Pflichtteil

Aufgabe 1

▶ Bilde die Ableitung

Um die Ableitung zu bilden kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Schreibe die Funktion zunächst um
2. Leite die Funktion mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel ab

Aufgabe 2

▶ Berechne das Integral

Um das Integral zu berechnen, benötigst du eine Stammfunktion. Es gilt der Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{f}(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Aufgabe 3

▶ Löse die Gleichung

Um die Gleichung zu lösen musst du zunächst alle Terme auf eine Seite der Gleichung bringen. Anschließend kannst du eine Substitution durchführen und die Gleichung entweder mit der Mitternachtsformel, oder der pq-Formel lösen. Anschließend musst du resubstituieren.

Aufgabe 4

a)

▶ Erkläre den Graphen g

Um zu erklären wie man den Graphen g aus f erhält schaust du, wie sich die Amplitude und Periode ändert. Außerdem prüfst du, ob die Funktion verschoben ist.

Die allgemeine Kosinus-Funktion lautet: $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$

Der Faktor a gibt die Streckung bzw. Stauchung der Amplitude an. Durch den Faktor b wird die Periode verändert. Eine Verschiebung in die x-Richtung kommt durch den Faktor c zustande. Das d gibt eine Verschiebung in y-Richtung an. b)

▶ Bestimme die Nullstellen von $g(x)$

Bei dieser Teilaufgabe sollst du die Nullstellen des Graphen g im Bereich $0 \leq x \leq 4$ bestimmen.
Setze dazu die Funktion $g(x)$ gleich 0. Die Kosinus-Funktion hat bei den Werten 0, 2π,... den Wert 1.

Aufgabe 5

a)

▶ Bestimme $f(g(3))$

Um $f(g(3))$ zu bestimmen, liest du zunächst den Wert von $g(3)$ ab. Anschließend liest du den Funktionswert von f für diesen x-Wert ab.

▸ Bestimme $f(g(x)) = 0$

Bei dieser Aufgabe schaust du zunächst wo der Graph K_f eine Nullstelle hat. Anschließend liest du den x-Wert von K_g ab, der diesen Wert hat.

b)

▸ Bestimme $h'(2)$

Du hast folgende Funktion gegeben: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Du kannst die Ableitung der Funktion h mit der Produktregel bestimmen.
$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Lese aus dem Koordinatensystem die Funktionswerte von $f(2)$, $f'(2)$, $g(2)$ und $g'(2)$ und setze diese in die Ableitung ein.

Aufgabe 6

a)

▸ Stelle die Ebenen E und F dar

Um die Ebenen E und F in einem Koordinatensystem darstellen zu können, benötigst du die Spurpunkte der Ebenen.
Die Spurpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Du erhältst sie, indem du die x-Werte der anderen Achsen gleich 0 setzt und die Ebenengleichung nach deinem gewünschten x auflöst. b)

▸ Gib eine Gleichung der Ebene G an

Die Ebene G soll parallel zu der x_1-Achse verlaufen. Das bedeutet, dass der Faktor vor dem x_1 gleich 0 ist. Außerdem besitzt die Ebene dieselbe Spurgerade, die die x_2x_3-Ebene schneidet wie die Ebene F. Das bedeutet, die Spurpunkte der x_1- und x_2-Achse haben die gleichen Koordinaten.

Aufgabe 7

▸ Bestimme den Abstand d

Um den Abstand d des Punktes C von der Geraden g zu bestimmen, brauchst du außer der Geradengleichung den Punkt P auf der Geraden, der von C den geringsten Abstand hat. Der Abstand zwischen dem Punkt P und dem Punkt C ist am geringsten, wenn die Gerade durch die zwei Punkte orthogonal auf der Geraden g steht.
Um den Abstand zu bestimmen kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Geradengleichung von g auf
2. Bestimme mit Hilfe des Skalarprodukts den Parameter t der Geradengleichung und somit den Punkt P
3. Bestimme den Abstand der Punkte P und C

Aufgabe 8

a)

▶ Formuliere ein Ereignis *A*

Bei dem Ereignis A liegt eine Bernoulli-Kette vor. Die Bernoulli-Formel lautet:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \qquad 0\leq k\leq n$$

- n: Länge der Bernoulli-Kette
- k: Anzahl der Treffer
- p: Erfolgswahrscheinlichkeit

Schaue dir die einzelnen Terme und ihre Bedeutung an. b)

▶ Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(X=2)$

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele an. Sie ist binomialverteilt und folgt somit der Bernoulli-Verteilung. Setze die Kettenlänge, Anzahl der Treffer und die Erfolgswahrscheinlichkeit in die Bernoulli-Formel ein.

Aufgabe 9

▶ Beschreibe den Lösungsweg

Um den Kugelradius und den Berührpunkt zu bestimmen, kannst du folgendermaßen vorgehen:

1. Stelle eine Lotgerade zu der Ebene durch den Mittelpunkt M auf. Dabei dienen die Koordinaten des Punktes M als Stützvektor. Der Normalenvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Lotgerade.
2. Berechne den Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene. Der Schnittpunkt entspricht dem Berührpunkt B.
3. Berechne den Abstand der Punkte M und B. Der Abstand entspricht dem Kugelradius. Den Abstand berechnest du mit der Formel:
   $d=\sqrt{(m_1-b_1)^2+(m_2-b_2)^2+(m_3-b_3)^2}$

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe 1.2 a)

▶ Koordinate des Extrempunktes E angeben

Gegeben ist der Funktionsterm einer Funktion f mit:

$$f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x}$$

Dazu ist K das zugehörige Schaubild. Deine Aufgabe ist es, die Koordinaten des Extrempunktes E zu bestimmen.

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f''(x_E) \neq 0$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstellen der Funktion f. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmten Stellen in den Funktionsterm von f einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Extremstelle.

▶ Koordinate des Wendepunktes W angeben

Laut Aufgabenstellung besitzt das Schaubild K einen Wendepunkt. Um dessen Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die Wendestelle x_W der Funktion f bestimmen. Für diese Wendestelle müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $f''(x_W) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f'''(x_W) \neq 0$

Hast du anschließend x_W bestimmt, so kannst du die Wendestelle in den Term der Funktion f einsetzen und so die y-Koordinate des Wendepunktes bestimmen.

▶ Gleichung der Asymptote von K angeben

Betrachte das Schaubild der Funktion f in deinem GTR.
Deine Aufgabe ist es, die Gleichung der Asymptote von K anzugeben.

Anhand des Schaubildes (Abbildung links) kannst du bereits vermuten, dass es sich um eine **waagrechte Asymptote** handelt.
Um die Gleichung der Asymptote zu bestimmen, kannst du die Funktion f für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ untersuchen.

▸ Skizzieren des Schaubildes K

Weiterhin verlangt die Aufgabenstellung, das Schaubild K zu skizzieren. Dabei kannst du folgende Angaben verwenden:

- Betrachte das Schaubild in deinem GTR, indem du den `Graph`-Modus auswählst.
- Verwende, dass sich der Hochpunkt an $E(2 \mid 7,3576)$ und der Wendepunkt an $W(4 \mid 5,413)$ befindet.
- Für $x \to +\infty$ konvergiert die Funktion gegen 0, für $x \to -\infty$ strebt sie gegen $-\infty$.

Zusätzlich kannst du dir noch die zugehörige Wertetabelle der Funktion einblenden lassen. Diese findest du im `Graph`-Modus unter $\boxed{\text{TABLE}}$.

b)

▸ Wert für u bestimmen, sodass der Flächeninhalt 8 FE beträgt

Gegeben sind die Punkte $O(0 \mid 0)$, $P(u \mid 0)$ und $Q(u \mid f(u))$. Sie stellen die Eckpunkte eines Dreiecks dar.
Deine Aufgabe ist es, einen Wert für u so zu bestimmen, dass der Flächeninhalt des Dreieck 8 FE beträgt.

Der Flächeninhalt A_D eines Dreiecks berechnet sich allgemein über folgenden Zusammenhang:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Dabei stellt g die Länge der Grundfläche und h die Länge der Höhe dar.
Um einen passenden Wert für u zu ermitteln, kannst du wie folgt vorgehen:

- Stelle die Flächenfunktion in Abhängigkeit vom Parameter u auf.
- Setze den resultierenden Term mit 8 gleich und löse nach u auf, um den gesuchten Wert zu erhalten.

Den zweiten Schritt kannst du mit Hilfe des GTR durchführen.

▸ Wert für u bestimmen, sodass das Dreieck gleichschenklig ist

Damit das Dreieck **gleichschenklig** ist, muss einer der folgenden Fälle eintreten:

- $a = b$ oder
- $a = c$ oder
- $b = c$.

Gib dazu zunächst die Länge der Seiten a, b und c in Abhängigkeit von u an und setze diese gleich, um so einen passenden Parameterwert für u zu ermitteln. c)

▸ Grenzen des Intervalls bestimme, sodass der Mittelwert 2,2 beträgt

Bestimme ein Intervall der Länge 3, sodass die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-0,5 \cdot x}$ den Mittelwert 2,2 besitzt.
Den Mittelwert m einer Funktion f auf einem Intervall $[a; b]$ kannst du mit Hilfe der folgenden Formel bestimmen:

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Um das gesuchte Intervall zu bestimmen, kannst du diese Angaben verwenden:

- Der Mittelwert beträgt laut Aufgabentext $m = 2,2$.
- Die Länge des Intervalls soll 3 betragen, das heißt, es muss $b - a = 3$ bzw. $b = a + 3$ gelten.

Setze alle bekannten Informationen in die oben angeführte Formel ein und bestimme so das gesuchte Intervall.

Aufgabe 1.2

▶ Parameter *t* bestimmen

Gegeben ist der Funktionsterm einer Funktion f mit:

$$f_t(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - t^2 \cdot x$$

Deine Aufgabe ist es, den Parameter t so zu bestimmen, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t einen Abstand von 13 besitzen.
Dazu kannst du wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von t.
- Berechne den Abstand d der Extrempunkte.
- Bestimme t so, dass der Abstand gerade 13 beträgt.

Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f''(x_E) \neq 0$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstellen der Funktion f_t. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmten Stellen in den Funktionsterm von f_t einsetzen und erhältst so die zugehörigen Funktionswerte an den Extremstellen.

Wahlteil Aufgabe A 2

Aufgabe 2.1 a)

▸ Graphen von f skizzieren

Die Funktion f beschreibt die momentane Ankunftsrate ankommender Fahrzeuge an einem Grenzübergang. Ihr Funktionsterm ist gegeben durch:

$$f(t) = \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000}$$

Dabei sind t die Stunden nach Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Fahrzeuge pro Stunde. Laut Aufgabentext befinden sich zu Beginn keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.
Deine Aufgabe ist es, den Graphen der Funktion f im Intervall $[0;30]$ zu skizzieren. Dabei kannst du folgendermaßen vorgehen:

- Betrachte das Schaubild in deinem GTR, indem du den `Graph`-Modus auswählst.
- Lasse dir die zugehörige Wertetabelle der Funktion einblenden.

▸ Maximale momentane Ankunftsrate bestimmen

Die Funktion f beschreibt die momentane Ankunftsrate von Fahrzeugen pro Stunde. Um die maximale momentane Ankunftsrate zu ermitteln, kannst du zunächst den **Hochpunkt** der Funktion f bestimmen.
Um die Koordinaten des Hochpunktes angeben zu können, musst du die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Maximalstellen überprüfen.
Für eine Maximalstelle t_M einer Funktion f müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $f'(t_M) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f''(t_M) < 0$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Maximalstelle der Funktion f. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmte Stelle in den Funktionsterm von f einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Maximalstelle. Dieser Funktionswert entspricht gerade der gesuchten maximalen Ankunftsrate.

▸ Anzahl der Fahrzeuge bestimmen, die in den ersten 6 Stunden ankommen

Beschreibt die Funktion f die momentane Ankunftsrate, so entspricht ihre Stammfunktion F der Anzahl der ankommenden Fahrzeuge. Bestimme die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden am Grenzübergang ankommen. Diese Anzahl erhältst du über folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^6 \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000}\mathrm{d}t}$$

Laut Aufgabentext befinden sich zu Beginn keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang. Daher ist die Konstante, die sich bei der Integration ergibt, gleich Null. b)

▸ Zeitpunkt bestimmen, an dem sich erstmals Fahrzeuge stauen

Pro Stunde können am Grenzübergang **110** Fahrzeuge abgefertigt werden. Aus dem Aufgabenteil zuvor weißt du jedoch, dass die maximale momentane Ankunftsrate 325 Fahrzeuge pro Stunde beträgt. Das heißt, dass zu einem gewissen Zeitpunkt mehr Fahrzeuge am

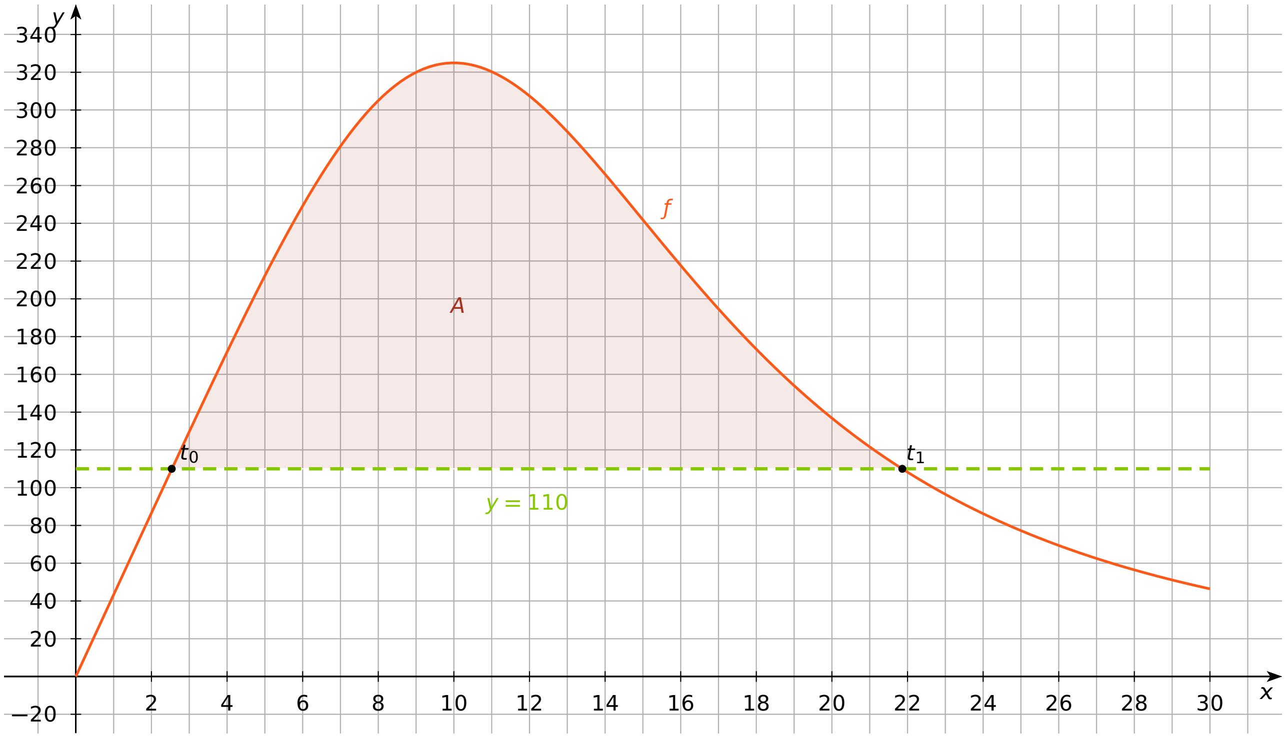
Grenzübergang ankommen als abgefertigt werden können.
Deine Aufgabe ist es, diesen Zeitpunkt t_0 zu bestimmen. Dabei kannst du wie folgt vorgehen:

- Der Zeitpunkt entspricht der Stelle von f, an der $f(t)$ erstmals den Funktionswert 110 erreicht. Setze also den Term der Funktion f mit 110 gleich.
- Löse nach t auf, um den gesuchten Zeitpunkt zu erhalten.

Diese Aufgabe kannst du mittels GTR graphisch lösen. Gib dazu den Term der Funktion f und der Geraden $y = 110$ im Graph-Modus an und bestimme ihre Schnittstelle. Denn diese entspricht gerade dem gesuchten Zeitpunkt, an dem $f(t)$ den Funktionswert 110 erreicht.

▶ Anzahl der Fahrzeuge ermitteln, die sich vor dem Übergang stauen

In der Abbildung unten siehst du den skizzierten Graphen der Funktion f und der Geraden $y = 110$. Zuvor hast du ermittelt, dass sich erstmalig zum Zeitpunkt $t_0 = 2,54$ Fahrzeuge vor dem Übergang stauen. Die Anzahl A der Fahrzeuge, die sich maximal vor dem Übergang anstauen, entspricht der rot markierten Fläche:



Diese Fläche entspricht weiterhin gerade der folgenden Differenz:

$$\boldsymbol{\int_{t_0}^{t_1} f(t) - 110\, dt}$$

Dabei sind t_0 und t_1 die Schnittstellen der Funktion f und der Gerdaden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit:

- $t_0 = 2,54$
- $t_1 = 21,86$

Für die maximale Anzahl an anstauenden Fahrzeugen wird das Integral $[t_0; t_1]$ gewählt, da ab dem Zeitpunkt t_1 wieder weniger Fahrzeuge ankommen, als abgefertigt werden können. Das heißt, die Anzahl A nimmt ab.

▶ Anzahl bei einer Abfertigungsrate von 220 Fahrzeugen pro Stunde

12 Stunden nach Beobachtungsbeginn soll die momentane Abfertigungsate auf **220** Fahrzeuge pro Stunde erhöht werden. In den Stunden davor soll die momentane Abfertigungsrate weiterhin 110 Fahrzeuge pro Stunde betragen.
Berechne unter diesen Voraussetzungen die Anzahl der sich anstauenden Fahrzeuge. Die gesuchte Anzahl A entspricht hier der rot markierten Fläche.

Diese Fläche entspricht weiterhin gerade der folgenden Differenz:

$$\boldsymbol{\int_{t_0}^{12} f(t) - 110\,dt + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220\,dt}$$

Dabei ist t_0 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $y = 110$, die du zuvor bestimmt hast mit: $t_0 = 2,54$.

Dahingegen ist t_2 die Schnittstelle der Funktion f und der Geraden $z = 220$. Um die gesuchte Anzahl zu ermitteln, kannst du also wie folgt vorgehen:

- Bestimme die Schnittstelle t_2 der Funktion f und der Geraden $z = 220$.
- Berechne das Integral $\int_{t_0}^{12} f(t) - 110\,dt + \int_{12}^{t_2} f(t) - 220\,dt$

Aufgabe 2.2 a)

▶ Koordinaten des Extrempunktes angeben

Die Funktionenschar f_a mit $0 < a$ und dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : -\pi < x < \pi\}$ ist durch folgenden Term definiert:

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2$$

In der Aufgabenstellung wird angegeben, dass der Graph der Funktionenschar G_a einen Extrempunkt besitzt. Deine Aufgabe ist es, dessen Koordinaten anzugeben. Beachte, dass diese Koordinaten vom Parameter a abhängig sein können, da es sich hierbei um eine Funktionenschar handelt.

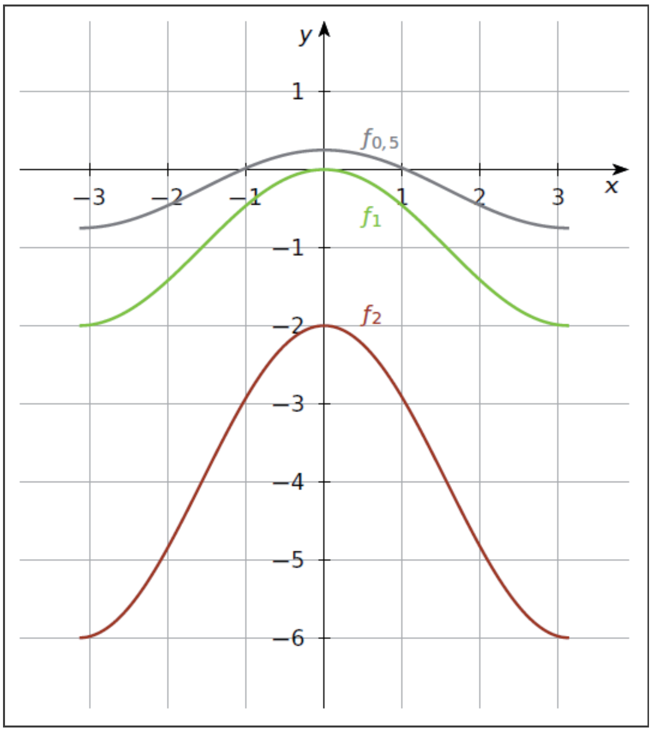
Um die Koordinaten angeben zu können, musst du zunächst die **notwendige** und **hinreichende Bedingung** für Extremstellen überprüfen.
Für eine Extremstelle x_E einer Funktion f_a müssen folgende Kriterien erfüllt werden:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$

Ermittle anhand diesen Bedingungen die Extremstelle der Funktionenschar f_a. Hast du diese bestimmt, so kannst du die bestimmte Stelle in den Funktionsterm von f_a einsetzen und erhältst so den zugehörigen Funktionswert an dieser Extremstelle.
b)

▶ Punkte auf der y-Achse angeben angeben

Im Schaubild kannst du erkennen, dass die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und $f_{0,5}$ der Funktionenschar f_a jeweils einen Punkt auf der y-Achse schneiden. Gib die Punkte an, durch welche **kein** Graph der Funktionenschar f_a verläuft.



Dabei kannst du folgende Eigenschaften verwenden:

- Laut Aufgabentext muss $0 < a$ gelten.
- Der Extrempunkt besitzt die Koordinaten $E(0 \mid a - a^2)$ und stellt damit den Schnittpunkt mit der y-Achse dar.

Betrachte die Hilfsfunktion h mit dem Term $h(a) = a - a^2$ und der Bedingung $0 < a$.
Diese Hilfsfunktion gibt die y-Koordinate des Schnittpunktes $E(0 \mid a - a^2)$ mit der y-Achse in Abhängigkeit von a an. Bestimme ihre Extrema, um die Punkte auf der y-Achse zu bestimmen, die kein Graph schneidet.

Wahlteil Aufgabe B 1

Aufgabe B 1.1

a)

▶ Bestimmen einer Koordinatengleichung für Ebene *E*

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass das Quadrat $ABCD$ die **Grundfläche einer Pyramide** mit der Spitze $S(0\mid 0\mid 12)$ ist. Weiterhin weißt du, dass die Seitenfläche BCS in der Ebene E liegt. Deine Aufgabe ist es dabei, eine **Koordinatengleichung der Ebene *E*** zu bestimmen. Die Koordinatengleichung einer Ebene baut sich dabei wie folgt auf:

$E: \quad n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** $\overrightarrow{n}$ der Ebene
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Willst du also eine Koordinatengleichung der Ebene E bestimmen, so bestimmst du zunächst den **Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$** über das **Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt**. Verwende dazu die Information, dass die Seitenfläche BCS der Pyramide in der Ebene E liegt.
Hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, so bestimmst du über eine **Punktprobe** die Konstante d. Verwende dazu die Koordinaten von Punkt B, C oder S.

▶ Bestimmen des Winkels zwischen den Flächen *BCS* und *ABCD*

Nun ist es deine Aufgabe, den Winkel α zwischen Seitenfläche BCS und Grundfläche $ABCD$ der Pyramide zu berechnen. Hier gilt es also einen Winkel **zwischen zwei Ebenen** zu berechnen. Einen Winkel zwischen zwei gegebenen Ebenen berechnest du dabei über folgende Formel:

$\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ mit:

- α: Winkel zwischen den Ebenen
- $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$: Normalenvektoren der Ebenen

Willst du also den Winkel α zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche $ABCD$ berechnen, so benötigst du hier die **Normalenvektoren dieser Ebenen**. Den Normalenvektor der Ebene E, in welcher die Seitenfläche BCS liegt, hast du oben schon bestimmt. Der Normalenvektor der Ebene, in welcher die Grundfläche $ABCD$ liegt, gilt es noch zu berechnen.

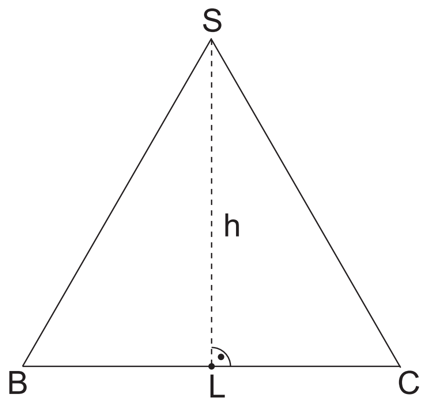
▶ Berechnen des Flächeninhalts des Dreiecks *BCS*

Zuletzt sollst den Flächeninhalt A des Dreiecks BCS berechnen. Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich dabei über folgenden Zusammenhang:

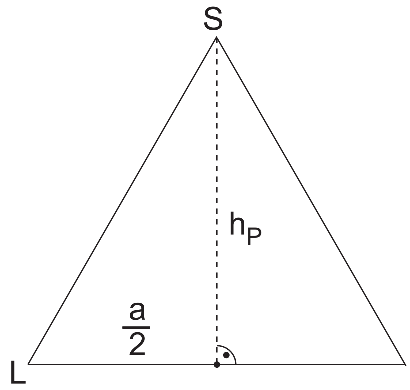
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit:

- g: Grundseite
- h: Höhe des Dreiecks

Fertige dir eine **Skizze des Dreiecks *BCS*** an, um dir das Lösen dieser Aufgabe einfacher zu gestalten:



Willst du hier den Flächeninhalt A des Dreiecks BCS bestimmen, so musst du die **Länge der Höhe h** berechnen. Diese Länge ermittelst du, in dem du zunächst die Länge der Strecke $\overline{SL}$ berechnest. Zeichnest du die Seitenansicht der Pyramide $ABCDS$, so kannst du erkennen, dass die Strecke $\overline{SL}$ eine der **Seitenlängen der Pyramiden** entspricht:



Betrachtest du die Skizze oben näher, so kannst du weiterhin erkennen, dass die Strecke $\overline{SL}$ mit der Höhe h_P der Pyramide und der Hälfte der Grundseitenlänge a **in einem rechtwinkligen Dreieck** liegt. Diese lässt sich also über den **Satz des Pythagoras** in diesem Dreieck bestimmen.
Gehe beim Berechnen des Flächeninhalts A also so vor:

- Bestimme die **Höhe h_P** der Pyramide
- Bestimme die **Grundseitenlänge a**
- Berechne die **Länge der Strecke $\overline{SL}$**
- Berechne den **Flächeninhalt A**

b)

▶ **Berechnen des Quadervolumens**

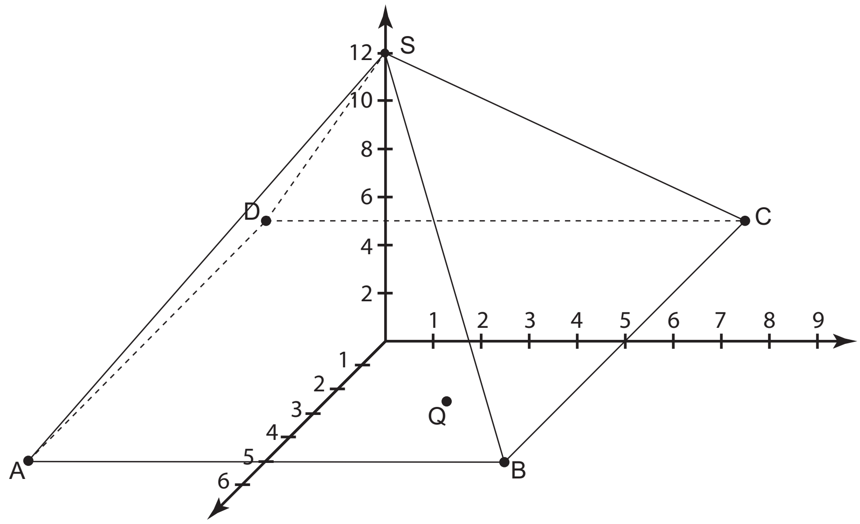
Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass nun **Quader** betrachtet werden, die jeweils vier Eckpunkte auf den **Pyramidenkanten** und vier Eckpunkte in der **Grundfläche der Pyramide** haben. Einer dieser Quader hat nun den Eckpunkt $Q(2,5\,|\,2,5\,|\,0)$.
Deine Aufgabe ist es nun, das **Volumen** dieses Quaders zu berechnen. Das Volumen V

eines Quaders ergibt sich dabei über folgende Formel:

$V = l \cdot b \cdot h$ mit:

- l: **Länge** des Quaders
- b: **Breite** des Quaders
- h: **Höhe** des Quaders

Bevor du also das Volumen des Quaders bestimmen kannst, musst du dessen Länge, Breite und Höhe bestimmen. Fertige dir dazu eine **Skizze** des Sachverhalts an, in welche du zunächst die Pyramide $ABCDS$ und den Punkt Q einzeichnest:



Vergleichst du die Koordinaten von Q und dem Punkt B, so kannst du erkennen, dass der Punkt Q auf dem **Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$** liegt. Folglich liegt der darüberliegende Punkt R des Quaders auf der Strecke $\overline{BS}$. Willst du also die Höhe des Quaders berechnen, so bestimmst du die Länge des Vektors $\overrightarrow{QR}$. Berechne dazu die Koordinaten von R über die Gerade, auf welcher die Strecke $\overline{BS}$ liegt.
Die Länge und die Breite des Quaders ermittelst du, indem du die **relative Lage des Punktes Q zu den Koordinatenachsen** näher betrachtest.

▶ Berechnen der Koordinaten des Eckpunktes

Nun soll ein weiterer Quader betrachtet werden, bei dem es sich um einen **Würfel** handelt. Dabei sollte dir bekannt sein, dass bei einem Würfel **Länge, Breite und Höhe übereinstimmen**. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten von dessen Eckpunkt auf der Kante $\overline{BS}$ zu bestimmen.
Wie oben schon beschrieben, bestimmte der Punkt Q unter anderem Breite und Länge des Würfels. Dabei entsprach gerade das Doppelte der x_1-Koordinate der Länge und das Doppelte der x_2-Koordinate der Breite des Würfels.
Da der hier zu bestimmende Punkt R_t auf der Kante $\overline{BS}$ liegt, werden dessen Koordinaten **von Gerade g bestimmt**. Von oben weißt du, dass dessen x_1- und x_2-Koordinate mit denen von Punkt Q, der unterhalb von R_t liegt, übereinstimmt.
Daraus folgt, dass die x_3-Koordinate dem **Doppelten** der x_1- und x_2-Koordinaten von R_t entsprechen muss, damit es sich beim betrachteten Quader um einen Würfel handelt.

Aufgabe B 1.2

a)

▶ Wahrscheinlichkeit, dass mind. 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass insgesamt 20 Mal eine Kugel aus dem Gefäß $G1$ gezogen wird. Die Kugeln werden dabei jeweils wieder ins Gefäß zurückgelegt, weswegen es sich hier um ein **Ziehen mit Zurücklegen** handelt. Im Gefäß $G1$ befinden sich 6 schwarze und 4 weiße Kugel. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass bei 20 Zügen mindestens 12 Mal eine schwarze Kugeln gezogen wird.
Willst du hier diese Wahrscheinlichkeit bestimmen, so betrachtest du zunächst die Zufallsvariable X. Zufallsvariable X beschreibt dabei die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Da bei diesem Zufallsversuch nur die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln relevant ist und es sich um ein **Ziehen mit Zurücklegen** handelt, ist Zufallsvariable X **binomialverteilt**. Da insgesamt 20 Mal gezogen wird ist $n = 20$.
Wahrscheinlichkeit p ergibt sich aus der **Gesamtanzahl** der schwarzen Kugeln unter allen Kugeln. Da hier die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht wird, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugeln gezogen wird, muss für die Zufallsvariable X hier folgendes gelten:

$P(X \geq 12)$.

▶ Wahrscheinlichkeit, dass 2 schwarze Kugeln hintereinander gezogen werden

Nun betrachtest du Gefäß $G2$, indem sich 3 schwarze und 7 weiße Kugeln befinden und aus dem **mit Zurücklegen** gezogen wird. Deine Aufgabe ist es dabei, die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass aus diesem Gefäß **genau** 2 schwarze Kugeln **hintereinander** gezogen werden.
Willst du diese Aufgabe lösen, so musst du dir zunächst überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei schwarze Kugeln bei insgesamt 8 Zügen aus dem Gefäß zu ziehen. Hast du dies ermittelt, so musst du dir klar machen, mit welcher Wahrscheinlichkeit überhaupt zwei schwarze Kugeln hintereinander aus dem Gefäß entnommen werden.

b)

▶ Berechnen der Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel

Der Aufgabenstellung kannst du hier nun entnehmen, dass insgesamt 2 Kugeln aus Gefäß $G1$ **ohne Zurücklegen** gezogen und in das Gefäß $G2$ gelegt werden. Anschließend wird dann eine Kugel aus Gefäß $G2$ gezogen. Deine Aufgabe ist es nun, zu ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Kugel schwarz ist.
Willst du diese Wahrscheinlichkeit hier berechnen, so musst du hier folgende drei Fälle betrachten:

- Es werden 2 schwarze Kugeln in $G2$ gelegt;
- es wird eine schwarze Kugel in $G2$ gelegt und
- es wird keine schwarze Kugel in $G2$ gelegt.

Je nachdem, welcher dieser drei Fälle eintritt **verändert** sich die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel aus Gefäß $G2$ zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Kugel aus $G2$ zu ziehen, wird also **maßgeblich** von diesen Wahrscheinlichkeiten beeinflusst.
Hast du die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Fälle ermittelt, so kannst du ausgehend von diesen die Wahrscheinlichkeit für das **Ziehen einer schwarzen Kugel** aus dem Gefäß $G2$ ermitteln. Auch hier ergeben sich drei verschiedene Fälle:

- Die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich um 2 erhöht;
- die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich um 1 erhöht und
- die Anzahl der schwarzen Kugeln hat sich nicht erhöht.

Beachte dabei, dass sich in jedem dieser drei Fälle die Gesamtanzahl der Kugeln um 2 erhöht hat. Vereine zuletzt die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fälle über die Pfadregeln und berechne so die Wahrscheinlichkeit.

Wahlteil Aufgabe B 2

Aufgabe B 2.1

a)

▶ Bestimmen der Koordinatengleichung der Ebene *E*, in der die Platte liegt

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die rechteckige Platte die folgenden Eckpunkte besitzt:

- $A(10\,|\,6\,|\,0)$;
- $B(0\,|\,6\,|\,0)$;
- $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und
- $D(10\,|\,0\,|\,3)$.

Deine Aufgabe ist es hierbei, eine **Ebenengleichung in Koordinatenform** für die Ebene E zu bestimmen, in welcher die rechteckige Platte liegt. Die Ebenengleichung in Koordinatenform einer Ebene baut sich dabei wie folgt auf:

$E: \quad n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des **Normalenvektors** $\vec{n}$ der Ebene
- d: Über **Punktprobe** zu bestimmende **Konstante**

Willst du also eine eine **Ebenengleichung in Koordinatenform** der Ebene E bestimmen, so bestimmst du zunächst den **Normalenvektor** $\overrightarrow{n_E}$ über das **Kreuz- bzw. Vektorprodukt**. Verwende dazu die Koordinaten der Eckpunkte der rechteckigen Platte.
Hast du den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmt, so bestimmst du über eine **Punktprobe** die Konstante d. Verwende dazu die Koordinaten von Punkt A, B, C oder D.

▶ Darstellen des Sachverhaltes in einem Koordinatensystem

Hier sollst du nun die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem darstellen. Orientiere dich beim Zeichnen der Achsen an den **Koordinaten der einzuzeichnenden Punkte** und denke daran, dass alle Koordinatenangaben in deinem Koordinatensystem **in m** sind. Zeichne zunächst die Platte mit:

- $A(10\,|\,6\,|\,0)$;
- $B(0\,|\,6\,|\,0)$;
- $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und
- $D(10\,|\,0\,|\,3)$.

und dann den Stab. Zeichne dazu den Punkt $F(5\,|\,6\,|\,0)$ ein und von diesem dann einen 2 m langen Stab. Zuletzt zeichnest du die Lichtquelle L bei $L(8\,|\,10\,|\,2)$ ein.

▶ Bestimmen des Winkels zwischen Stab und Platte

Nun sollst du den Winkel α zwischen dem Stab bei F und der Platte $ABCD$ bestimmen. Da der Stab durch einen Vektor $\overrightarrow{FT}$ (siehe oben) und die Platte $ABCD$ durch eine Ebene repräsentiert werden können, gilt es hier einen **Winkel zwischen einer Ebene und einem Vektor** zu berechnen.
Für die Berechnung eines Winkels zwischen einem Vektor und einer Ebene gilt dabei folgendes:

$\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$ mit:

- $\vec{a}$: Betrachteter **Vektor**;
- $\vec{n}$: **Normalenvektor** der betrachteten Ebene.

Bestimme also zunächst den Vektor $\overrightarrow{FT}$ der den Stab repräsentiert und bestimme dann mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E den hier gesuchten Winkel.

b)

▶ Berechnen des Schattenpunktes des oberen Endes des Stabes

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich im Punkt $L(8\,|\,10\,|\,2)$ eine punktförmige Lichtquelle befindet. Weiterhin weißt du, dass der Stab einen Schatten auf die Platte wirft. Deine Aufgabe ist es dabei, die Koordinaten des **Schattenpunktes S** des oberen Endes des Stabes, welcher dieser auf die Platte wirft, zu bestimmen.
Aus dem vorhergegangenen Aufgabenteil weißt du, dass das obere Ende des Stabes die Koordinaten $T(5\,|\,6\,|\,2)$ besitzt. Nun werden von Punkt L aus Lichtstrahlen **in Richtung des Stabes** geworfen. Das heißt, die „Richtung des Schattens" des oberen Endes des Stabes wird durch den **Vektor $\overrightarrow{LT}$** bestimmt. Willst du nun ausgehend von dem Wissen über diesen Vektor den Schattenpunkt S bestimmen, so gehst du hier so vor:

- Formuliere eine Gerade l, die die **Richtung des Lichtes** ausgehend vom Punkt T beschreibt.
- Schneide die Gerade mit der **Ebene E**, die die Platte repräsentiert
- Der **Schnittpunkt** von Gerade l und Ebene E ist dann der gesuchte Schattenpunkt S.

▶ Begründen, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt

Nun sollst du begründen, dass der Schatten, den der Stab wirft, sich **vollständig** auf der Platte befindet. Von oben weißt du, dass der Schattenpunkt, welcher vom oberen Ende des Stabes geworfen wird, die Koordinaten $S(2\,|\,2\,|\,2)$ besitzt.
Willst du hier begründen, dass der Schatten, welcher vom Stab geworfen wird, sich vollständig auf der Platte befindet, so musst du hier folgendes tun:

- **Vergleiche** die Koordinaten von Punkt S mit den Koordinaten der Eckpunkte der Platte.
- **Analysiere** die Koordinaten von Punkt F nochmals genauer und setze sie **in Relation** zu den Koordinaten von S.
- Veranschauliche deine Überlegungen an der **Skizze aus Aufgabenteil a**.

c)

▸ Berechnen der Koordinaten der möglichen Kollisionspunkte

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass sich die Lichtquelle von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene **parallelen Kreisbahn** bewegt. Der Mittelpunkt dieser Kreisbahn ist dabei Punkt T, also das **obere Ende des Stabes**. Bewegt sich die Lichtquelle wie eben beschrieben auf der Kreisbahn, so **kollidiert** diese mit der Platte $ABCD$. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten dieser **möglichen Kollisionspunkte** zu berechnen.
Willst du hier die möglichen Kollisionspunkte bestimmen, so bestimmst du zunächst die Ebene H, **auf welcher sich die Lichtquelle bewegt**. Beachte dabei, dass diese parallel zur x_1x_2-Ebene verlaufen muss.
Hast du Ebene H bestimmt, so schneidest du diese mit der Ebene E, in welcher sich auch die Platte befindet. Da du hier zwei Ebenen schneidest, ergibt sich als Resultat **eine Schnittgerade**. Auf dieser Schnittgeraden müssen sich dann die möglichen **Kollisionspunkte** befinden. Überlege dir folgendes, um diese dann zu bestimmen:

- Die Kollisionspunkte müssen sich **auf** der Schnittgeraden befinden;
- der Radius der Kreisbahn wird durch den **Abstand** zwischen T und S bestimmt;
- da es sich beim Punkt T um den Mittelpunkt des Kreises handelt, muss der Abstand zwischen T und den Kollisionspunkten gerade dem **Radius** entsprechen.
- Verwende beim Berechnen **die allgemeinen Koordinaten der Kollisionspunkte**, die sich aus der Schnittgeraden ergeben.

Aufgabe B 2.2

a)

▸ Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeit

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass bei der Produktion von Bleistiften erfahrungsgemäß der Anteil der fehlerhaften Stifte **bei 5 % liegt**. Nun werden der Produktion zur Qualitätsprüfung zufällig **800** Bleistifte entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die **Anzahl der fehlerhaften Stifte** in der vorliegenden Stichprobe. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 30)$ zu berechnen.
Da die Zufallsvariable X nur die Ausprägungen

- „Stift ist **fehlerhaft**“ und
- „Stift ist **nicht fehlerhaft**“

kennt und bei einem Stichprobenumfang von 800 näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** ausgegangen werden kann, ist die Zufallsvariable X näherungsweise **binomialverteilt**. Für den Stichprobenumfang gilt $n = 800$. Die Wahrscheinlichkeit p für einen fehlerhaften Stift ergibt sich aus dem relativen Anteil der fehlerhaften Stifte in der Produktion. Für p gilt also:

- $p = 5\,\% = 0,05$.

Die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit kannst du mit deinem GTR berechnen.

▸ Wahrscheinlichkeit, für die geg. Abweichung vom Erwartungswert

Hier sollst du nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass der Wert von X um weniger als 10 **vom Erwartungswert** der Zufallsvariable X abweicht. Bestimme dazu zunächst den **Erwartungswert** der Zufallsvariablen X. Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen ergibt sich dabei wie folgt:

- $E = n \cdot p$

Hast du den Erwartungswert von X bestimmt, so formulierst du im nächsten Schritt die hier zu berechnende Wahrscheinlichkeit. Beachte dabei das hier eine Abweichung **„nach oben“ und „nach unten“** beachtet werden muss. Die hier zu berechnende Wahrscheinlichkeit hat also diese Gestalt:
$P(k_1 \leq X \leq k_2)$ mit:

- k_1: untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit und
- k_2: obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit.

b)

▶ Bestimmen des Ablehnungsbereichs

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass der Betrieb eine neue Maschine erwirbt, von der behauptet wird, dass **höchstens 2 %** der von ihr produzierten Stifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll hier mit Hilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften **überprüft** werden. Deine Aufgabe ist es dabei, zu bestimmen, **ab welcher Anzahl** von fehlerhaften Stiften man sich **gegen** die Hypothese entscheidet. Die **Irrtumswahrscheinlichkeit soll hier maximal 5 % betragen**.
Betrachte dazu zunächst die Zufallsvariable Y. Zufallsvariable Y beschreibt hier die **Anzahl der fehlerhaften Bleistifte** und ist mit gleicher Begründung wie oben **näherungsweise binomialverteilt**. Für diese gilt dabei $n = 800$ und $p = 0,02$. Da hier die Anzahl an fehlerhaften Bleistiften ermittelt werden soll, ab welcher nicht mehr angenommen wird, dass die Maschine eine Ausschussquote von 2 % hat, müssen hier die **Hypothesen** wie folgt lauten:

- $H_0: \quad p \leq 0,02$
- $H_1: \quad p > 0,02$

Es handelt sich also um einen **rechtsseitigen Hypothesentest**. Da du hier die Anzahl der Stifte ermitteln sollst, ab welcher man sich gegen die Hypothese H_0 entscheidet, suchst du hier den **Ablehnungsbereich** für die Hypothese H_0:

- Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{g, \ldots, 800\}$.

Um diese Aufgabe zu lösen, gilt es hier also den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ zu bestimmen. Bestimme diesen über die Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. über die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
Der Ablehnungsbereich wird hier über die kleinste natürliche Zahl bestimmt, für welche folgender Zusammenhang noch erfüllt ist:

- $P(Y \geq g) \leq 0,05$.