Pflichtteil

Aufgabe 1 (2P)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 2 (2P)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$.

Aufgabe 3 (2P)

Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$.

Aufgabe 4 (4P)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 5 (5P)

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.
Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 6 (4P)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1\,|\,-1\,|\,3)$ und $B(2\,|\,-3\,|\,0)$.
Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4\,|\,3\,|\,-8)$.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

Aufgabe 7 (4P)

Gegeben sind die beiden Ebenen

$E_1 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_3.

Aufgabe 8

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen?
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

Aufgabe 9 (3P)

Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8; \quad -4 \leq x \leq 4$ (x und $f(x)$ in Meter).

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten? (6P)
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen?

b) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden. (3P)
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht. (3P)
Wie breit darf der Behälter höchstens sein?

Aufgabe A 1.2 (3P)

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (x-1) \cdot (1 - \frac{1}{t} \cdot \mathrm{e}^x)$.
Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle?

Wahlteil Aufgabe A 2

Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit
$r(t) = 10.000 \cdot (\mathrm{e}^{-0,5 \cdot t} - \mathrm{e}^{-t});\quad 0 \leq t \leq 12$
beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate. (4P)
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2.000 Liter pro Stunde?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

b) Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank? (3P)
Zu welchem Zeitpunkt sind 5.000 Liter im Tank?

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion w mit (4P)

$$w(t) = r(t) - 400\ ;\ 3 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

Aufgabe A 2.2 (4P)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$.
Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.
Berechnen Sie A exakt.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g.

Wahlteil Aufgabe B 1

Aufgabe B 1.1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(6\,|\,0\,|\,0)$, $Q(0\,|\,6\,|\,0)$ und $R(0\,|\,0\,|\,6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. (5P)
Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimmen Sie den Abstand von E zur x_1-Achse.

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch (6P)
$E_a: 3x_2 + x_3 = a \quad ; a \in \mathbb{R}$.
Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6\,|\,6\,|\,6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

Aufgabe B 1.2 (4P)

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose.

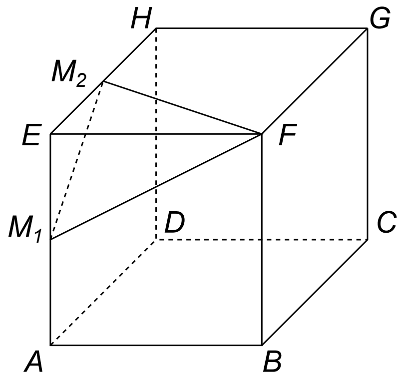
Jemand kauft drei Lose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose?

Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt?

Wahlteil Aufgabe B 2

Aufgabe B 2.1

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt.
Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 8 \mid 0)$ und $H(0 \mid 0 \mid 8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

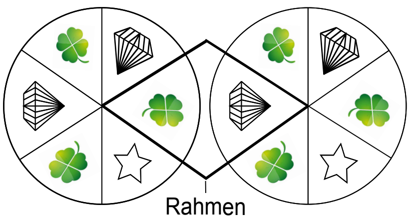


a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. (6P)
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?
(Teilergebnis: $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)

b) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. (3P)
Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

Aufgabe B 2.2

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.



a) Zunächst werden die Räder als ideal angenommen. (3P)
Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

Stern—Stern	2,00 €
Diamant—Diamant	0,85 €
Kleeblatt—Kleeblatt	0,20 €

In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.

Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist.

Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für „Diamant — Diamant" geändert werden.
Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag.

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit p für „Stern — Stern" geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden. (3P)
Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{36}$, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll.