Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Es ist $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(3x^2 + 2x^3\right)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Eine Stammfunktion ist F mit $F(x) = 8\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5$.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Gleichung hat die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-2;\ 0;\ 2\}$.

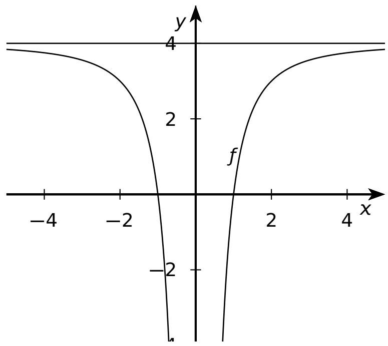
Aufgabe 4 (4VP)

Asymptoten angeben

Waagerechte Asymptote bei $y = 4$.

Senkrechte Asymptote bei $x = 0$.

Schaubild skizzieren



Gleichung der Normalen ermitteln

$n: y = -x + 5$

Aufgabe 5 (5VP)

a) Doppelte Nullstelle bei $x = 0$.

b) Bild 4 ist das Schaubild von f'.
Bild 3 ist das Schaubild von g.
Bild 2 ist das Schaubild von F.

Aufgabe 6 (4VP)

Lineares Gleichungssystem lösen

$\mathbb{L} = \{4; 1; 2\}$

Geometrische Interpretation der Lösungsmenge

Geometrisch gesehen haben wir den Schnittpunkt dreier Ebenen bestimmt. Die drei Gleichungen aus dem LGS sind dabei die Koordinatengleichungen der Ebenen. Der Schnittpunkt S dieser Ebenen ist $S(4\,|\,1\,|\,2)$.

Aufgabe 7
(3VP)

Koordinatengleichung ermitteln

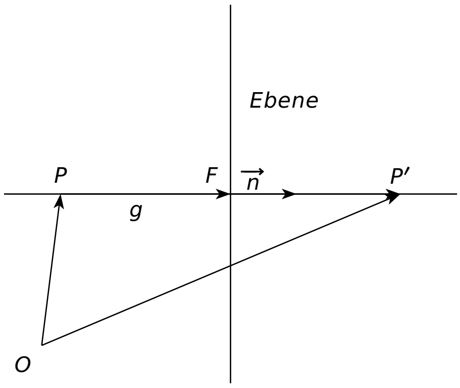
$E\colon -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6$

Aufgabe 8
(3VP)

Verfahren beschreiben

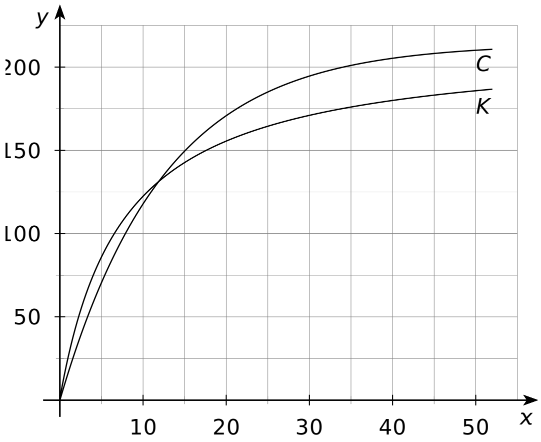
Eine Beschreibung ist in der ausführlichen Lösung gegeben.

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$



Wahlteil IAufgabe I 1.1

a) Aus den gegebenen Werten ergibt sich $a = 427$ und $b = 2$. (5VP)



In den ersten Wochen nehmen die Verkaufszahl extrem zu (K verläuft steil nach oben), danach stabilisieren sie sich und streben gegen einen festen Wert.

Die Kundenzahl nimmt in den ersten Wochen stark zu, da die Zahnpasta ein neues Produkt ist, allmählich ist sie aber den meisten bekannt, es kommen kaum noch Neukunden hinzu und die Verkaufszahlen bleiben stabil.

b) In den ersten 52 Wochen hat der Supermarkt A etwa 7.800 Tuben verkauft. (3VP)

Nach etwa $15,3$ Wochen wurden mehr als 1.500 Tuben verkauft.

c) Das Schaubild C der Funktion g ist oben eingezeichnet. (6VP)

Langfristig kann der Supermarkt B mit 214 verkauften Tuben pro Woche rechnen.

Nach etwa 12 Wochen hat der Supermarkt A den größten Vorsprung an verkauften Tuben.

Es sei x_1 die Schnittstelle von K und C. Der gesuchte Zeitpunkt x_2 muss so abgeschätzt werden, dass die Schnittfläche zwischen K und C im Intervall $[0; x_1]$ denselben Flächeninhalt hat wie die Schnittfläche im entsprechenden Intervall $[x_1; x_2]$.

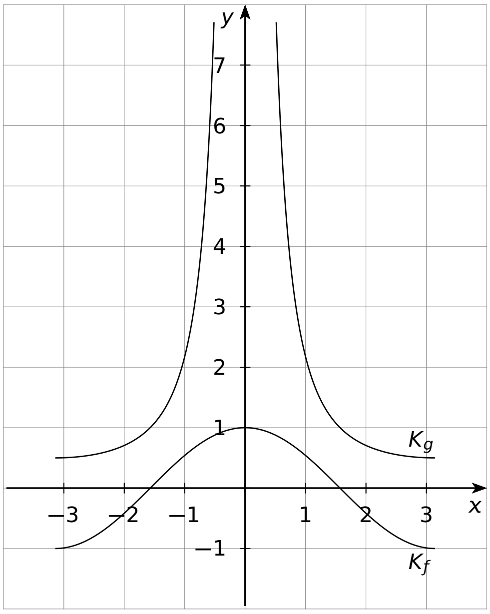
Aufgabe I 1.2

Wegen $f'(x) = g^{(1)}(x)$ ist der Induktionsanfang gesichert. (4VP)

Wetiterhin gilt für ein beliebiges $k \geq 1$ und seine Folgezahl $k+1$ die Beziehung $\left[f^{(k)}(x)\right]' = f^{(k+1)}(x)$, damit gilt die Aussage auch für jedes beliebige $n \geq 1$.

Aufgabe I 2

a) Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt 2 ein. (7VP)
Die quadratische Funktion h hat die Funktionsgleichung
$h(x) = -\frac{12}{\pi^3}x^2 + \frac{3}{\pi}$.



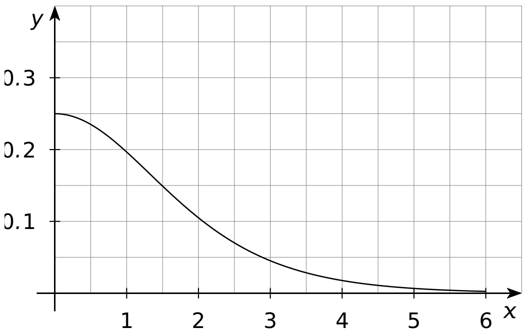
b) Die beiden Punkte $P_1(-1,21 \mid 1,54)$ und $P_2(1,21 \mid 1,54)$ auf dem Schaubild von g haben vom Hochpunkt $H(0 \mid 1)$ vom Schaubild von f den kleinsten Abstand. (4VP)

c) Der Rotationskörper besitzt ein Volumen von $V \approx 1,57\pi \cdot t^2$ VE. (7VP)

Für $t^* \approx 1,32$ schneidet das Schaubild von f_{t^*} die erste Winkelhalbierende $y = x$ rechtwinklig.

Aufgabe I 3.1

a) Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. (6VP)
Die Ableitung f' ist negativ für $t > 0$, daher ist f monoton abnehmend.
Da f allerdings nur die Änderungsrate beschreibt, heißt das nicht, dass der Bestand auch abnimmt. Er wächst weiterhin, allerdings nur langsamer.



b) Es gilt $F'(t) = f(t)$, somit ist F eine Stammfunktion von f. (5VP)

Nach zwei Jahren sind etwa $4,38$ Millionen Fische im See zu erwarten.

Langfristig sind $4,5$ Millionen Fische im See zu erwarten.

Aufgabe I 3.2

Das Wachstum wird durch die Differenzialgleichung $g'(t) = k\cdot(7.000 - g(t))$ beschrieben. (7VP)

Die zugehörige Wachstumsfunktion hat die Gleichung $g(t) = 7.000 - 3.000 \cdot e^{-0,1431t}$.

Nach etwa $2,8$ Monaten befinden sich nach diesem Modell 5.000 Fische im See.

Wenn sich anfangs etwa 2.910 Fische im Teich befinden umfasst der Bestand nach 5 Monaten 5.000 Fische.

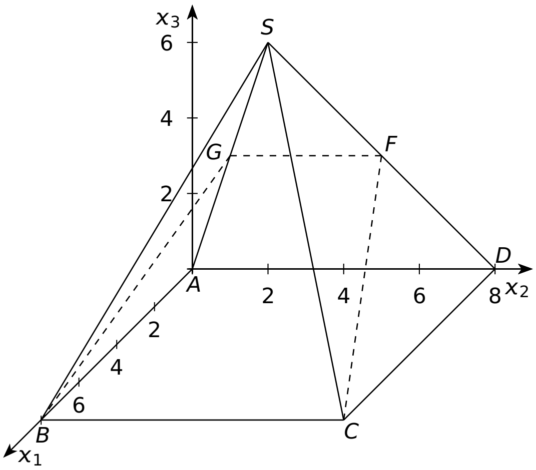
Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) Es ist $F(2\,|\,6\,|\,4)$ und $G(2\,|\,2\,|\,4)$. (7VP)

Das Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez, da die Seiten GF und BC parallel zueinander und die Seiten BG und CF gleich lang sind.

Für die (kleineren) Innenwinkel gilt $\alpha = \beta \approx 74,5^\circ$, für die beiden größeren $\gamma = \delta \approx 105,5^\circ$.



b) Für $r^* = 2,25$ hat die Ebene E_{r^*} von S den Abstand 4. (4VP)

Der Punkt $P\left(\frac{8}{5} \,|\, dle| \,4\, | \,dle| \frac{14}{5}\right)$ auf $E_{2,25}$ hat von S den geringsten Abstand.

c) Die Gerade durch B und C liegt in allen E_r, da sowohl B als auch C in allen E_r liegen. (5VP)

- Für $r = 0$ schneidet E_r die Pyramide in einem Quadrat,
- Für $r = 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Dreieck,
- Für $0 < r < 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Trapez,
- Für $r < 0$ oder $r > 6$ schneidet E_r die Pyramide nur in der Seitenkante BC.

Aufgabe II 2.1

a) Eine Gleichung der Ebene ist $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R}$. (4VP)

Die Ebene ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

Die Gerade g hat einen Abstand von 2 zur Ebene E.

b) Der Punkt T hat die Koordinaten $T(2\,|\,3\,|\,5)$. (5VP)

Das Dreieck ABT hat einen Flächeninhalt von 4 FE.

Der Punkt $M(2\,|\,3\,|\,3)$ hat von allen drei Punkten denselben Abstand.

c) Der Doppelkegel hat ein Volumen von $\frac{16}{3}$ VE. (3VP)

Aufgabe II 2.2

Wählt man die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{PS} = \vec{c}$ als Grundlage, so ergibt sich (4VP)

$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ und $\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.