$$\int_{2,54}^{12} f(t) - 110 \, dt + \int_{12}^{15,9} f(t) - 220 \, dt$$

Der GTR liefert dir, dass sich durch die Erhöhung ab der 12. Stunde auf 220 Fahrzeuge pro Stunde maximal $1.422,56 + 179,79 \approx 1.602$ Fahrzeuge am Grenzübergang anstauen.

Aufgabe 2.2 a)

▶ Koordinaten des Extrempunktes angeben

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f_a müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

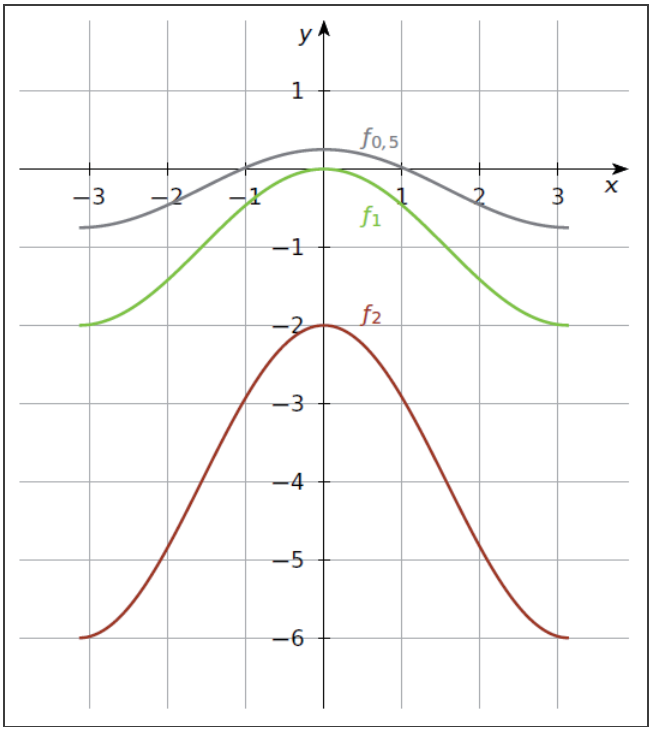
- Notwendige Bedingung: $\boldsymbol{f_a'(x_E) = 0}$
- Hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{f_a''(x_E) \neq 0}$

Die Koordinaten des Extrempunktes E lauten $E(0 \mid a - a^2)$.

b)

▶ Punkte auf der y-Achse angeben angeben

Im Schaubild kannst du erkennen, dass die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und $f_{0,5}$ der Funktionenschar f_a jeweils einen Punkt auf der y-Achse schneiden. Gib die Punkte an, durch welche **kein** Graph der Funktionenschar f_a verläuft.



Dabei kannst du folgende Eigenschaften verwenden:

- Laut Aufgabentext muss $\boldsymbol{0 < a}$ gelten.
- Der Extrempunkt besitzt die Koordinaten $\boldsymbol{E(0 \mid a - a^2)}$ und stellt damit den Schnittpunkt mit der y-Achse dar.

Betrachte die Hilfsfunktion h mit dem Term $\boldsymbol{h(a) = a - a^2}$ und der Bedingung $0 < a$.
Diese Hilfsfunktion gibt die y-Koordinate des Schnittpunktes $E(0 \mid a - a^2)$ mit der y-Achse in Abhängigkeit von a an.
Lässt du die Hilfsfunktion in deinem GTR zeichnen, so kannst du erkennen, dass die Funktion h nach unten nicht beschränkt ist.

Der GTR liefert dir, dass sich das Maximum an $a = 0,5$ mit $\boldsymbol{h(a) = 0,25}$ befindet. Das heißt, der Extrempunkt bzw. Schnittpunkt mit der y-Achse kann maximal die y-Koordinate $0,25$ besitzen.

Du kannst also festhalten, dass der Graph der Funktionenschar f_a die Punkte $\boldsymbol{P(0 \mid y)}$ auf der y-Achse nicht berührt, für die $\boldsymbol{0,25 < y}$ gilt.

Wahlteil Aufgabe B 1

Aufgabe B 1.1

a)

▶ Bestimmen einer Koordinatengleichung für Ebene *E*

Eine Koordinatengleichung der Ebene E lautet also:

$E: \quad 12 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 60.$

▶ Bestimmen des Winkels zwischen den Flächen *BCS* und *ABCD*

Der Winkel zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche $ABCD$ beträgt also $67{,}38^\circ$.

▶ Berechnen des Flächeninhalts des Dreiecks *BCS*

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCS ist $65\,\text{FE}$.

b)

▶ Berechnen des Quadervolumens

Der Quader besitzt ein Volumen von $150\,\text{VE}$.

▶ Berechnen der Koordinaten des Eckpunktes

Die gesuchten Koordinaten des Eckpunktes auf der Kante $\overline{BS}$ sind also $R_{\frac{5}{11}}\left(\frac{30}{11} \mid \frac{30}{11} \mid \frac{60}{11}\right)$.

Aufgabe B 1.2

a)

▶ Wahrscheinlichkeit, dass mind. 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 12 schwarze Kugeln aus Gefäß $G1$ zu ziehen beträgt also etwa $59{,}6\,\%$.

▶ Wahrscheinlichkeit, dass 2 schwarze Kugeln hintereinander gezogen werden

Die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander aus dem Gefäß zu ziehen beträgt also $0{,}0741$ bzw. $7{,}41\,\%$.

b)

▶ Berechnen der Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel

Die Wahrscheinlichkeit, unter den neuen Umständen, eine schwarze Kugel aus Gefäß $G2$ zu ziehen liegt also bei $\frac{7}{20}$ bzw. $35\,\%$.

Wahlteil Aufgabe B 2

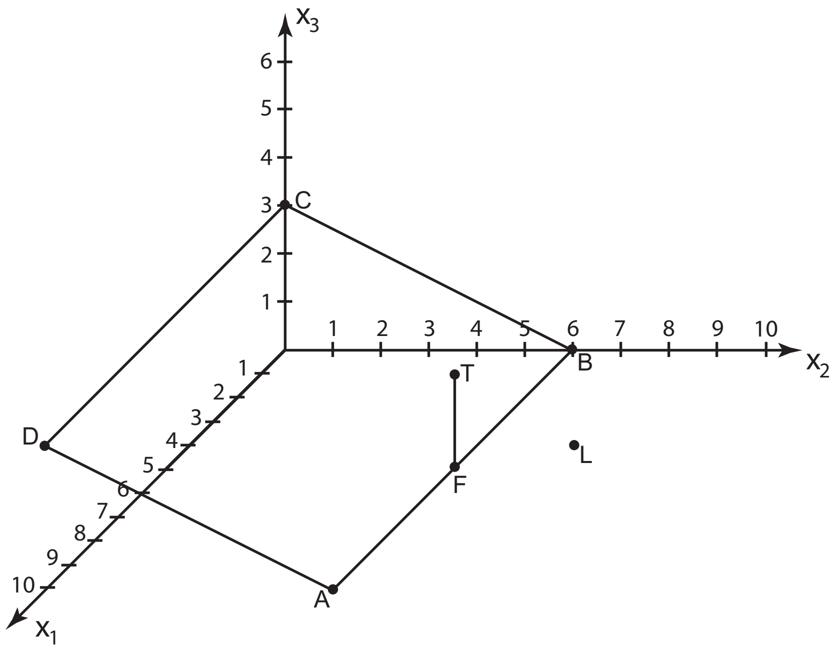
a)

▶ Bestimmen der Koordinatengleichung der Ebene *E*, in der die Platte liegt

Eine Koordinatengleichung der Ebene *E* lautet:

$E: \quad x_2 + 2 \cdot x_3 = 6.$

▶ Darstellen des Sachverhaltes in einem Koordinatensystem



▶ Bestimmen des Winkels zwischen Stab und Platte

Der Winkel zwischen Stab und Platte beträgt also ungefähr 63,4°.

b)

▶ Berechnen des Schattenpunktes des oberen Endes des Stabes

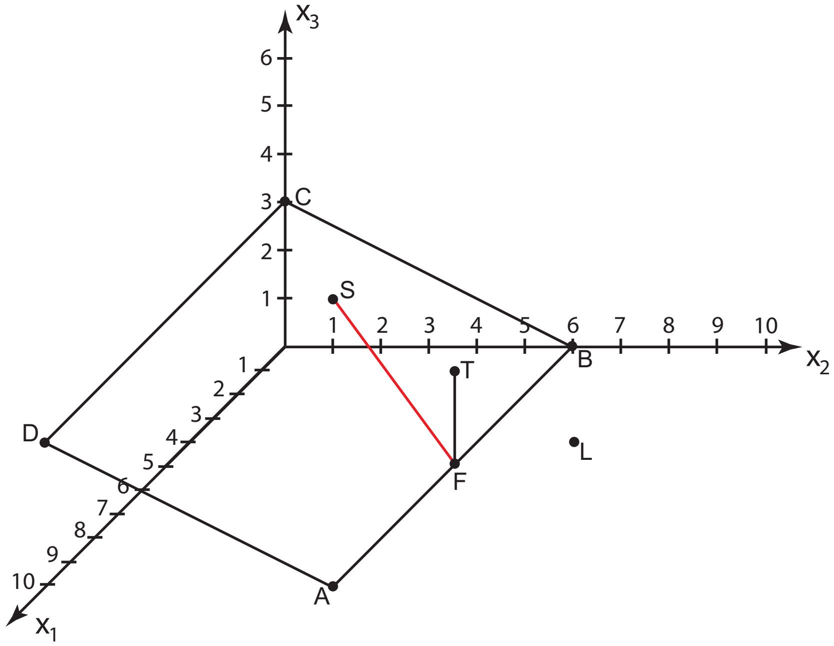
Der Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes hat die Koordinaten: $S(2 \mid 2 \mid 2)$.

▶ Begründen, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt

Vergleichst man hier die Koordinaten von *S* mit den Koordinaten der Eckpunkte *A*, *B*, *C* und *D*, so kann man hier folgendes feststellen:

- Der Schattenpunkt *S* liegt in der Ebene *E*.
- Die x_1-Koordinate von *S* liegt zwischen den x_1-Koordinaten von *A* und *B*.
- Die x_2-Koordinate von *S* liegt zwischen den x_2-Koordinaten von *B* und *C*.

Der Schattenpunkt *S* liegt also offensichtlich auf der Platte. Da auch der Anfangspunkt *F* mit $F(5 \mid 2 \mid 0)$ des Stabes sich auf der Platte befindet, muss sich der Schatten zwischen *S* und *F* ebenfalls auf der Platte befinden. Dies lässt sich auch wie folgt an der Zeichnung aus a veranschaulichen:



Der Schatten wurde hier in rot eingezeichnet.

c)

▶ Berechnen der Koordinaten der möglichen Kollisionspunkte

Die zwei möglichen Kollisionspunkte haben die Koordinaten:

- $K_2(2\,|\,2\,|\,2)$ und
- $K_8(8\,|\,2\,|\,2)$.

Aufgabe B 2.2

a)

▶ Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 30)$ gilt: $P(X \leq 30) \approx 0,05706 \approx 5,71\,\%$.

▶ Wahrscheinlichkeit, für die geg. Abweichung vom Erwartungswert

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8777 bzw. 87,77 % weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert ab.

b)

▶ Bestimmen des Ablehnungsbereichs

Bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften entscheidet man sich gegen die Nullhypothese.