Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

▶ Bildung der ersten Ableitung von f

Die Funktion f wird nach der Quotientenregel abgeleitet und vereinfacht. Der Zähler $\sin(2x)$ wird dabei wiederum nach der Kettenregel differenziert, hier ist $(\sin(2x))' = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x)$:

$$f'(x) = \frac{2\cdot\cos(2x)\cdot x - \sin(2x)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x\cdot\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}.$$

Aufgabe 2 (2VP)

▶ Berechnung des Integrals

Die Integrandenfunktion $(2x-1)^4$ wird mithilfe der „umgekehrten Kettenregel“ (lineare Substitution) integriert. Die äußere Funktion ergibt integriert $\frac{1}{5}(2x-1)^5$, dazu muss noch durch die innere Ableitung 2 dividiert werden. Dies ergibt die Stammfunktion

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(2x-1)^5}{2} = \frac{1}{10}(2x-1)^5.$$

Für das Integral gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x-1)^4\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{10}(2x-1)^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}(2\cdot 1-1)^5 - \frac{1}{10}(2\cdot 0-1)^5 \\ &= \frac{1}{10}\cdot 1^5 - \frac{1}{10}\cdot(-1)^5 = \frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3VP)

▶ Lösung der angegebenen Exponentialgleichung

Um die Exponentialgleichung zu lösen, bringen wir alle angegeben Terme auf eine Seite und dividieren durch 4:

$$4\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} = 4 \quad\Leftrightarrow\quad 4\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} - 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1 = 0.$$

Die Gleichung wird nun durch die Substitution $\mathrm{e}^x = u$ gelöst. Dies ergibt wiederum eine quadratische Gleichung, die mithilfe der p-q-Formel gelöst wird:

$$u^2 + \frac{3}{2}u - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - (-1)} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

Dies ergibt die beiden Lösungen $u_1 = \frac{1}{2}$ und $u_2 = -2$. Mit der Rücksubstitution $u = \mathrm{e}^x$ folgt:

$$u_1 = \frac{1}{2} = \mathrm{e}^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2;$$

$$u_2 = -2 = \mathrm{e}^x.$$

Aus dem zweiten Ansatz ergibt sich keine weitere Lösung, da die e-Funktion stets positiv ist.

Die Gleichung hat also $x = -\ln 2$ als einzige Lösung, die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{-\ln 2\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

▶ Teil a: Beschreibung, wie das Schaubild von *g* aus dem von *f* hervorgeht

Das Schaubild von g kann in drei Schritten aus dem von f gewonnen werden:

- Spiegelung an der y-Achse (Übergang $\mathrm{e}^{x} \to \mathrm{e}^{-x}$);
- Spiegelung an der x-Achse (Übergang $\mathrm{e}^{-x} \to -\mathrm{e}^{-x}$);
- Parallelverschiebung um $(+2)$ Einheiten entlang der y-Achse (Übergang $-\mathrm{e}^{-x} \to -\mathrm{e}^{-x} + 2$).

▶ Teil b: Nachweis, dass sich die Schaubilder in $P(0\,|\,1)$ berühren

Damit sich die beiden Schaubilder im Punkt $P(0\,|\,1)$, also an der Stelle $x = 0$ berühren, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

(I) $f(0) = g(0)$
(II) $f'(0) = g'(0)$

Die erste Bedingung ist gut nachzuweisen: Es gilt $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ und $g(0) = -\mathrm{e}^0 + 2 = -1 + 2 = 1$. Die Bedingung (I) ist also erfüllt.

Für die zweite Bedingung bilden wir zunächst die ersten Ableitungen von f und g:

$f'(x) = \mathrm{e}^{x}$;

$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = \mathrm{e}^{-x}$.

Damit ist dann $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ und $g'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, also ist auch Bedingung (II) erfüllt. Die Schaubilder berühren sich tatsächlich im Punkt $P(0\,|\,1)$.

Aufgabe 5 (5VP)

Zu begründen ist, dass alle vier Aussagen auf jeden Fall **wahr** sind.

(1) Im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ verläuft das Schaubild von f oberhalb der x-Achse, es ist also $f(x) > 0$. Wegen $F'(x) = f(x)$ (denn F ist ja Stammfunktion) gilt also $F'(x) > 0$ im angegebenen Bereich. F ist daher hier (streng) monoton wachsend.

(2) Im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ hat das Schaubild von f zwei Extremstellen (bei $x = \pm 2{,}5$) sowie einen Sattelpunkt (bei $x = 0$). Die Tangenten an das Schaubild von f in diesen Punkten sind allesamt waagrechte Tangenten mit der Steigung 0. Diese Steigung entspricht gerade dem Wert der ersten Ableitung f' an diesen Stellen. f' hat also im genannten Bereich drei Nullstellen.

(3) Da das Integral über f' gesucht ist, kann das Integral mit der Funktion f als Stammfunktion berechnet werden. Benötigte Funktionswerte können aus der Abbildung abgelesen werden:

$$\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^3 = f(3) - f(0) = 0 - 1 = -1.$$

Auch diese Aussage ist daher wahr.

(4) In der Umgebung $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ vom Ursprung O ist f monoton fallend, wie wir in der Abbildung sehen können. Es gilt daher $f'(x) \leq 0$. Einzig an der Stelle $x = 0$ hat f' dabei eine Nullstelle, ansonsten gilt $f'(x) < 0$. Das Schaubild von f' verläuft also unterhalb der x-Achse und berührt diese nur an der Stelle $x = 0$, da hier $f'(0) = 0$ gilt. $O(0\,|\,0)$ liegt daher auf dem Schaubild von f' und ist Hochpunkt.

Aufgabe 6 (4VP)

▶ Lösung des linearen Gleichungssystems und geometrische Interpretation

Wir lösen das LGS mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Dazu vertauschen wir zunächst die Zeilen 1 und 3 miteinander und erhalten:

$$\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{I} & x_1 & & & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{II} & 5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -11 & \\
\text{III} & -5x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 & \\
\hline
\text{I} & x_1 & & & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{IIa} & & & -2x_2 & - & 4x_3 & = & -4 & |\ \text{II} + \text{III} \\
\text{IIIa} & & & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & |\ \text{III} + 5 \cdot \text{I} \\
\hline
\text{I} & x_1 & & & + & x_3 & = & -1 & \\
\text{IIa} & & & -2x_2 & - & 4x_3 & = & -4 & \\
\text{IIIb} & & & & & 0 & = & 0 & |\ \text{IIa} + 2 \cdot \text{IIIa}
\end{array}$$

Wegen der Nullzeile hat das LGS unendlich viele Lösungen. Wir wählen x_3 als Parameter und setzen $x_3 = t$. Aus (IIa) folgt dann:

$$-2x_2 - 4t = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 + 2t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2 - 2t.$$

Für x_1 erhalten wir entsprechend aus (I):

$x_1 + t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 - t.$

Lösungsmenge ist also die Menge der Tripel $(-1-t;\, 2-2t;\, t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Die drei Gleichungen des LGS können als Gleichungen von je einer Ebene gesehen werden. Das Lösen des LGS entspricht dann der Suche nach möglichen Schnittmengen dieser Ebenen. Da es unendlich viele Lösungen (Punkte) gibt, müssen sich diese Ebenen allesamt in einer gemeinsamen Schnittgeraden schneiden.

Die Gleichung dieser Schnittgeraden ergibt sich, indem wir die Lösungstripel als Vektor schreiben:

$$s\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 2-2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7 (3VP)

▸ Teil a: Nachweis der Parallelität von *E* und *g*

g und E liegen parallel zueinander, falls g und E keine gemeinsamen Punkte besitzen. Um dies zu überprüfen, multiplizieren wir die Ebenengleichung von E aus und setzen anschließend g in diese Gleichung ein, um zu versuchen, einen Schnittpunkt zu berechnen:

$$E\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8 = 0.$$

Einsetzen von g in E ergibt:

$$\begin{aligned} g \cap E\colon \quad 8(7+t) + (5-4t) - 4(-7+t) - 8 &= 0 \\ 56 + 8t + 5 - 4t + 28 - 4t - 8 &= 0 \\ 81 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Aussage ist falsch, die Gleichung hat also keine Lösung. g und E haben keine Schnittpunkte und verlaufen daher parallel zueinander.

▸ Teil b: Bestimmung des Abstands von *E* und *g*

Der Abstand von g und E entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes von g — zum Beispiel des Aufpunktes $P(7\,|\,5\,|-7)$ von g — zur Ebene E. Um diesen Abstand zu bestimmen, stellen wir zunächst die Hesse'sche Normalenform von E auf und erhalten:

$$E_{\text{HNF}}\colon \frac{8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8}{\sqrt{8^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8}{9} = 0.$$

Der Abstand ergibt sich nun durch Einsetzen der Koordinaten von P in die HNF:

$$d(g,\, E) = d(P,\, E) = \left|\frac{8 \cdot 7 + 5 - 4 \cdot (-7) - 8}{9}\right| = \left|\frac{56 + 5 + 28 - 8}{9}\right| = \left|\frac{81}{9}\right| = 9 \text{ LE}.$$

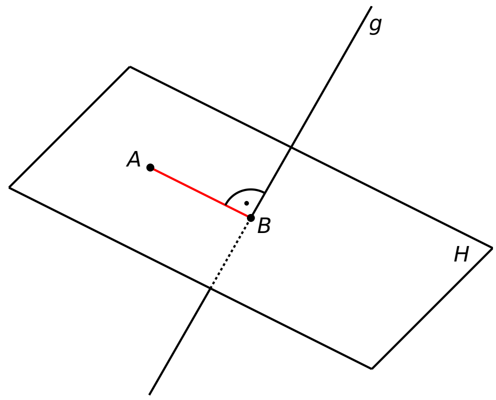
Der Abstand von g und E beträgt 9 LE.

Aufgabe 8

(3VP)

▶ Beschreibung eines Verfahrens zur Bestimmung des Punktes mit kleinstem Abstand

Der gesuchte Punkt B auf g entspricht dem **Lotfußpunkt** von A auf der Geraden g. Um ihn zu bestimmen, werden die folgenden zwei Schritte durchgeführt:
Es wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die senkrecht zu g verläuft und den Punkt A enthält. Der Richtungsvektor von g ist dabei ein Normalenvektor von H.
Anschließend wird g mit dieser Ebenen geschnitten. Dies ergibt den Parameter für den Ortsvektor des gesuchten Punktes B. Einsetzen dieses Parameters ergibt die Koordinaten von B.



Wahlteil I

Aufgabe I 1

$f_a(x)=\dfrac{4}{x^3+4a}; \quad a\neq 0$

a) ▸ **Bestimmung der maximalen Definitionsmenge von f_2** (7VP)

Die Funktion f_2 ist durch $f_2(x)=\dfrac{4}{x^3+8}$ gegeben. Aus dem Bereich der reellen Zahlen müssen

bei dieser gebrochenrationalen Funktion alle Werte x ausgeschlossen werden, an denen der **Nenner** x^3+8 den Wert Null annimmt. Dies ist an folgenden Stellen der Fall:

$$x^3+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=-8 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt[3]{|-8|}=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Der maximale Definitionsbereich von f_2 ist also $D_2=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

▸ **Angabe der Asymptoten des Schaubildes K_2**

An der Definitionslücke $x=-2$ ist der Nenner gleich Null, der Zähler gleich 4. Für $x\to-2$ gilt also $|f_2(x)|\to\infty$, $x=-2$ ist damit die Gleichung einer **senkrechten Asymptote** von K_2.

Da wegen Zählergrad < Nennergrad für große x

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^3+8}=0$$

gilt, nähert sich K_2 außerdem für große x der x-Achse an. Die x-Achse mit $y=0$ ist also noch **waagrechte Asymptote** von K_2.

Hinweis: Schiefe Asymptoten können nicht existieren, da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist.

▸ **Bestimmung der Koordinaten der zwei Wendepunkte**

Die Wendepunkte von K_2 können mithilfe der **zweiten Ableitung** von f_2 berechnet werden. Mithilfe der Quotientenregel ergibt sich:

$$f_2'(x)=\frac{0\cdot(x^3+8)-4\cdot 3x^2}{(x^3+8)^2}=\frac{-12x^2}{(x^3+8)^2};$$

$$f_2''(x)=\frac{-24x\cdot(x^3+8)^2-(-12x^2)\cdot 2\cdot(x^3+8)^1\cdot 3x^2}{(x^3+8)^4}$$

$$=\frac{(x^3+8)\left[-24x(x^3+8)+24x^2\cdot 3x^2\right]}{(x^3+8)^4}=\frac{-24x^4-192x+72x^4}{(x^3+8)^3}=\frac{48x^4-192x}{(x^3+8)^3}.$$

Die Wendestellen ergeben sich nun aus der notwendigen Bedingung $f_2''(x)=0$. Ein Bruchterm nimmt dabei genau dann den Wert Null an, wenn sein **Zähler** gleich Null ist:

$$f_2''(x)=\frac{48x^4-192x}{(x^3+8)^3}\stackrel{!}{=}0 \quad\Leftrightarrow\quad 48x^4-192x=0 \qquad |\ x \text{ ausklammern}$$

$$x(48x^3-192)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0$$

$$48x^3-192=0 \qquad |+192$$

$$48x^3=192 \qquad |:48$$

$$x^3=4 \quad\Rightarrow\quad x_2=\sqrt[3]{4}.$$

Laut Aufgabentext steht bereits fest, dass K_2 zwei Wendepunkte besitzt. Die beiden Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt[3]{4}$ der zweiten Ableitung sind daher auf jeden Fall die gesuchten Wendestellen, der schwierige Nachweis mit der dritten Ableitung entfällt.

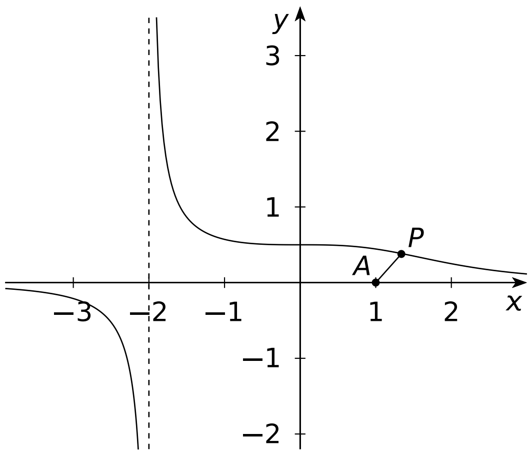
Für die y-Werte von f_2 an den Wendestellen gilt zuletzt:

$y_1 = f_2(0) = \dfrac{4}{0^2+8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ und $y_2 = f_2(\sqrt[3]{4}) = \dfrac{4}{(\sqrt[3]{4})^3+8} = \dfrac{4}{4+8} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

Die Wendepunkte von K_2 sind also $W_1\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$ und $W_2\left(\sqrt[3]{4} \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$.

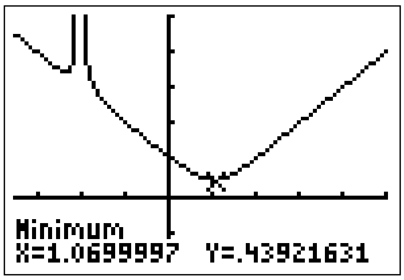
▶ Bestimmung des Punktes auf K_2 mit kleinstem Abstand zu $A(1|0)$

Da der Punkt $P(u|v)$ auf dem Schaubild K_2 liegt, gilt $v = f_2(u)$, also $P(u|f_2(u))$. Gesucht ist nun der u-Wert, für den P den kleinsten Abstand zum festen Punkt $A(1|0)$ hat, welcher nicht auf K_2 liegt. Für diesen Abstand d gilt nach der allgemeinen Formel:



$$d(u) = \sqrt{(u-1)^2 + (f_2(u)-0)^2}$$
$$= \sqrt{(u-1)^2 + \left(\frac{4}{u^3+8}\right)^2}.$$

Diese Abstandsfunktion d in Abhängigkeit von u wird nun im GRAPH-Menü des GTR gezeichnet. Mithilfe der Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → 3: minimum` bestimmen wir dann das Minimum von d, es beträgt etwa 0,44 und liegt an der Stelle $u \approx 1{,}07$.



Gesucht ist jedoch der Punkt $P(1{,}07|f_2(1{,}07))$ auf K_2, der diesen minimalen Abstand von A besitzt. Mit

$$f_2(1{,}07) = \frac{4}{1{,}07^3+8} \approx 0{,}43$$

lauten seine vollständigen Koordinaten näherungsweise $P(1{,}07|0{,}43)$.

b) **▶ Nachweis, dass K_2 keine gemeinsame Punkte mit anderen K_a besitzt** (5VP)

Wenn K_2 und K_a gemeinsame Punkte hätten, müsste es Stellen x geben, an denen $f_2(x) = f_a(x)$ gilt. Gleichsetzen ergibt:

$$f_2(x) = f_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{x^3+8} = \frac{4}{x^3+4a} \qquad |\cdot(x^3+4a) \quad |\cdot(x^3+8)$$
$$4(x^3+4a) = 4(x^3+8)$$
$$4x^3+16a = 4x^3+32 \qquad |-4x^3$$
$$16a = 32.$$

Diese Gleichung wäre allerdings nur erfüllt, wenn $a = 2$ wäre. Da jedoch von *anderen* Schaubildern K_a als K_2 die Rede war, muss $a \neq 2$ sein. Die Gleichung hat daher keine Lösung und K_2 und K_a keine gemeinsamen Punkte.

▶ Bestimmung des Punktes Q_a auf K_a mit waagrechter Tangente

Wenn K_a im Punkt $Q_a(x\,|\,f_a(x))$ eine waagrechte Tangente besitzen soll, muss an dieser Stelle $f_a'(x) = 0$ gelten. Die erste Ableitung von f_a ergibt sich dabei mithilfe der Quotientenregel:

$$f_a'(x) = \frac{0 \cdot (x^3 + 4a) - 4 \cdot 3x^2}{(x^3+4a)^2} = \frac{-12x^2}{(x^3+4a)^2}.$$

Aus der Bedingung $f_a'(x) = 0$ folgt nun:

$$f_a'(x) = \frac{-12x^2}{(x^3+4a)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -12x^2 &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Der Punkt Q_a liegt also an der Stelle $x = 0$ und es gilt $Q_a(0\,|\,f_a(0))$.

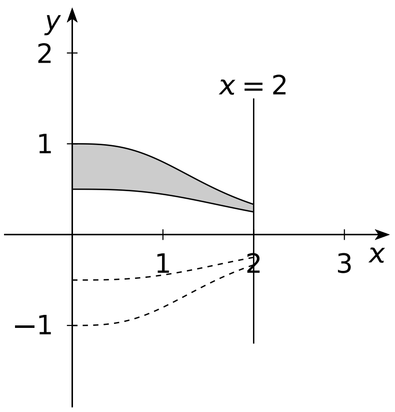
Mit $f_a(0) = \dfrac{4}{0^3 + 4a} = \dfrac{4}{4a} = \dfrac{1}{a}$ lauten seine vollständigen Koordinaten $Q_a\left(0\,\middle|\,\dfrac{1}{a}\right)$.

▶ Wo liegen alle Punkte Q_a?

Da die x-Koordinate aller Punkte Q_a gleich Null ist, liegen die Punkte allesamt auf der y-Achse. Sie nehmen dabei wegen $y = a^{-1} \neq 0$ alle y-Werte bis auf $y = 0$ ein.

c) **▶ Berechnung der Düsenmasse** (6VP)

Die Düse wird durch einen Rotationskörper festgelegt, der bei Rotation einer Schnittfläche um die x-Achse entsteht. Die Schnittfläche entspricht der Fläche zwischen K_1 und K_2 im Bereich von $x = 0$ (y-Achse) und $x = 2$. K_1 ist dabei der obere Graph, denn der Schnittpunkt $Q_1(0\,|\,1)$ aus K_1 mit der y-Achse (aus Teilaufgabe b bekannt) liegt über dem Schnittpunkt $Q_2(0\,|\,0{,}5)$ von K_2 mit der y-Achse.

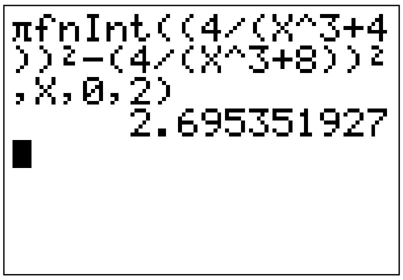


Für das Volumen der Düse gilt dann zunächst:

$$V = \pi \cdot \int_0^2 \left((f_1(x))^2 - (f_2(x))^2 \right) \mathrm{d}x.$$

(Hinweis: Das ist **nicht** dasselbe wie $V = \displaystyle\int_0^2 (f_1(x) - f_2(x))^2 \,\mathrm{d}x$!)

Das Integral wird nun mit dem GTR mit dem Befehl `MATH → 9: fnInt` wie nebenstehend berechnet. Es ergibt sich: Die Düse hat ein Volumen von etwa 2,7 cm^3.



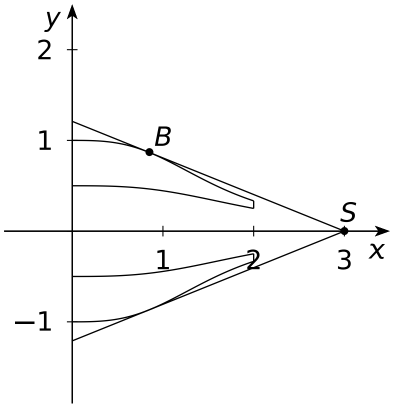
Die gesuchte Masse der Düse ergibt sich nun, indem die angegebene Dichte von 4,5 g/cm^2 mit diesem Volumen multipliziert wird. Dabei musss das exakte Volumen aus dem GTR weiterverwendet werden:

$m \approx 2{,}7\,\text{cm}^3 \cdot 4{,}5\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 12{,}13$ g.

Die Düse hat eine Masse von etwa 12,13 Gramm.

► Berechnung des Mindestradius des Kegelgrundkreises

Da der Kegel, aus dem die Düse, die x-Achse als Rotationsachse aufweist und die Höhe $h = 3$ hat, liegt seine Spitze im Querschnitt im Punkt $S(3\,|\,0)$, sein Grundkreis auf der y-Achse.



Der Kegel wird minimal, wenn seine äußere Begrenzungslinie durch die **Tangente** an den oberen Graphen K_1 durch die Spitze $S(3\,|\,0)$ beschrieben wird. Der Grundkreisradius entspricht dann dem y-Achsenabschnitt dieser Tangente.

Zunächst müssen wir also die Tangentengleichung aufstellen. Der Berührpunkt $B(x_0\,|\,f_1(x_0))$ ist unbekannt, daher lautet ihre Gleichung allgemein:

$t\colon y = f_1'(x_0)(x - x_0) + f_1(x_0)$.

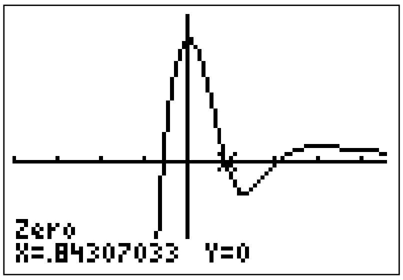
Die Berührstelle ergibt sich aus der Bedingung, dass $S(3\,|\,0)$ auf dieser Tangente liegen soll. Wir können also $x = 3$ und $y = 0$ in die Tangentengleichung einsetzen und erhalten:

$0 = f_1'(x_0)(3 - x_0) + f_1(x_0)$.

Wir setzen weiterhin die Ausdrücke $f_1'(x_0) = \dfrac{-12x_0^2}{(x_0^3+4)^2}$ und $f_1(x_0) = \dfrac{4}{x_0^3+4}$ ein. Es folgt:

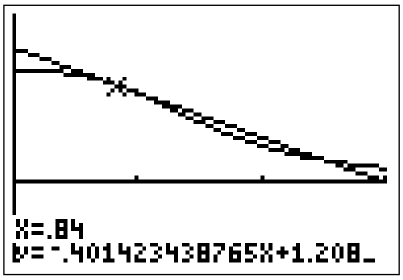
$0 = \dfrac{-12x_0^2}{(x_0^3+4)^2}(3 - x_0) + \dfrac{4}{x_0^3+4}$.

Diese Gleichung können wir beispielsweise graphisch mithilfe des GTR lösen. Dazu geben wir die rechte Seite der Gleichung als Funktion ein und berechnen die **Nullstellen** dieser Funktion. Es ergeben sich die drei Nullstellen $x_1 \approx -0{,}59$, $x_2 \approx 0{,}84$ und $x_3 = 2$.



Die erste Nullstelle entfällt, da die Düse für $0 \le x \le 2$ beschrieben wird. Auch x_3 entfällt, da die Tangente hier im Bereich $0 \le x \le 2$ unterhalb von K_1 liegen würde.

Die gesuchte Lösung ist also $x_2 \approx 0{,}84$. Um die zugehörige Tangentengleichung zu bestimmen, zeichnen wir mit dem GTR das Schaubild K_1 und stellen mit dem Befehl `2nd → PRGM (DRAW) → 5: Tangent(` die Tangente an K_1 an dieser Stelle auf. Es gilt t: $y \approx -0{,}40x + 1{,}21$.



Daraus folgt letztlich:
Der Radius des Grundkreises beträgt mindestens 1,21 cm.

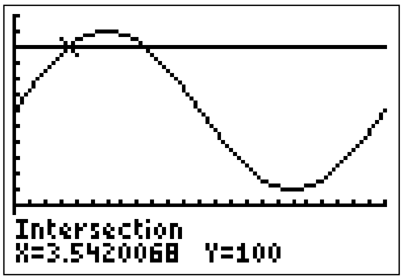
Aufgabe I 2.1

$w(t) = 50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60; \quad 0 \leq t \leq 24$

Stelle Deinen GTR zunächst auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) ▶ **Bestimmung des Zeitraums, in dem die momentane Zuflussrate über 100 m^3/h beträgt** (4VP)

Mit dem GTR können wir die Zeitpunkte bestimmen, an denen die Zuflussrate genau 100 m^3/h beträgt. Dazu zeichnen wir das Schaubild von w sowie die Gerade $y = 100$ und berechnen die Schnittstellen über die Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → 5: intersect`. Die Schnittstellen lauten hier $t_1 \approx 3{,}54$ und $t_2 \approx 8{,}46$.



Wir erkennen, dass die Zuflussrate zwischen diesen Zeitpunkten über 100 m^3/h beträgt. Somit gilt:
Etwa zwischen 3,5 und 8,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Zuflussrate größer als 100 m^3/h.

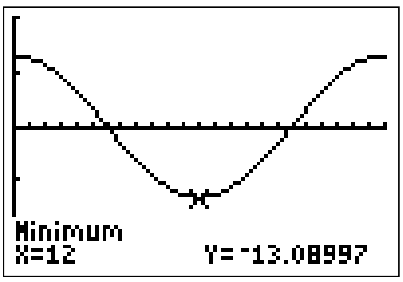
▶ **Bestimmung des Zeitpunkts, an dem die momentane Zuflussrate am stärksten abnimmt**

Eine Zu- oder Abnahme der momentanen Zuflussrate (also eine „Änderungsrate der Änderungsrate“) wird durch die **erste Ableitung** von w beschrieben. Für sie gilt nach der Kettenregel:

$$w'(t) = 50 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{25}{6}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right).$$

Die stärkste Abnahme findet nun zu dem Zeitpunkt statt, an dem w' ein **negatives Minimum** hat. Dass das Minimum negativ sein muss, ist wichtig, da sonst nicht von einer **Abnahme** ausgegangen werden kann.

Dazu zeichnen wir den Graphen von w' im GRAPH-Menü des GTRs und bestimmen über die Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → 3: minimum` das Minimum von w' für $0 \leq t \leq 24$. Es liegt an der Stelle $t = 12$ und ist tatsächlich negativ.
Die momentane Zuflussrate nimmt also 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.



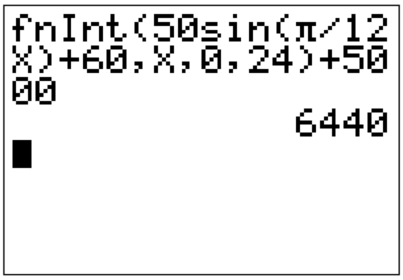
b) ▸ **Bestimmung der Wassermenge nach 24 Stunden** (5VP)

Da die Funktion w die momentane Zuflussrate des Wassers beschreibt, erhalten wir die aktuelle Wassermenge durch **Integration** von w, hier von $t=0$ bis $t=24$ Stunden. Hinzu kommt die zu Beobachtungsbeginn bereits vorhandene Wassermenge von $V_0 = 5000\ \text{m}^3$ Wasser:

$$V(24) = \int_0^{24} w(t)\,\mathrm{d}t + V_0 = \int_0^{24} \left(50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60\right) \mathrm{d}t + 5000.$$

Das Integral auf der rechten Seite wird über die Befehlsfolge $\boxed{\texttt{MATH} \rightarrow \texttt{9: fnInt}}$ mit dem GTR berechnet.

Nach 24 Stunden befinden sich exakt $6440\ \text{m}^3$ Wasser im Becken.



▸ **Ermittlung eines integralfreien Terms für die Wassermenge zum Zeitpunkt *t***

Der Ausdruck von oben beschreibt auch zu einem beliebigen Zeitpunkt t die im Becken enthaltene Wassermenge. Durch t ist nun die obere Grenze des Integrals festgelegt. Die Funktion w wird über die umgekehrte Kettenregel (lineare Substitution) integriert, sodass wir erhalten:

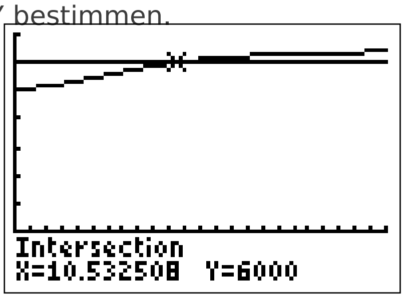
$$\begin{aligned}
V(t) &= \int_0^{t} w(t)\,\mathrm{d}t + 5000 = \int_0^{t} \left(50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60\right) \mathrm{d}t + 5000 \\
&= \left[50 \cdot \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{12}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) + 60t\right]_0^t + 5000 = \left[-\frac{600}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60t\right]_0^t + 5000 \\
&= \left(-\frac{600}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60t\right) - \left(-\frac{600}{\pi} \cdot \cos 0 + 0\right) + 5000 \\
&= -\frac{600}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60t + \frac{600}{\pi} + 5000 \\
&= \frac{600}{\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right] + 60t + 5000.
\end{aligned}$$

▸ **Bestimmung des Zeitpunkts, zu dem 6000 m^3 Wasser im Becken sind**

Der gesuchte Zeitpunkt, zu dem $6000\ \text{m}^3$ Wasser im Becken sind, lässt sich mithilfe des GTR und der eben berechneten Volumenfunktion V bestimmen.

Dazu zeichnen wir das Schaubild der Funktion V in Abhängigkeit von t und schneiden dieses über die Befehlsfolge $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{TRACE (CALC)} \rightarrow \texttt{5: intersect}}$ mit der Geraden $y = 6000$. Dies ergibt die Schnittstelle $t \approx 10{,}5$.

Das Becken war also etwa 10,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn mit $6000\ \text{m}^3$ Wasser gefüllt.



Aufgabe I 2.2

$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a; \quad x \in \mathbb{R}$

a) ▸ **Bestimmung der Koordinaten des Hochpunkts H_a** (4VP)

Der Hochpunkt H_a ergibt sich der notwendigen Bedingung $f_a'(x) = 0$. Für die ersten beiden Ableitungen von f_a gilt dabei zunächst:

$$f_a'(x) = a \cdot \cos(ax) \cdot a = a^2 \cdot \cos(ax);$$
$$f_a''(x) = a^2 \cdot (-\sin(ax)) \cdot a = -a^3 \cdot \sin(ax).$$

Mögliche Extremstellen ergeben sich nun aus der notwendigen Bedingung $f_a'(x) = 0$:

$$f_a'(x) = \underbrace{a^2}_{\neq 0} \cdot \cos(ax) \overset{!}{=} 0$$
$$\cos(ax) = 0$$
$$ax = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2a}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Im betrachteten Bereich $0 \leq x < p_a$ innerhalb einer Periode von f_a reicht es, nur die ersten beiden positiven Lösungen (also für $k = 1$ und $k = 2$) zu betrachten, da eine davon auf jeden Fall einer Maximumsstelle und die andere einer Minimumsstelle entspricht. Wir betrachten also $x_1 = \frac{\pi}{2a}$ und $x_2 = \frac{3\pi}{2a}$ und erhalten durch Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$f_a''\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a^3 \cdot 1 = -a^3 < 0;$$
$$f_a''\left(\frac{3\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{3\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a^3 \cdot (-1) = a^3 > 0.$$

Somit liegt an der Stelle $x_1 = \frac{\pi}{2a}$ der gesuchte Hochpunkt H_a vor. Mit der y-Koordinate

$$y_H = f_a\left(\frac{\pi}{2a}\right) = a \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{2a}\right) + a = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + a = a \cdot 1 + a = 2a$$

lauten seine vollständigen Koordinaten $H_a\left(\frac{\pi}{2a} \middle| 2a\right)$.

▸ **Ermittlung einer Gleichung der Kurve, auf der alle Hochpunkte liegen**

Gesucht ist nun die sogenannte **Ortskurve** der Hochpunkte H_a, also die Kurve, auf der alle Hochpunkte liegen. Um ihre Gleichung zu ermitteln, eliminieren wir den Parameter a aus den Koordinaten von H_a. Dazu überlegen wir folgendes:

Die Hochpunkte H_a haben die x-Koordinate $x = \frac{\pi}{2a}$ (*) und die y-Koordinate $y = 2a$.

Auflösen der x-Koordinate nach a ergibt $a = \frac{\pi}{2x}$.

Setzen wir nun diesen Wert für a in die y-Koordinate ein, so ergibt sich $y = 2 \cdot \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{x}$.

Wegen $a > 0$ ist allerdings durch die Beziehung (*) auch stets $x > 0$. Die Ortskurve o hat also die Gleichung

$$o: y = \frac{\pi}{x}; \quad x > 0.$$

b) **► Angabe der Koordinaten des Wendepunkts mit kleinstem positiven x-Wert** (5VP)

Bei einer Sinuskurve liegen die Wendepunkte immer genau zwischen einem Hoch- und einem Tiefpunkt. Nach Teilaufgabe a sind gerade

$$x_1 = \frac{\pi}{2a} \text{ und } x_2 = \frac{3\pi}{2a}$$

solche Extremstellen. Die gesuchte Wendestelle x_W liegt also genau zwischen diesen Stellen:

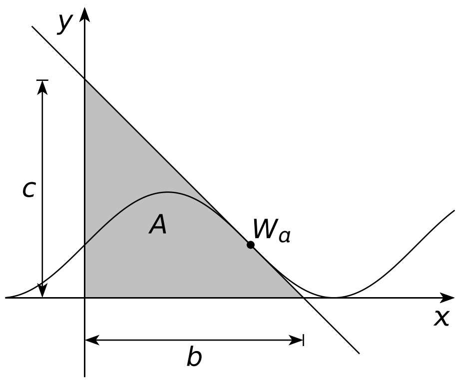
$$x_W = \frac{\frac{\pi}{2a} + \frac{3\pi}{2a}}{2} = \frac{\frac{4\pi}{2a}}{2} = \frac{4\pi}{4a} = \frac{\pi}{a}.$$

Da x_1 und x_2 die ersten Extremstellen sind, ist x_W damit auch die erste (kleinste) x-Stelle, an der ein solcher Wendepunkt liegt. Die y-Koordinate an dieser Stelle beträgt dabei jeweils

$$y_W = f_a\left(\frac{\pi}{a}\right) = a \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{a}\right) + a = a \cdot \sin \pi + a = a \cdot 0 + a = a.$$

Der Wendepunkt W_a mit kleinstem positiven x-Wert lautet also $W_a\left(\frac{\pi}{a} \middle| a\right)$.

► Nachweis, dass der Inhalt der eingeschlossenen Fläche von a unabhängig ist



Die Wendetangente t_a in W_a schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Um dessen Inhalt zu berechnen, stellen wir zunächst die Gleichung der Wendetangente mithilfe der allgemeinen Tangentengleichung auf:

$$t_a\colon y = f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(x - \frac{\pi}{a}\right) + f_a\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

$$y = a^2 \cdot \cos\left(a \cdot \frac{\pi}{a}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{a}\right) + a$$

$$y = a^2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cdot \left(x - \frac{\pi}{a}\right) + a$$

$$y = -a^2 \cdot x + a \cdot \pi + a.$$

Anhand der obigen Skizze ist erkennbar, dass die Kathetenlängen des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks zum Einen durch die Nullstelle von t_a, zum Anderen durch deren y-Achsenabschnitt festgelegt wird.

Die Nullstelle ist dabei diejenige Stelle, an der $y = 0$ gilt:

$$0 = -a^2 \cdot x + a\pi + a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 x = a\pi + a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a\pi + a}{a^2} = \frac{\pi + 1}{a}.$$

Dies ist auch gerade die Länge b der ersten Kathete.

Die zweite Kathetenlänge c wird durch den y-Achsenabschnitt von t_a festgelegt also gilt zum Anderen $c = a\pi + a = a(\pi + 1)$.

Für den Inhalt A des eingeschlossenen Rechtecks erhalten wir letztlich:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi + 1}{a} \cdot a(\pi + 1) = \frac{1}{2}(\pi + 1)^2.$$

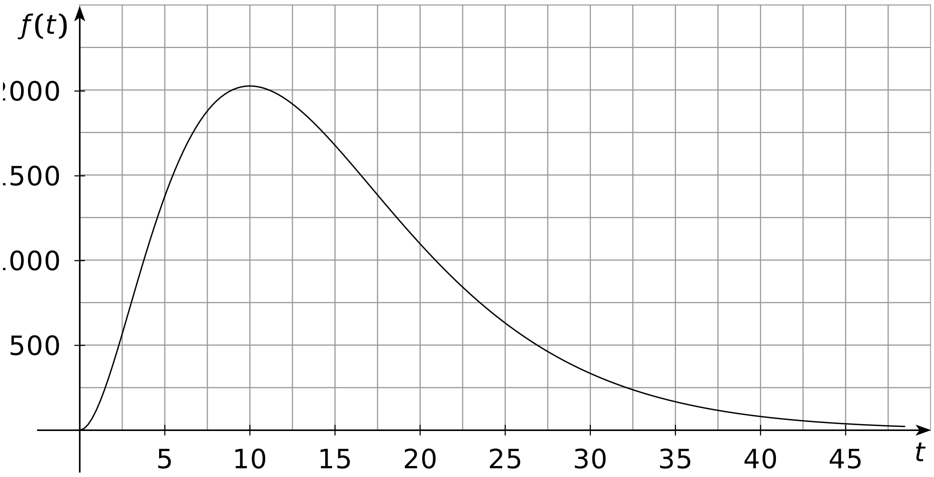
Dieser Flächeninhalt ist völlig unabhängig vom Parameter a. Der geforderte Nachweis ist damit erbracht.

Aufgabe I 3

$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t}; \quad t \geq 0$

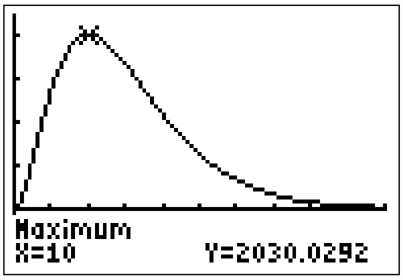
a) ▶ **Skizze des Schaubilds von *f*** (6VP)

Das untenstehende Schaubild ergibt sich mithilfe einer geeigneten Wertetabelle des GTR.



▶ **Bestimmung des Zeitpunkts, an dem die meisten Personen erkranken**

Der Zeitpunkt, an dem die meisten Personen erkranken, entspricht der **Maximumsstelle** von f.
Um diese Stelle zu finden wird im GRAPH-Menü des GTR das Maximum der Funktion f mithilfe der Befehlsfolge $\boxed{\texttt{2nd} \rightarrow \texttt{TRACE (CALC)} \rightarrow \texttt{4: maximum}}$ berechnet. Es liegt an der Stelle $t = 10$ vor.
Die meisten Personen erkranken also 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn.



▶ **Nachweis, dass die momentane Erkrankungsrate ab diesem Zeitpunkt rückläufig ist**

Die momentane Erkrankungsrate ist ab diesem Zeitpunkt ($t = 10$) rückläufig, wenn f ab dann monoton fallend ist, also wenn $f'(t) \leq 0$ für $t \geq 10$ ist.

Für die erste Ableitung von f gilt dabei zunächst nach Produkt- und Kettenregel:

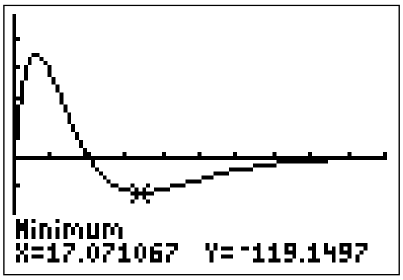
$$f'(t) = 150 \cdot 2t \cdot e^{-0,2t} + 150t^2 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = e^{-0,2t}(300t - 30t^2).$$

Beachten wir, dass $e^{-0,2t}$ stets positiv ist, erhalten wir aus der Bedingung $f'(t) \leq 0$:

$$\begin{aligned} f'(t) = \underbrace{e^{-0,2t}}_{>0} \cdot (300t - 30t^2) &\leq 0 \\ 300t - 30t^2 &\leq 0 && \mid : t > 0 \\ 300 - 30t &\leq 0 && \mid +30t \\ 300 &\leq 30t && \mid : 30 \\ 10 &\leq t. \end{aligned}$$

Damit ist tatsächlich $f'(t) \leq 0$ für $t \geq 10$, die momentane Erkrankungsrate also rückläufig.

▸ Zeitpunkt der stärksten Abnahme

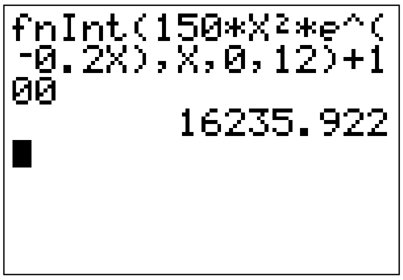


Eine Zu- oder Abnahme der Erkrankungsrate $f(t)$ wird durch deren **erste Ableitung** beschrieben. Die stärkste Abnahme entspricht einem negativen Minimum von f'.
Über `2nd → TRACE (CALC) → 3: minimum` wird dieses Minimum im GRAPH-Menü des GTR berechnet.
Es ergibt sich ein Minimum an der Stelle $t \approx 17{,}1$. Das bedeutet:

Die stärkste Abnahme der Erkrankungsrate erfolgt 17 Wochen nach Beobachtungsbeginn.

b) **▸ Bestimmung der Meldungsanzahl nach 12 Wochen** (6VP)

Da die Funktion f die momentane Erkrankungs**rate**, also eine Änderungsrate der Erkrankungsanzahl beschreibt, erhalten wir die Anzahl A der Erkrankungen durch **Integration** von f. Die Meldungszahl nach 12 Wochen wird also durch das Integral über f von $t = 0$ (Beginn) bis $t = 12$ Wochen beschrieben, hinzu kommen die 100 Personen, die Bereits zu Beginn erkrankt waren:



$$A(12) = \int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t + A_0 = \int_0^{12} 150t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t + 100.$$

Das Integral kann wie nebenstehend mit dem GTR über die Befehlsfolge `MATH → 9: fnInt` berechnet werden.
Nach 12 Wochen waren etwa 16.236 Personen gemeldet.

▸ Angabe einer Funktion für die Meldungsanzahl nach *t* Wochen

Nach t Wochen wird die Meldungsanzahl ebenfalls durch das obige Integral beschrieben, nur bleibt die obere Grenze t variabel.

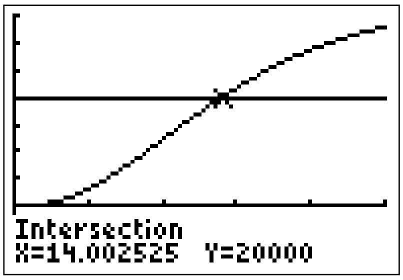
Mit der gegebenen Stammfunktion gilt für das zugehörige Integral dann:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^{t} f(t)\,\mathrm{d}t + A_0 = \int_0^{t} 150t^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t + 100 \\ &= \left[-750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}\right]_0^t + 100 \\ &= \left(-750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}\right) - \left(-750 \cdot (0 + 0 + 50) \cdot \mathrm{e}^{0}\right) + 100 \\ &= -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t} + 37.500 + 100 \\ &= 37.600 - 750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}. \end{aligned}$$

▸ Bestimmung des Zeitpunkts, zu dem 20.000 Personen gemeldet sind

Der gesuchte Zeitpunkt kann ebenfalls mit dem GTR bestimmt werden.

Dazu zeichnen wir das Schaubild der Meldungsanzahl A in Abhängigkeit von t und schneiden dieses im GRAPH-Menü mit der Geraden $y = 20.000$ über die Befehlsfolge `2nd → TRACE (CALC) → 5: intersect`. Dies ergibt die Schnittstelle $t \approx 14$.



Die gesuchte Anzahl von 20.000 Meldungen wurde also etwa 14 Wochen nach Beobachtungsbeginn erreicht.

▶ Nachweis, dass die Anzahl der Meldungen unter 40.000 bleiben wird

Wir untersuchen, gegen welchen Wert die Meldungsanzahl $A(t)$ auf lange Sicht hin streben wird. Dazu bilden wir den **Grenzwert** von $A(t)$ für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left[37.600 - 750\cdot(t^2+10t+50)\cdot \underbrace{e^{-0,2t}}_{\to 0}\right] = 37.600.$$

Die e-Funktion bestimmt im Vergleich zur ganzrationalen Funktion $p\colon t \mapsto t^2+10t+50$ das Verhalten der Funktion. Die Meldungsanzahl strebt also auf lange Sicht von 100 gegen den Wert 37.600 und bleibt daher stets unter 40.000.

c) **▶ Angabe einer zugehörigen Differenzialgleichung** (6VP)

In der nun betrachteten Stadt gibt es 30.000 Einwohner, das bedeutet, dass die Anzahl der erkrankten Personen in dieser Stadt durch die obere Schranke $S = 30.000$ begrenzt ist.

Wenn nun B die Anzahl der zum Zeitpunkt t erkrankten Personen ist, beschreibt $B'(t)$ die momentane Erkrankungs**rate** in dieser Stadt. Diese Erkrankungsrate soll proportional zur Anzahl der **bisher noch nicht** von der Krankheit erfassten Einwohner sein. Da $B(t)$ die Anzahl der erkrankten Einwohner ist, sind entsprechend $30.000 - B(t)$ Einwohner noch nicht erkrankt.

Mit dem Proportionalitätsfaktor $k = 0,1$ gilt also die folgende Differenzialgleichung:

$$B'(t) = 0,1\cdot(30.000 - B(t)).$$

▶ Bestimmung einer Funktion, die die Anzahl der erkrankten Personen beschreibt

Durch eine Differenzialgleichung der Form $B'(t) = k\cdot(S - B(t))$ wird eine Wachstumsfunktion vom Typ des **beschränkten Wachstums** beschrieben. Die Lösungsfunktion ist allgemein B mit

$$B(t) = S - c\cdot e^{-kt}.$$

In unserem Beispiel sind bereits die Schranke S mit $S = 30.000$ sowie der Proportionalitätsfaktor $k = 0,1$ bekannt, es fehlt lediglich der Wert des Parameters c. Ihn können wir aus der Bedingung berechnen, dass bereits zu Beobachtungsbeginn die Hälfte der Bewohner erkrankt ist, es ist also $B(0) = 15.000$:

$$\begin{aligned} B(0) = 30.000 - c\cdot e^{-k\cdot 0} &\overset{!}{=} 15.000 \qquad | \; e^0 = 1\\ 30.000 - c &= 15.000\\ c &= 15.000. \end{aligned}$$

Die Lösungsfunktion für diese beschränkte Wachstum ist also die Funktion B mit

$$B(t) = 30.000 - 15.000\cdot e^{-0,1t}; \quad t \geq 0.$$

▶ Berechnung der erkrankten Personen nach 4 Wochen

Die Anzahl B der nach $t = 4$ Wochen erkrankten Personen beträgt hier

$B(4) = 30.000 - 15.000 \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 4} \approx 19.945.$

▶ Anpassung der Funktion an die tatsächliche Funktion

Durch die Stadt mit 30.000 Einwohnern und die Bedingung, dass $B(0) = 15.000$ gilt, sind die Parameter S und c in der Lösungsfunktion durch die äußeren Bedingungen festgelegt und können nicht verändert werden. Eine Anpassung der Funktion ist daher nur möglich, indem wir den Proportionalitätsfaktor k verändern. Aus der Bedingung, dass nach $t = 4$ Wochen 22.000 Personen erkrankt sind, erhalten wir mit einem neuen k:

$$\begin{aligned} B(4) = 30.000 - 15.000 \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot 4} &\overset{!}{=} 22.000 && \mid -30.000 \quad \mid \cdot(-1) \\ 15.000 \cdot \mathrm{e}^{-4k} &= 8.000 && \mid : 15.000 \\ \mathrm{e}^{-4k} &= \frac{8.000}{15.000} = \frac{8}{15} && \mid \ln(\ldots) \\ -4k &= \ln\frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln\frac{8}{15}}{-4} \approx 0,1572. \end{aligned}$$

Die Funktion hat also in der Realität die Gestalt

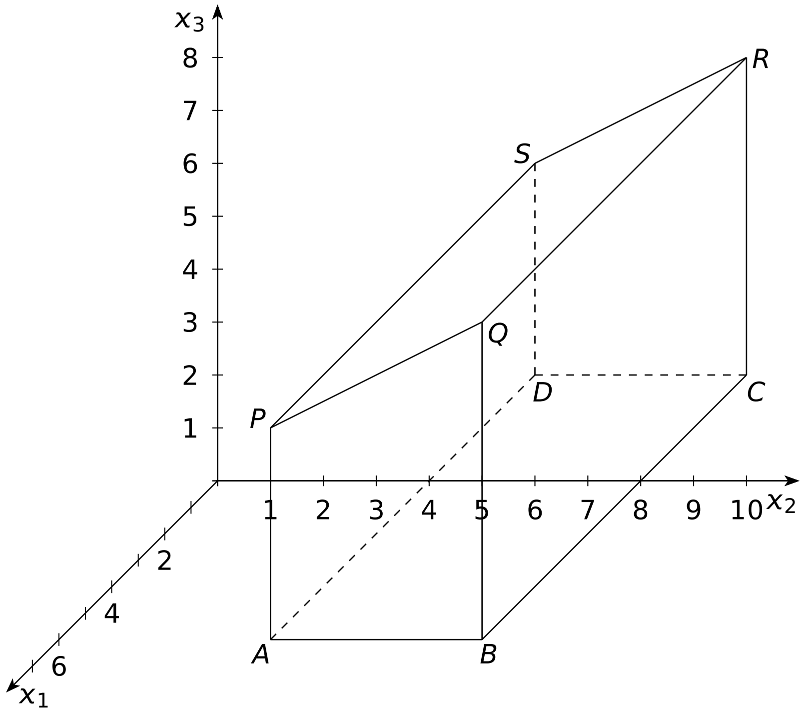
$B(t) = 30.000 - 15.000 \cdot \mathrm{e}^{-0,1572t}; \quad t \geq 0.$

Wahlteil II

Aufgabe II 1

$A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$, $S(-4|4|4)$

a) ▶ **Darstellung der Truhe in einem Koordinatensystem** (5VP)



▶ **Berechnung des Truhenvolumens**

Die Truhe stellt ein Prisma dar, deren Grundfläche das Trapez $ABQP$ und deren Höhe die Länge der Strecke $\overline{BC}$ ist.

Das Trapez $ABQP$ hat wiederum die Grundseiten $a = \overline{AP}$ und $b = \overline{BQ}$ und die Höhe $h_T = \overline{AB}$. Die Längen dieser Strecken berechnen sich über die Beträge der entsprechenden Vektoren:

$$a = \overline{AP} = |\overrightarrow{AP}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+4^2} = 4;$$

$$b = \overline{BQ} = |\overrightarrow{BQ}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+6^2} = 6;$$

$$h_T = \overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+4^2+0^2} = 4.$$

Für den Inhalt G des Grundflächentrapezes gilt also:

$$G = \frac{a+c}{2} \cdot h_T = \frac{4+6}{2} \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ FE}.$$

Die Höhe h des gesamten Prismas wird durch $\overline{BC}$ festgelegt:

$$h = \overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-10)^2+0^2+0^2} = 10 \text{ LE.}$$

Für das Volumen des Prismas (und damit das Volumen der Truhe) gilt also:

$V = G \cdot h = 20 \cdot 10 = 200$ VE.

▸ Bestimmung einer Koordinatengleichung der Deckelebene

Der Deckel liegt in einer Ebene, die durch die Punkte P, Q und R eindeutig festgelegt wird. Für diese Ebene gilt zunächst in Parameterform:

$$E_{\text{Deckel}}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-10\\4\\2\end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor ergibt sich nun aus dem **Kreuzprodukt** (Vektorprodukt) der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$, die zuvor noch mit 2 gekürzt werden können:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1 - 1\cdot 2\\ 1\cdot(-5) - 0\cdot 1\\ 0\cdot 2 - 2\cdot(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Im letzten Schritt wurde hierbei mit -5 gekürzt.

Ein Ansatz für die Koordinatengleichung lautet daher $E_{\text{Deckel}}\colon x_2 - 2x_3 = d$.

Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, werden die Koordinaten eines beliebigen Ebenenpunktes, z.B. von $P(6\,|\,4\,|\,4)$ in die Koordinatengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} P(6\,|\,4\,|\,4) \text{ in } E\colon\quad 4 - 2\cdot 4 &= d\\ d &= -4. \end{aligned}$$

Die Deckelebene hat also die Gleichung $E_{\text{Deckel}}\colon x_2 - 2x_3 = -4$.

b) **▸ Nachweis, dass die Deckelebene zur Ebenenschar E_a gehört** (7VP)

Durch den Vergleich der Ebenengleichung $E_{\text{Deckel}}\colon x_2 - 2x_3 = -4$ und $E_a\colon x_2 - ax_3 = 8 - 6a$ ergibt sich durch Vergleich der linken Seiten, dass $a = 2$ sein müsste.

Die Scharebene $E_2\colon x_2 - 2x_3 = -4$ hat nun dieselbe Gleichung wie E_{Deckel}, die Deckelebene gehört der Schar also für $a = 2$ an.

▸ Nachweis, dass die Rückwandebene zur Ebenenschar E_a gehört

Wenn die Rückwand $BCRQ$ in einer Scharebene liegt, müssen alle Punkte die zugehörige Ebenengleichung erfüllen. Wir setzen zunächst beispielsweise $B(6\,|\,8\,|\,0)$ in die Gleichung von E_a ein und erhalten:

$$\begin{aligned} B \text{ in } E_a\colon\quad 8 - a\cdot 0 &= 8 - 6a\\ -6a &= 0\\ a &= 0. \end{aligned}$$

B liegt also in der Scharebene $E_0\colon x_2 = 8$. Da C, R und Q allesamt die x_2-Koordinate $x_2 = 8$ besitzen, erfüllen sie auch diese Gleichung. Die komplette Rückwand liegt also in einer Ebene, die der Ebenenschar E_a für $a = 0$ angehört.

▸ Nachweis, dass es eine Gerade gibt, die in allen Scharebenen liegt

Da die Punkte Q und R sowohl in der Deckelebene E_2 als auch in der Rückwandebene E_0 liegen, können wir vermuten, dass die Gerade $g = QR$ die Schnittgerade aller Scharebene E_a ist. Für g gilt die Gleichung

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t\cdot\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}6\\8\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Setzen wir nun g in die Ebenengleichung von E_a ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} g \text{ in } E_a\colon \quad (8+0t)-a(6+0t) &= 8-6a \\ 8-6a &= 8-6a. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für alle a- und alle t-Werte erfüllt. Die Gerade g liegt also in allen Ebenen der Ebenenschar E_a.

▸ Berechnung des Schnittwinkels von E_0 und E_2

Der Schnittwinkel φ der Scharebenen E_0 und E_2 ergibt sich mithilfe der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_0$ und $\vec{n}_2$ dieser Scharebenen. Es gilt:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_0\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_0|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|0+1+0|}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0{,}4472,$$

und damit $\varphi \approx 63{,}4^\circ$.

▸ Bestimmung der Scharebene, die mit E_2 auch den Winkel φ einschließt

Wenn die Scharebene E_a mit dem Normalenvektor $\vec{n}_a$ mit E_2 ebenfalls den Winkel φ einschließt, muss auch hier gelten:

$$\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{|\vec{n}_a\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_a|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0^2+1^2+(-a)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}} &\overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{|0+1+2a|}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} && |\cdot\sqrt{5} \\ \frac{|1+2a|}{\sqrt{a^2+1}} &= 1 && |\cdot\sqrt{a^2+1} \\ |1+2a| &= \sqrt{a^2+1} && |\ (\ldots)^2 \\ 1+4a+4a^2 &= a^2+1 && |-1 \quad |-a^2 \\ 3a^2+4a &= 0. \end{aligned}$$

Durch Ausklammern erhalten wir hier $a(3a+4) = 0$, woraus sich die beiden Lösungen $a_1 = 0$ und $a_2 = -4/3$ ergeben. Dass E_2 mit der Ebene E_0 den Winkel φ einschließt wissen wir bereits.

Die zweite gesuchte Ebene, mit der E_2 den Winkel φ einschließt, ist also $E_{-\frac{4}{3}}\colon x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 16$.

c) ▶ **Bestimmung der Ebene, in der der Deckel nach Drehung liegt** (4VP)

Der geschlossene Deckel liegt nach Teilaufgabe b in der Scharebene E_2. Der um 90° geöffnete Deckel liegt in einer Scharbene E_a, die senkrecht zu E_2 verläuft. Das Skalarprodukt des Normalenvektors von E_2 und von E_a muss dann gleich Null sein:

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 0 + 1 + 2a = 0$$
$$2a = -1$$
$$a = -0{,}5.$$

Der geöffnete Deckel liegt also in der Scharebene $E_{-\frac{1}{2}}: x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 11$.

▶ **Bestimmung der Koordinaten des Drehpunktes P^***

Die Kante $\overline{PQ}$ hatte vor der Drehung die Länge

$$\overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Die Länge dieser Strecke bleibt auch nach der Drehung erhalten. Wir erreichen den Drehpunkt P^* also, indem wir von Q aus $\sqrt{20}$ Einheiten senkrecht zur ursprünglichen Deckelebene $E_{\text{Deckel}} = E_2$ — also entlang ihres Normalenvektors — wandern.

Dazu normieren wir den Normalenvektor $\vec{n}_2$ von E_2 auf die Länge 1:

$$\vec{n}_2^{\,0} = \frac{1}{|\vec{n}_2|} \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Durch die Normierung haben wir den Vorteil, dass der Vektor $\sqrt{20} \cdot \vec{n}_2^{\,0}$ nun genau die benötigte Länge von 20 hat. Für den Ortsvektor von P^* gilt mit unseren bisherigen Überlegungen also:

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OQ} \pm \sqrt{20} \cdot \vec{n}_2^{\,0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \sqrt{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{20}{5}}}_{=\sqrt{4}=2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt P^* kommen also von vorneherein zwei Lösungen in Frage (eine +-Lösung und eine −-Lösung), da wir nicht wissen, ob wir in die Richtung von $\vec{n}_a$ oder in die entgegengesetzte Richtung von $-\vec{n}_a$ wandern müssen. Die Lösungen lauten

$$\overrightarrow{OP_1^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1^*(6\,|\,10\,|\,2) \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OP_2^*} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2^*(6\,|\,6\,|\,10).$$

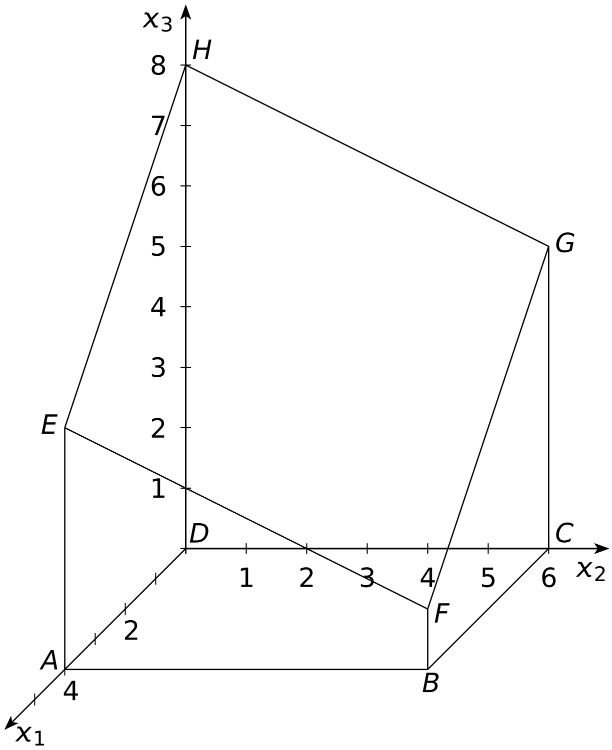
Da der Deckel um 90° nach oben geöffnet wird, muss der Drehpunkt P^* höher als der ursprüngliche Punkt $P(6\,|\,4\,|\,4)$ liegen, also eine größere x_3-Koordinate besitzen. Daher ist P_2^* die richtige Lösung.

Der Drehpunkt hat die Koordinaten $P^*(6\,|\,6\,|\,10)$.

Aufgabe II 2

$A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$, $D(0|0|0)$, $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$, $H(0|0|8)$

a) ► **Darstellung des Gebäudes in einem Koordinatensystem** (8VP)



► **Bestimmung einer Koordinatengleichung der Dachebene**

Die Dachebene E_{Dach} wird durch drei Dachpunkte, also beispielsweise E, F und G eindeutig festgelegt. Für sie gilt in Parameterform:

$$E_{\text{Dach}}\colon \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r\cdot\overrightarrow{EF} + s\cdot\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix};\quad r,s\in\mathbb{R}.$$

Einen Normalenvektor von E_{Dach} können wir über das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) der beiden Spannvektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EG}$ berechnen, wobei $\overrightarrow{EF}$ zuvor noch mit 3 gekürzt wird:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot1-(-1)\cdot6\\-1\cdot(-4)-0\cdot1\\0\cdot6-2\cdot(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\\8\end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Im letzten Schritt wurde hierbei mit 4 gekürzt.

Als Ansatz für die Koordinatengleichung ergibt sich nun $E_{\text{Dach}}\colon 2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$. Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, setzen wir die Koordinaten eines beliebigen Ebenenpunktes, z.B. von $E(4|0|4)$ in diese Gleichung ein und erhalten:

$$E \text{ in } E_{\text{Dach}}\colon\quad 2\cdot4+0+2\cdot4 = d$$
$$d = 16.$$

Die Dachfläche liegt also in der Ebene $E_{\text{Dach}}\colon 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$.

▶ Bestimmung des Neigungswinkels der Dachfläche

Der Neigungswinkel α entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Dachflächenebene E_{Dach} und der Grundflächenebene (x_1-x_2-Ebene).

Letztere Ebene besitzt den Richtungsvektor $\vec{e}_3$ der x_3-Achse als Normalenvektor. Daher gilt:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\text{Dach}} \cdot \vec{e}_3|}{|\vec{n}_{\text{Dach}}| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{|0+0+2|}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3},$$

und damit $\alpha \approx 48{,}2^\circ$.

▶ Nachweis, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist

Die Dachfläche ist ein Parallelogramm, wenn die Seiten $\overline{EF}$ und $\overline{HG}$ bzw. $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ parallel und gleich lang sind. Dies ist jedoch gerade der Fall, wenn die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{HG}$ bzw. $\overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{FG}$ identisch sind. Wegen

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$$

ist dies gerade der Fall, die Dachfläche ist also ein Parallelogramm.

▶ Berechnung des Dachflächeninhalts

Die Dachfläche beschreibt, wie bereits gezeigt, ein Parallelogramm. Im Modell wird dieses Parallelogramm z.B. durch die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{EH}$ aufgespannt. Sein Flächeninhalt lässt sich so leicht mithilfe des Kreuzprodukts berechnen:

$$A = |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6 \cdot 4 - (-3) \cdot 0\\-3 \cdot (-4) - 0 \cdot 4\\0 \cdot 0 - 6 \cdot (-4)\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}24\\12\\24\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{24^2+12^2+24^2} = \sqrt{1.296} = 36\ \text{m}^2.$$

Die Dachfläche hat einen Inhalt von exakt 36 Quadratmetern.

b) ### ▶ Bestimmung des gesuchten d-Wertes (4VP)

Die Lampe im Punkt $L(d\,|\,d\,|\,d)$ befindet sich über der Grundfläche auf der Höhe d (Betrag der x_3-Koordinate). Von der Dachfläche hat sie jedoch einen Abstand, der dem Abstand von L zur Dachflächenebene E_{Dach} entspricht. Um diesen Abstand zu berechnen, stellen wir E_{Dach} zunächst in ihrer **Hesse'schen Normalenform** dar:

$$E_{\text{Dach/HNF}}: \frac{2x_1+x_2+2x_3-16}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2x_1+x_2+2x_3-16}{3} = 0.$$

Der Abstand von L zur dieser Ebene lässt sich nun durch Einsetzen der Koordinaten von L in die HNF berechnen, wobei die Betragsstriche nicht vergessen werden dürfen:

$$d(L, E_{\text{Dach}}) = \left|\frac{2d+d+2d-16}{3}\right| = \left|\frac{5d-16}{3}\right|$$

Dieser Abstand soll nun dem Abstand d zur Grundfläche entsprechen, also muss gelten:

$$\left|\frac{5d-16}{3}\right| = d.$$

Um diese **Betragsgleichung** zu lösen, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die Gleichung wird quadriert (wodurch die Betragsstriche wegfallen) oder man führt eine Fallunterscheidung durch.

Wir wählen hier den zweiten Weg und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{5d-16}{3} &= d & \quad\text{oder}\quad && \frac{5d-16}{3} &= -d \\ 5d-16 &= 3d & && 5d-16 &= -3d \\ 2d &= 16 & && 8d &= 16 \\ d_1 &= 6 & && d_2 &= 2. \end{aligned}$$

Da sich die Lampe im **Innern** des Gebäudes befinden soll, müssen die Koordiaten von L entsprechend klein sein. d_1 kommt nicht in Frage, da der Punkt $L_1(8|8|8)$ nicht mehr im Innern des Gebäudes liegt. d_2 ist also die gesuchte Lösung.

Die Lampe muss im Punkt $L(2|2|2)$ angebracht werden.

c) ▶ **Wie weit muss die Person mindestens gehen?** (4VP)

Da die Person sich im Punkt $P(5|1|0)$ befindet und eine Augenhöhe von 1,7 Metern hat, befinden sich die Augen dieser Person im Punkt $P_A(5|1|1{,}7)$. Wenn sich diese Person in x_2-Richtung bewegt, befinden sich die Augen der Person auf einer Geraden g mit P_A als Aufpunkt und dem Richtungsvektor der x_2-Achse:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP_A} + t\cdot\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}5\\1\\1{,}7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Die Person kann die Ecke H zu Beginn nicht sehen, da sie sich „auf der falschen Seite“ der Dachflächenebene E_{Dach} befindet (nämlich „unter“ E_{Dach}). Damit sie H sehen kann, muss sie sich so weit fortbewegen, dass sie auf die andere Seite der Dachflächenebene gelangt – sie muss also E_{Dach} durchstoßen.

Den Durchstoßpunkt der Laufgeraden g und der Dachflächenebene E_{Dach} können wir berechnen, indem wir die Koordinaten von g in die Ebenengleichung von E_{Dach} einsetzen:

$$\begin{aligned} g\cap E_{\text{Dach}}\colon\quad 2(5+0t)+(1+t)+2(1{,}7+0t) &= 16 \\ 10+1+t+3{,}4 &= 16 \\ t &= 1{,}6. \end{aligned}$$

Der Durchstoßpunkt S liegt also für $t=1{,}6$ auf der Geraden. Für seinen Ortsvektor gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}5\\1\\1{,}7\end{pmatrix} + 1{,}6\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2{,}6\\1{,}7\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S(5|2{,}6|1{,}7).$$

In x_2-Richtung ist die Person demnach

$$s = x_{2/S} - x_{2/P_A} = 2{,}6-1 = 1{,}6 \text{ Meter}$$

gegangen, um auf die andere Seite der Dachflächenebene zu gelangen.

Die Person muss also mindestens 1,6 Meter gehen, um auch die Ecke H zu sehen.