Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}$$

Aufgabe 2 (2VP)

$$\int_0^1 (2x-1)^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 3 (3VP)

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\mathbb{L} = \{-\ln 2\}$.

Aufgabe 4 (4VP)

a) Spiegelung an x- und y-Achse, Verschiebung um $(+2)$ Einheiten entlang der y-Achse.

b) Wegen $f(0) = g(0)$ und $f'(0) = g'(0)$ berühren sich die Schaubilder in $P(0\,|\,1)$.

Aufgabe 5 (5VP)

(1) Es ist $F'(x) = f(x) > 0$ für $-3 \leq x \leq 1$.

(2) Das Schaubild hat zwei Extrem- und eine Sattelstelle im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$.

(3) Es gilt laut Abbildung $f(3) - f(0) = -1$.

(4) Für $x = 0$ ist $f'(x) = 0$, in der Umgebung davon gilt $f'(x) < 0$.

Aufgabe 6 (4VP)

Es gilt $x_1 = -1 - t$, $x_2 = 2 - 2t$ und $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Die drei Gleichungen stellen drei Ebenen dar, die sich in einer gemeinsamen Geraden schneiden.

Aufgabe 7 (3VP)

a) Einsetzen von E in g ergibt einen Widerspruch, E und g liegen also parallel.

b) Der Abstand beträgt 9 LE.

Aufgabe 8 (3VP)

Aufstellen einer Hilfsebene senkrecht zu g durch A und Berechnung des Schnittpunkts.
Der gesuchte Punkt B ist gerade dieser Schnittpunkt.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) Die maximale Definitionsmenge ist $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. (7VP)

K_2 hat die senkrechte Asymptote $x = -2$ und die waagrechte Asymptote $y = 0$ (x-Achse).

Die Wendepunkte von K_2 lauten $W_1\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ und $W_2\left(\sqrt[3]{4}\,\middle|\,\frac{1}{3}\right)$.

Der Punkt $P(1{,}07\,|\,0{,}43)$ auf K_2 hat von $A(1\,|\,0)$ den kleinsten Abstand.

b) Da die Gleichung $f_2(x) = f_a(x)$ keine Lösung besitzt, haben K_2 und K_a keine gemeinsamen Punkte. (5VP)

K_a hat im Punkt $Q_a\left(0\,\middle|\,\frac{1}{a}\right)$ eine waagrechte Tangente.

Die Punkte Q_a liegen allesamt auf der y-Achse.

c) Eine beschriebene Düse hat eine Masse von etwa 12,13 Gramm. (6VP)

Der Kegel hat einen Grundkreisradius von mindestens etwa 1,21 cm.

Aufgabe I 2.1

a) Zwischen 3,5 und 8,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Zuflussrate größer als 100 m^3/h. (4VP)

Die momentane Zuflussrate nimmt 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.

b) Nach 24 Stunden enthält das Becken 6440 m^3 Wasser. (5VP)

Zum Zeitpunkt t beträgt das Volumen $V(t) = \frac{600}{\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right] + 60t + 5000$ Kubikmeter.

Etwa 10,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich 6000 m^3 Wasser im Becken.

Aufgabe I 2.2

a) Der Hochpunkt hat die Koordinaten $H_a\left(\frac{\pi}{2a}\,\middle|\,2a\right)$. (4VP)

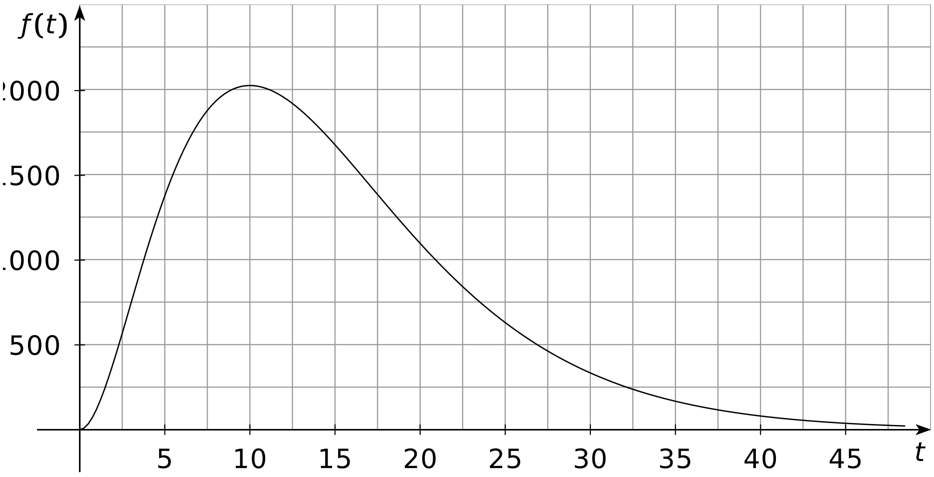
Die Hochpunkte liegen auf der Ortskurve o: $y = \frac{\pi}{x}$ für $x > 0$.

b) Der Wendepunkt mit kleinstem positiven x-Wert ist $W_a\left(\frac{\pi}{a}\,\middle|\,a\right)$. (5VP)

Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit Inhalt $\frac{1}{2}(\pi+1)^2$ ein, unabhängig für welches a.

Aufgabe I 3

a) Schaubild: (6VP)



Die meisten Personen erkranken 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn.

Für $t \geq 10$ gilt $f'(t) \leq 0$, die Erkrankungsrate ist dann also rückläufig.

Die stärkste Abnahme der Erkrankungsrate erfolgt 17 Wochen nach Beobachtungsbeginn.

b) Nach 12 Wochen waren etwa 16.236 Personen gemeldet. (6VP)

Nach t Wochen sind $A(t) = 37.600 - 750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0,2t}$ Personen gemeldet.

Die Anzahl von 20.000 Meldungen wurde etwa 14 Wochen nach Beobachtungsbeginn erreicht.

Wegen $\lim\limits_{t \to \infty} A(t) = 37.600$ bleibt die Meldungsanzahl langfristig unter 40.000.

c) Die zugehörige Differenzialgleichung lautet $B'(t) = 0,1 \cdot (30.000 - B(t))$. (6VP)

Die Anzahl der erkrankten Personen zum Zeitpunkt t ist $B(t) = 30.000 - 15.000 \cdot e^{-0,1t}$.

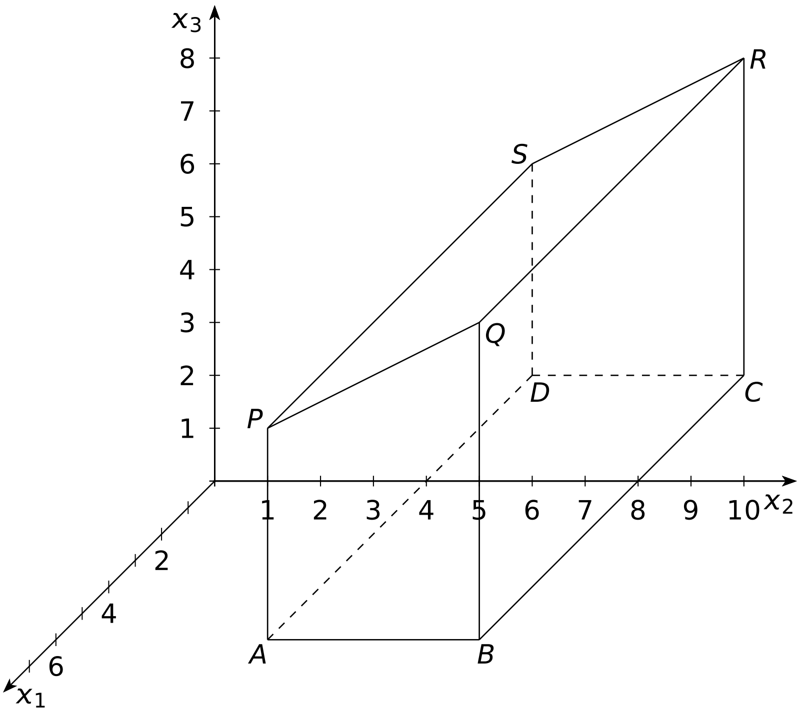
Nach vier Wochen sind etwa 19.945 Personen erkrankt.

Die angepasste Funktion hat die Gestalt $B(t) = 30.000 - 15.000 \cdot e^{-0,1572t}$.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) Zeichnung: (5VP)



Die Truhe hat ein Volumen von 200 VE.

Der Truhendeckel liegt in der Ebene $E_{\text{Deckel}}: x_2 - 2x_3 = -4$.

b) Die Deckelebene entspricht der Scharebene E_2, da sie dieselbe Gleichung besitzt. (7VP)

Die Rückwand liegt in der Scharebene E_0: $x_2 = 8$, da alle Punkte der Rückwand diese x_2-Koordinate besitzen.

Die Gerade $g = QR$ erfüllt für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Ebenengleichung von E_a, liegt also in allen Scharebenen.

Der Schnittwinkel zwischen E_0 und E_2 hat das Maß $\varphi \approx 63{,}7^\circ$.

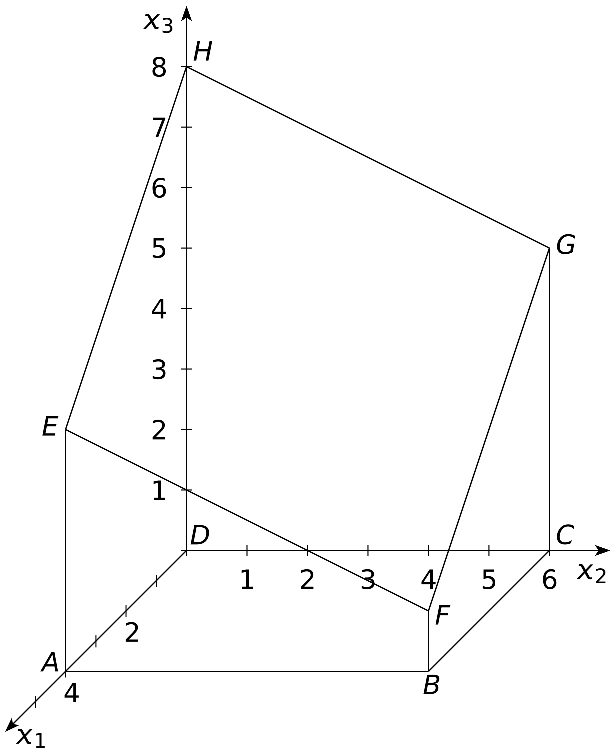
Die Scharebene $E_{-\frac{4}{3}}: x_2 + \dfrac{4}{3}x_3 = 16$ schließt mit E_2 ebenfalls diesen Winkel ein.

c) Der geöffnete Deckel liegt in der Scharebene $E_{-\frac{1}{2}}: x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 11$. (4VP)

Der Drehpunkt P^* hat die Koordinaten $P^*(6\,|\,6\,|\,10)$.

Aufgabe II 2

a) Zeichnung: (8VP)



Die Dachfläche liegt in der Ebene E_{Dach}: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$.

Die Dachfläche besitzt einen Neigungswinkel von etwa 48,2°.

Wegen $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ bildet die Dachfläche ein Parallelogramm.

Die Dachfläche hat einen Inhalt von exakt 36 m^2.

b) Die Lampe muss im Innern des Gebäudes im Punkt $L(2|2|2)$ angebracht werden. (4VP)

c) Die Person muss mindestens 1,6 Meter in x_2-Richtung gehen. (4VP)