Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Es ist $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$.

Aufgabe 2 (2VP)

Eine Stammfunktion ist F mit $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$ besitzt die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\ln 2;\, \ln 3\right\}$.

Aufgabe 4 (3VP)

Die Tangente im Punkt $P(1 \mid 4)$ ist t: $y = -2x + 6$.

Sie schneidet die x-Achse im Punkt $S(3 \mid 0)$.

Aufgabe 5 (6VP)

1. Wegen $f'(x) > 0$ für $-3 \leq x \leq 3$ ist die Aussage wahr.
2. Da die Ableitung ein Extremum bei $x = 0$ besitzt, ist die Aussage wahr.
3. Da f für $-3 \leq x \leq 3$ streng monoton wachsend ist, ist die Aussage falsch.
4. Die Funktion f ist nur eine der Stammfunktionen von f' und damit unbestimmt, die Aussage ist unentscheidbar.

Aufgabe 6 (4VP)

Der Punkt A liegt für $t = 1$ auf g.

Die Gerade g ist orthogonal zu E, da ihr Richtungsvektor parallel zu deren Normalenvektor verläuft.

Der Ebenenpunkt $P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right)$ hat von A den kleinsten Abstand.

Aufgabe 7 (3VP)

Die Ebene E besitzt die Koordinatengleichung E: $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$.

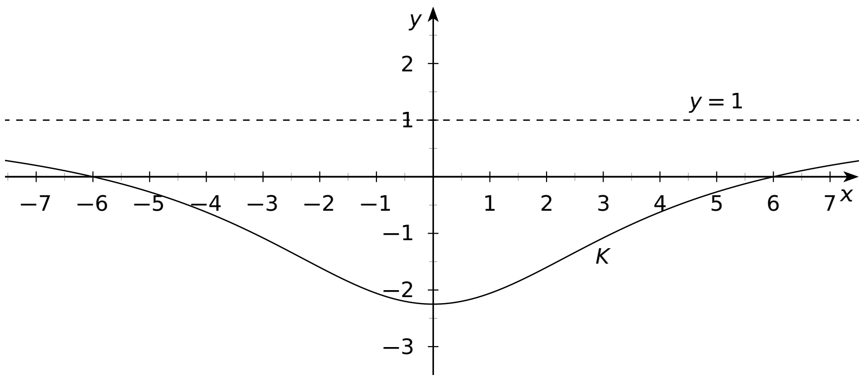
Aufgabe 8 (3VP)

Aufstellen einer Hilfsebene H orthogonal zu g durch A, Bestimmung des Schnittpunktes S von g und H, bestimmen des Abstands als Länge der Strecke $\overline{AS}$.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) Es ergibt sich das folgende Schaubild: (7VP)



Es gilt $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x^2-36}{x^2+16} = 1$, somit ist $y = 1$ die waagrechte Asymptote von K.

Die zweite Ableitung f'' von f besitzt genau zwei Nullstellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\dfrac{16}{3}}$. Da sie an diesen Stellen auch ihr Vorzeichen wechselt, muss das Schaubild von f damit genau zwei Wendepunkte besitzen.

b) Im Kanal befinden sich etwa $6775\ \text{m}^3$ Wasser, wenn er vollständig gefüllt ist. (5VP)

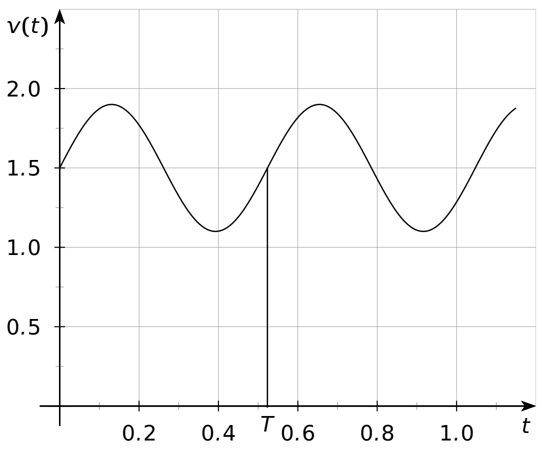
Wenn der Pegel 1 m hoch steht, ist der Kanal zu etwa 24% gefüllt.

c) Die Person darf höchstens etwa $3,23$ m vom Kanalrand entfernt stehen, um gerade noch den tiefsten Punkt sehen zu können. (6VP)

Aufgabe I 2.1

(6VP)

Die Periodendauer ist $T = \dfrac{\pi}{6} \approx 0,52$ s.
Die Geschwindigkeit des Schwimmers schwankt zwischen $1,1$ m/s und $1,9$ m/s.
Die Geschwindigkeit nimmt etwa zu den Zeitpunkten $0,26$ s, $0,78$ s, $1,30$ s usw. am stärksten ab.
Innerhalb von 50 Perioden legt der Schwimmer eine Strecke von etwa $39,3$ m zurück.



Aufgabe I 2.2

a) Ein sinnvoller Definitionsbereich für α ist $D =]0^\circ; 90^\circ[$. (5VP)

Es ist $h = b \cdot \sin\alpha$ und $a = b + 2b \cdot \cos\alpha$. Für den Flächeninhalt gilt damit:

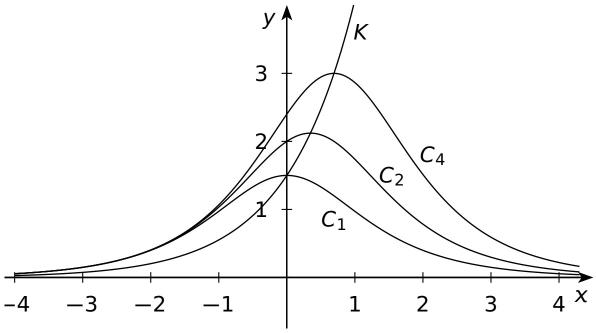
$$A(\alpha) = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = b^2(1+\cos\alpha) \cdot \sin\alpha.$$

b) Für $\alpha = 45^\circ$ wird das Volumen maximal, es beträgt dann $0,364\ \text{m}^3$. (7VP)

Wenn der Neigungswinkel etwa zwischen $30,2^\circ$ und $60,9^\circ$ liegt, kann man den Blumentrog mit 4 Säcken Blumenerde von je 80 Litern Inhalt befüllen.

Aufgabe I 3.1

a) Mithilfe des GTR ergeben sich wie rechts z.B. C_1, C_2 und C_4 (Beachte: $k > 0$!). (5VP)
Es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) = 0$. Die x-Achse ist somit waagrechte Asymptote aller C_k.



Gemeinsame Eigenschaften:

- Jedes Schaubild besitzt genau einen Extrempunkt, nämlich einen Hochpunkt.
- Jedes der Schaubilder verläuft oberhalb der x-Achse, die gleichzeitig ihre Asymptote darstellt.
- Jedes der Schaubilder besitzt exakt zwei Wendepunkte.
- Jedes Schaubild ist achsensymmetrisch zur einer Parallelen zur y-Achse, die durch seinen Hochpunkt verläuft.

b) Der Hochpunkt von C_k ist $H_k\left(\frac{1}{2}\ln k \mid dle| \frac{3}{2}\sqrt{k}\right)$. (6VP)

Die Ortskurve K hat die Gleichung $y = \frac{3}{2}e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

c) In den ersten 2 Minuten vergrößert sich die Fläche um etwa $5,1\ \text{cm}^2$. (3VP)

Aufgabe I 3.2

Für h_1 ist die Behauptung erfüllt und der Induktionsanfang damit gesichert. (4VP)

Es wird angenommen, dass die Behauptung für h_k gilt. Wird $h_{k+1}(x)$ als Produkt mit $h_{k+1}(x) = h_k(x) \cdot h_1(x)$ geschrieben, so ergibt sich:

$$h'_{k+1}(x) = h'_k(x) \cdot h_1(x) + h_k(x) \cdot h'_1(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}.$$

Die Behauptung gilt damit auch für $k+1$ und demnach insgesamt für alle $n \geq 1$.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) Zwei benachbarte Seitenflächen bilden einen (stumpfen) Winkel von etwa $101,5^\circ$. (6VP)

b) Die Einstiegsöffnung beansprucht $37,5\%$ der gesamten Vorderfläche. (5VP)

c) Die Strecke $C'D'$ besitzt eine Länge von $\frac{7}{6} \approx 1,17$ m. (5VP)

Aufgabe II 2.1

a) Die Ebene E_3 verläuft durch den Ursprung und enthält die x_2-Achse. (5VP)

Der Punkt D_a hat die Koordinaten $D_a\left(\frac{10}{1+a^2} \mid dle \mid 0 \mid dle \mid \frac{10a}{1+a^2}\right)$ (vgl. Teilergebnis).

b) Wegen $\overrightarrow{AD_a} \cdot \overrightarrow{BD_a} = 0$ hat jedes Dreieck ABD_a einen rechten Winkel im Punkt D_a. (3VP)

Aufgabe II 2.2

Der Punkt T teilt die Strecke BD im Verhältnis $3:5$. (8VP)