Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

$f'(x) = (3x-5) \cdot e^{-x}$

Aufgabe 2 (2VP)

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx = 2e^2$$

Aufgabe 3 (3VP)

$x_2 = -3, \qquad x_3 = 0,5$

Aufgabe 4 (4VP)

a) K besitzt eine senkrechte Asymptote bei $x = 0$ und eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = -4$.

b) Schnittpunkt $S(-0,5 \mid 0)$

Aufgabe 5 (5VP)

a) Das Schaubild von f besitzt eine waagerechte Asymptote bei $y = -1$. Diese findest du nur im Schaubild in Abbildung 2.

$a = 3$

b) Aus dem Verlauf des Schaubildes von f ergeben sich Eigenschaften, die das Schaubild von f' erfüllen muss. Es muss im Intervall $]-\infty; 0[$ **oberhalb** der x-Achse verlaufen, bei $x = 0$ die x-Achse schneiden und im Intervall $]0; \infty[$ **unterhalb** der x-Achse verlaufen. Dies trifft alles nur auf das Schaubild in Abbildung 3 zu.

Es gilt: $I(2) = 0$. Das einzige Schaubild, das durch den Punkt $(2 \mid 0)$ geht, ist das in Abbildung 4.

Aufgabe 6 (3VP)

Aus dreien der vier Punkte lässt sich die Gleichung einer Ebene E bilden. Eine Punktprobe ergibt, dass auch der vierte Punkt in der Ebene liegt.

Eine Möglichkeit wäre E mit $E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$.

Aufgabe 7 (4VP)

a) Der Abstand beträgt $d = 6\,\text{LE}$.

b) $Q(-11\,|\,6\,|\,1)$

Aufgabe 8 (3VP)

▸ Verfahren zur Spiegelung beschreiben

Die Geraden g und g' sind „Spiegelgeraden" bezüglich der Ebene E. Da sich g und E in einem Punkt S schneiden und S folglich in der Ebene E liegt, bleibt er unter der Spiegelung erhalten und liegt auf **beiden Geraden** g und g'.

Um die Gerade g' eindeutig zu bestimmen benötigst du aber zwei Punkte. Wähle deshalb einen beliebigen weiteren Punkt P auf g. Du kannst diesen Punkt an E spiegeln, indem du zunächst die Gleichung einer Hilfsgeraden h bestimmst. h soll orthogonal zu E sein und durch P verlaufen. Dabei entspricht der Richtungsvektor dieser Hilfsgeraden h dem Normalenvektor der Ebene. Ermittle dann den Schnittpunkt F von h und E. Den Spiegelpunkt P' erhältst du nun mit $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$.

Du kennst nun die Koordinaten von S und von P'. Die gespiegelte Gerade g' verläuft durch diese beiden Punkte. Somit kannst du die Geradengleichung aufstellen:

$$g' : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SP'} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

a) ► **Breite des Walls berechnen** (4VP)

Der Lärmschutzwall ist etwa $12,65\,\text{m}$ breit.

► **Symmetrischen Querschnitt nachweisen**

$$f(-x) = \frac{120}{(-x)^2+20} - 2 = \frac{120}{x^2+20} - 2 = f(x)$$

► **Maximales Gefälle überprüfen**

Das maximale Gefälle liegt bei $0,87$. Da $0,87 < 1$, ist das Gefälle ist nicht größer als $100\,\%$.

b) ► **Volumen des Lärmschutzwalls berechnen** (6VP)

Das Volumen des Lärmschutzwalls beträgt $12.985\,\text{m}^3$.

► **Breite des Fahrwegs berechnen**

Der Fahrweg ist genau $4\,\text{m}$ breit.

► **Volumen des abzutragenden Materials ermitteln**

Das Volumen des abzutragenden Materials beträgt $1.285\,\text{m}^3$.

► **Verlängerung des Walls berechnen**

Der neue, abgeflachte Wall wäre insgesamt $554,91\,\text{m}$ lang und damit um etwa $54,91\,\text{m}$ länger als der alte Wall.

c) ► **Winkel der Neigung** (5VP)

Der Winkel ist $5,74^\circ$ groß.

► **Höhe des linken Randes**

Der linke Rand liegt in etwa $2,80\,\text{m}$ Höhe.

Aufgabe I 1.2

Vergleiche, ob $f'(x)$ mit der allgemeinen Ableitung $f^{(n)}(x)$ für $n=1$ übereinstimmt. (3VP)

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1\cdot e^x) + (x\cdot(1\cdot e^x)) \\ &= e^x + x\cdot e^x \\ &= (1+x)\cdot e^x \end{aligned}$$

Für $n = 1$ stimmt die Formel mit der Ableitung überein.
Überprüfe nun, ob die Ableitung von $f^{(k)}(x)$ mit der Funktion $f^{(k+1)}(x)$ übereinstimmt.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\left(f^{(k)}(x)\right)' &= (1 \cdot e^x) + ((x+k) \cdot (1 \cdot e^x)) \\ &= e^x + (x+k) \cdot e^x \\ &= (1 + (x+k)) \cdot e^x = (x + (1+k)) \cdot e^x\end{aligned}$$

Die Behauptung stimmt also für jede k-te Ableitung.
Aus dem Induktionsbeginn und dem Induktionsschritt folgt, dass die Behauptung für alle $n \geq 1$ wahr ist.

Aufgabe I 2

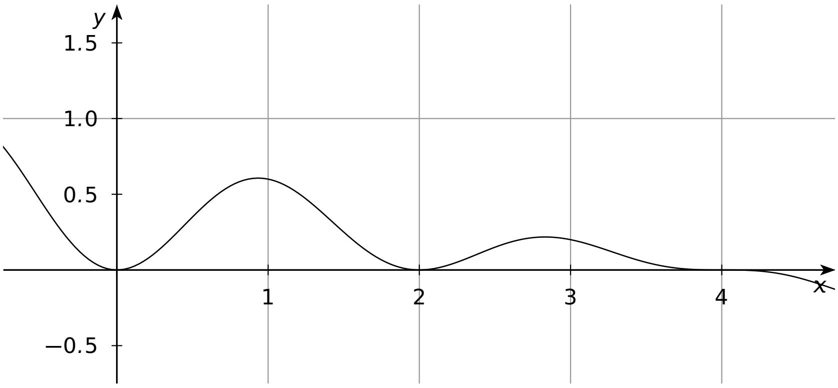
a) ▶ **Nullstellen von f berechnen** (5VP)

Als Nullstellen ergeben sich $x = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

▶ **K_f aus dem Schaubild der Kosinusfunktion erhalten**

Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild der Kosinusfunktion hervor durch eine Streckung um Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung, eine Spiegelung an der x-Achse und eine anschließende Verschiebung um 1 LE nach oben.

▶ **Skizze von K_g**



b) ▶ **Höchsten Punkt der Bahn ermitteln** (5VP)

Der höchste Punkt der Minigolfbahn hat eine Höhe von etwa $0,61\,\text{m}$.

▶ **Stelle mit größter Steigung ermitteln**

Der Ball überwindet bei $x \approx 0,44$ die größte Steigung.

▶ **Menge des angesammelten Wassers berechnen**

Es haben sich etwa $19,1\,\text{l}$ Wasser zwischen den beiden Wellen angesammelt.

c) ▸ **Maximale Höhe des Balls bestimmen** (4VP)

1. Schritt: Funktionsgleichung bestimmen

Die Funktionsgleichung der Parabel, die die Flugbahn beschreibt, lautet $p(x) = -0,162 \cdot x^2 + 1,162 \cdot x - 0,190$.

2. Schritt: Hochpunkt der Parabel ermitteln

Die maximale Flughöhe des Balls beträgt ca. $1,89\,\text{m}$.

d) ▸ **Term für neuen Bahnverlauf bestimmen** (4VP)

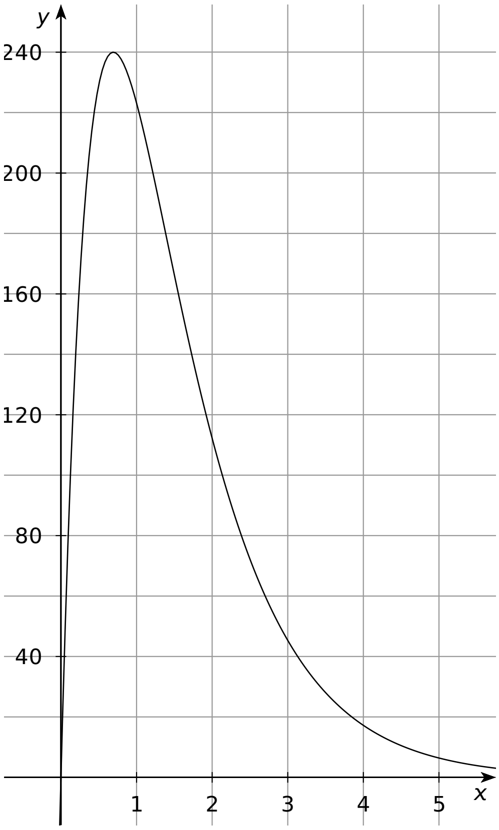
$$y = -0,2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + 0,2$$

▸ **Durchschnittliche Höhe der Bahnen vergleichen**

Die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen sind mit $0,2\,\text{m}$ identisch.

Aufgabe I 3

a) ▸ **Schaubild skizzieren** (6VP)



▸ **Höchste Geschwindigkeit bestimmen**

Die Höchstgeschwindigkeit des Motorbootes beträgt $240\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ Stelle mit stärkster Abnahme der Geschwindigkeit bestimmen

Die Geschwindigkeit des Motorbootes nimmt nach etwa $1,39\,\text{min}$ am stärksten ab.

▶ Mittlere Geschwindigkeit berechnen

Das Motorboot fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von ungefähr $94,71\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ Geschwindigkeitsvergleich zum Segelboot anstellen

Das Motorboot fährt insgesamt $1,317$ Minuten lang schneller als das Segelboot. (zwischen $t = 0,2374$ und $t = 1,5544$).

b) **▶ Zurückgelegte Strecke nach zwei Minuten berechnen** (6VP)

Das Motorboot ist nach $2\,\text{min}$ etwa $358,87\,\text{m}$ gefahren.

▶ Funktionsterm für zurückgelegten Weg bestimmen

$-960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 480.$

▶ Prüfen, ob mehr als 500 m erreicht werden

Das Motorboot legt nach diesem Modell maximal einen Weg von $480\,\text{m}$ zurück und erreicht nicht die $500\,\text{m}$-Marke.

▶ Zeitpunkt t bestimmen

Das Motorboot überholt das Segelboot nach ungefähr $0,58\,\text{min}$.

c) **▶ Stillstand des Motorbootes** (6VP)

1. Schritt: Gleichung der Tangente bestimmen

Die Gleichung der Tangente lautet bisher $t: y = -63,25x + b$.

2. Schritt: Zeitpunkt t berechnen

Nach etwa $3,64$ Minuten kommt das Motorboot zum Stillstand.

▶ Zeitpunkt t für Stillstand des Segelboots bestimmen

Das Segelboot stoppt nach ca. $3,02\,\text{min}$.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) ▶ **Gleichschenkliges Dreieck nachweisen** (5VP)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20}$

▶ **Punkt D der Raute ermitteln**

Die Koordinaten des Punktes D lauten $D(4\,|\,4\,|\,-2)$.

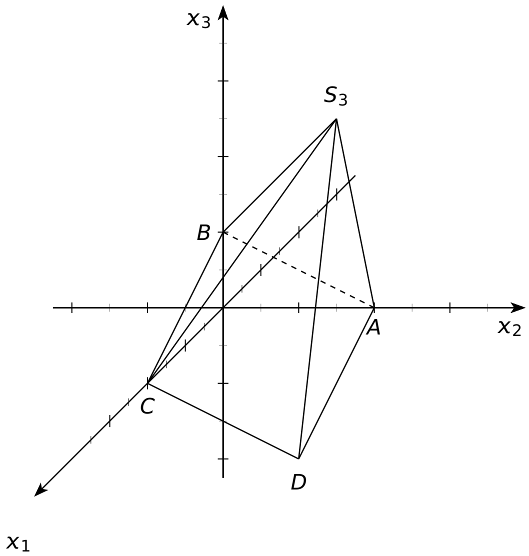
▶ **Innenwinkel der Raute**

Die Winkel in den Punkten B und D sind je $78,46^\circ$ groß.
Die Winkel in den Punkten A und C sind je $101,54^\circ$ groß.

▶ **Lage der Raute nachweisen**

Die Raute liegt in der Ebene E, wenn alle vier Punkte A, B, C und D in der Ebene E liegen. Eine Punktprobe ergibt jedes Mal eine wahre Aussage.

b) ▶ **Pyramide P₃ zeichnen** (6VP)



▶ **Koordinatengleichung der Ebene F bestimmen**

Die Koordinatengleichung der Ebene F lautet $x_1 = x_2$ bzw. $x_1 - x_2 = 0$.

▶ Ebene F als Symmetrieebene der Pyramide P_3 nachweisen

Damit die Ebene F eine Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist, müssen drei Eigenschaften erfüllt sein:
1. Die Spitze S_3 der Pyramide liegt in der Ebene F. (sonst gäbe es zwei Spitzen)
2. Die Ebene F halbiert die Grundfläche der Pyramide.
3. Die Ebene F ist orthogonal zur Grundfläche der Pyramide.

Die Ebene F wurde durch die Punkte B, D und S_3 bestimmt. Die Spitze der Pyramide ist also in der Ebene F enthalten. Die Grundfläche der Pyramide ist eine Raute. Deshalb halbiert die Diagonale BD die Grundfläche der Pyramide automatisch. Um zu überprüfen, ob F orthogonal zu dieser Grundfläche ist, verwendest du das Skalarprodukt. Als Richtungsvektoren nimmst du die Normalenvektoren der Ebenen E und F. Das Skalaprodukt muss 0 sein, damit sie in einem Winkel von 90° zueinander stehen. Eine Rechnung bestätigt dieses Ergebnis.

c) **▶ Wert für t** (5VP)

Für $t = 3$ liegt der dazugehörige Punkt S_3 senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

▶ Durchstoßpunkte der Spitze in der $x_1 - x_2$-Ebene

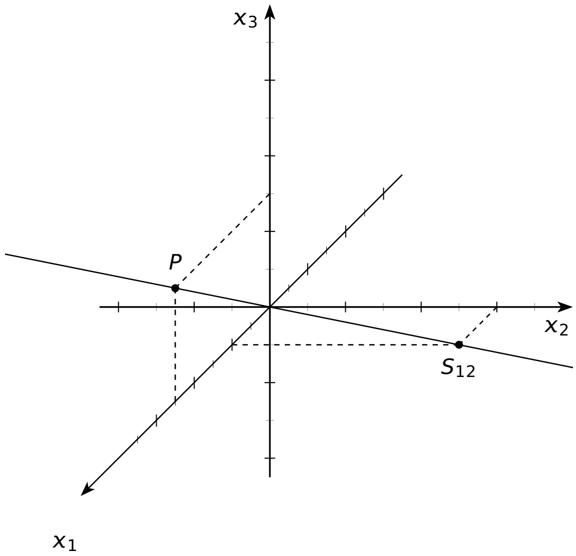
Der Punkt S_3 trifft bei der Rotation um AC auf die Punkte $U_1(8,93 \mid 8,93 \mid 0)$ und $U_2(-4,93 \mid -4,93 \mid 0)$.

Aufgabe II 2.1

a) **▶ Schnittpunkt der Geraden ermitteln** (7VP)

Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der x_1x_2-Ebene lauten $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$.

▶ Gerade g zeichnen



▶ Schnittwinkel der Geraden g und der x_1x_2-Ebene berechnen

Die Maßzahl des Schnittwinkels von g und der x_1x_2-Ebene beträgt $24,1^\circ$.

▶ Koordinaten von F ermitteln

Die Koordinaten des Punktes F lauten $F(3\,|\,4\,|\,1)$.

▶ Gleichung der Geraden h aufstellen

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

b) ### ▶ Entstehung einer Ebene bei Rotation der Geraden g begründen (5VP)

Der Punkt F ist der Punkt auf g, der den kürzesten Abstand zum Punkt A hat. Daraus folgt, dass die Gerade durch A und F im rechten Winkel zur Geraden g verläuft. Bei der Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F entsteht also eine Art „Scheibe“, die senkrecht zur Geraden durch A und F verläuft. Diese „Scheibe“ liegt in einer Ebene.

▶ Gleichung der Ebene nachweisen

Die Ebene E hat das Lot $\overrightarrow{FA}$. Somit kannst du diesen Vektor als **Normalenvektor der Ebene** E benutzen. Außerdem liegt der Punkt F in der Ebene. Du kannst die Koordinaten des Normalenvektors und die von F in die allgemeine Koordinatengleichung der Ebene einsetzen und erhältst damit die Gleichung, die in der Aufgabenstellung angegeben ist.

▸ Lage von P und Q auf verschiedenen Seiten überprüfen

Die Punkte P und Q liegen nicht auf verschiedenen Seiten von E.

Aufgabe II 2.2

▸ Verhältnis von CS zu SD (4VP)

S teilt die Strecke im Verhältnis $5:3$.