Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

▶ Funktion f ableiten

Du kannst f nach der Produkt- und nach der Kettenregel ableiten.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (2-3x)\cdot \mathrm{e}^{-x} \\
f'(x) &= (-3)\cdot \mathrm{e}^{-x} + (2-3x)\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{-x} && \text{ausmultiplizieren} \\
&= -3\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 3x\cdot \mathrm{e}^{-x} && \text{zusammenfassen} \\
&= 3x\cdot \mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-x} && \text{ausklammern} \\
&= (3x-5)\cdot \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

Die erste Ableitung der Funktion f lautet $f'(x) = (3x-5)\cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 2 (2VP)

▶ Integral berechnen

Du berechnest das Integral nach dem Hauptsatz der Integralrechnung. Beachte bei der Bildung der Stammfunktion, dass $\frac{1}{x}$ die erste Ableitung von $\ln(x)$ ist.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{2}{x}+4x\right) x &= \int_1^{\mathrm{e}} \left(2\cdot\frac{1}{x}+4x\right) x \\
&= \left[2\cdot\ln(x) + 4\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \left[2\ln(x)+2x^2\right] \\
&= \left(2\ln(\mathrm{e}) + 2\cdot \mathrm{e}^2\right) - \left(2\ln(1)+2\right) && \ln(1)=0,\ \ln(\mathrm{e})=1 \\
&= 2 + 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2
\end{aligned}
$$

Für das Integral ergibt sich der Wert $2\mathrm{e}^2$.

Aufgabe 3 (3VP)

▶ Nullstellen von f bestimmen

Der Funktionsterm von f lässt sich weder durch Ausklammern noch durch eine Substitution vereinfachen. Du kannst aber eine **Polynomdivision** durchführen: Teile den Funktionsterm von f durch den Ausdruck $(x-1)$.

$$
\begin{array}{l}
\left(\;2x^3+3x^2-8x+3\right):\left(x-1\right)=2x^2+5x-3\\
\underline{-2x^3+2x^2}\\
\qquad 5x^2-8x\\
\qquad \underline{-5x^2+5x}\\
\qquad\qquad -3x+3\\
\qquad\qquad \underline{3x-3}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Nullstellen des Terms, der sich hieraus ergibt, kannst du mit der Mitternachtsformel bestimmen:

$$
\begin{aligned}
2x^2+5x-3 &= 0\\
x_{2,3} &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}\\
&= \frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}\\
&= \frac{-5\pm 7}{4}\\
x_2 &= \frac{-5-7}{4} = -3\\
x_3 &= \frac{-5+7}{4} = 0,5
\end{aligned}
$$

alternative Lösung

PQ-Formel:

$$
\begin{aligned}
2x^2+5x-3 &= 0 \qquad |:2\\
x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} &= 0\\
x_{2,3} &= -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\\
&= -\frac{5}{2\cdot 2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2\cdot 2}\right)^2+\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}}\\
&= -\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}}\\
&= -\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}\\
x_2 &= -\frac{5}{4}-\frac{7}{4} = -3\\
x_3 &= -\frac{5}{4}+\frac{7}{4} = 0,5
\end{aligned}
$$

Die Funktion f kann nicht mehr als drei Nullstellen haben, da sie eine Funktion dritten Grades ist. Somit lauten die einzigen beiden weiteren Nullstellen von f $x_2=-3$ und $x_3=0,5$.

Aufgabe 4 (4VP)

a) ▶ **Asymptoten von K angeben**

K kann senkrechte und waagerechte bzw. schiefe Asymptoten besitzen.

1. Schritt: Senkrechte Asymptoten

Senkrechte Asymptoten können an den Stellen auftreten, an denen f nicht definiert ist. Da f eine gebrochenrationale Funktion ist und nicht durch Null geteilt werden darf, betrachtest du die **Nullstellen des Nenners** im Funktionsterm von f. An diesen Stellen ist f nicht definiert.

Deshalb besitzt K eine senkrechte Asymptote bei $x=0$.

2. Schritt: Waagerechte bzw. schiefe Asymptoten

Die Gleichung der waagerechten bzw. Schiefen Asymptoten von K erhältst du, indem du den **Grenzwert** von f für $x \to \infty$ betrachtest.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-4x^2}{x^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - 4\right) = -4$$

K besitzt eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = -4$.

b) ► **Schnittpunkt der Tangenten mit der x-Achse bestimmen**

Ermittle die Gleichung der Tangente an K im Punkt P. Die Koordinaten des Punktes sind noch unvollständig:

$$f(1) = \frac{1-4}{1} = -3 \qquad \Longrightarrow P(1 \mid -3)$$

Eine Tangente t ist eine Gerade und lässt sich allgemein beschreiben durch die Gleichung $y = mx + b$. Dabei ist m die Steigung und B der y-Achsenabschnitt der Tangente. Die Steigung der Tangente ist identisch mit der Steigung von K im Berührpunkt $P(1 \mid f(1))$. Die Steigung einer Funktion kannst du mit der ersten Ableitung f' bestimmen. Es gilt also $m = f'(1)$.

Du kannst den Funktionsterm von f vereinfachen und somit nach der Potenzregel ableiten. Auch eine Ableitung nach der Quotientenregel ist möglich.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 4 = x^{-2} - 4$$
$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

Mit $m = f'(1)$ ergibt sich für die Steigung der Tangenten $m = \frac{-2}{1^3} = -2$. Die Gleichung der Tangente lautet bisher: $y = -2x + b$.

Du kannst b bestimmen, indem die Koordinaten des Punktes $P(1 \mid -3)$ in diese Gleichung einsetzt und nach b auflöst:

$$\begin{aligned} -3 &= -2 \cdot 1 + b \\ -3 &= -2 + b \qquad \mid +2 \\ -1 &= b \end{aligned}$$

Somit lautet die Tangentengleichung:

$$t: y = -2 \cdot x - 1$$

In der Aufgabenstellung wird nun nach dem Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse gefragt. Setze die Gleichung der Tangente also mit 0 gleich und löse sie anschließend nach x auf:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot x - 1 && \mid +1 \\ 1 &= -2 \cdot x && \mid :(-2) \\ \frac{1}{-2} &= x \\ -0{,}5 &= x \end{aligned}$$

Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $S(-0,5 \mid 0)$.

Aufgabe 5 (5VP)

a) ▶ **Schaubild von f begründen**

f ist eine gebrochenrationale Funktion. Wenn du ihren Grenzwert für $x \to \infty$ betrachtest, erhältst du die Gleichung der waagerechten Asymptoten ihres Schaubildes:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\frac{a}{1+x^2}}_{\to 0} - 1 \right) = -1$$

Nur das Schaubild in Abbildung 2 weist eine waagerechte Asymptote bei $y = -1$ auf. Somit wird in Abbildung 2 das Schaubild von f dargestellt.

▶ **Wert für a bestimmen**

Du kannst den zugehörigen Wert für a berechnen, wenn du die Koordinaten eines Punktes in die Funktionsgleichung einsetzt, der auf dem Schaubild von f liegt. Betrachte also Abbildung 2. Du kannst erkennen, dass das Schaubild von f z.B. durch den Punkt $P(0 \mid 2)$ verläuft. Setze die Koordinaten dieses Punktes in $f(x)$ ein und löse dann nach a auf:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{a}{1+0^2} - 1 \\ 2 &= a - 1 && \mid +1 \\ 3 &= a \end{aligned}$$

Der zugehörige Wert für a beträgt $a = 3$.

b) ▶ **Schaubild der Ableitungsfunktion identifizieren**

Ableitungsfunktionen geben die Steigungen an der jeweiligen x-Stellen der Ursprungsfunktion an. Du kannst also bereits aus dem Schaubild von f in Abbildung 2 einschätzen, wie das Schaubild der Ableitungsfunktion in etwa verlaufen muss. Im Intervall $[-\infty, 0[$ steigt das Schaubild von f, die Steigung ist also positiv, und im Intervall $]0, \infty[$ ist die Steigung negativ. An der Stelle $x = 0$ besitzt f eine Extremstelle mit Steigung Null.

Das Schaubild der Ableitungsfunktion muss also im Intervall $]-\infty; 0[$ **oberhalb** der x-Achse verlaufen, bei $x = 0$ die x-Achse schneiden und im Intervall $]0; \infty[$ **unterhalb** der x-Achse verlaufen. Dies trifft alles nur auf das Schaubild in Abbildung 3 zu.

► **Schaubild der Integralfunktion identifizieren**

Betrachte zunächst die Funktionsgleichung der Integralfunktion: Die Variable x dient als **obere Grenze** des Integrals. Für $x = 2$ ergibt sich also:

$I(2) = \int_2^2 f(t)t = [F(t)]_2^2 = F(2) - F(2) = 0.$

Aufgrund dieser Eigenschaft muss das Schaubild der Integralfunktion bei $x = 2$ eine Nullstelle besitzen. Das einzige Schaubild, das diese Bedingung erfüllt, ist das in Abbildung 4.

Aufgabe 6 (3VP)

► **Lage der Punkte überprüfen**

Eine Ebene lässt sich durch drei Punkte eindeutig bestimmen. Du kannst so vorgehen: Du bestimmst die Gleichung einer Ebene, in der drei der vier gegebenen Punkte liegen. Anschließend überprüfst du mit Punktprobe, ob auch der vierte Punkt in der Ebene liegt.

Wir wählen hier die Punkte A, B und C und benutzen den Ortsvektor $\overrightarrow{A}$ zum Punkt A als Stützvektor. Als Richtungsvektoren kannst du dann die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ benutzen.

$$
\begin{aligned}
E: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \qquad r, s \in \mathbb{R} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-4 \\ (-1)-1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ (-2)-4 \\ 1-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Punkte A, B und C liegen nun auf jeden Fall in der Ebene E. Setze die Koordinaten von Punkt D ein:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left| - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{I} & -3 &=& r + s \\
\text{II} & 5 &=& r - 3s \\
\text{III} & -1 &=& r
\end{array}
$$

Aus III ergibt sich $r = -1$. Setze dies ein in I und II:

$$\begin{array}{lrl}
\text{I} & -3=-1+\quad s & \mid +1 \\
\text{II} & 5=-1-\quad 3s & \mid +1 \\
\hline
\text{I} & -2=\qquad s & \\
\text{II} & 6=\quad -3s &
\end{array}$$

Sowohl aus I als auch aus II folgt $s=-2$. Da sich für r und s **einheitliche** Lösungen ergeben, liegt D in der Ebene E. Da A, B und C auch in dieser Ebene liegen, ist gezeigt, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

Aufgabe 7 (4VP)

a) ▶ **Abstand zur Ebene berechnen**

Die Gleichung der Ebene E ist dir in Koordinatenform gegeben. Du kannst aus der Koordinatenform die **Hessesche Normalenform** der Ebene E entwickeln und mit Hilfe dieser Form den Abstand von P zu E berechnen.

Die Hessesche Normalenform lautet allgemein $d(P;E)=\left|\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

Für E ergibt sich damit: $d(P;E)=\left|\dfrac{3x_1-4x_3+7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=\left|\dfrac{3x_1-4x_3+7}{5}\right|$.

Du kannst nun die Koordinaten von P in diese Gleichung einsetzen. Das Ergebnis entspricht dem Abstand von P zu E:

$$=\frac{|3\cdot 9-4\cdot 1+7|}{5}=\frac{|27-4+7|}{5}=\frac{|30|}{5}=6$$

Der Abstand des Punktes P zur Ebene E beträgt 6 LE.

b) ▶ **Koordinaten von Q**

Die Punkte Q, S und P liegen alle auf der Geraden durch S und P. Bestimme zunächst eine Gleichung dieser Geraden. Wir wählen hier den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ zum Punkt S als Stützvektor und den Vektor $\overrightarrow{SP}$ als Richtungsvektor der Geraden:

$$g:\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9&-&(-1)\\-4&-&1\\1&-&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}t\cdot\begin{pmatrix}10\\-5\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Es gibt nun zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, die Koordinaten von Q zu ermitteln; zum einen über die **Hessesche Normalenform der Ebene**, zum anderen über den **Richtungsvektor der Geraden**.

►► Lösungsweg A: Lösung über die Hessesche Normalenform

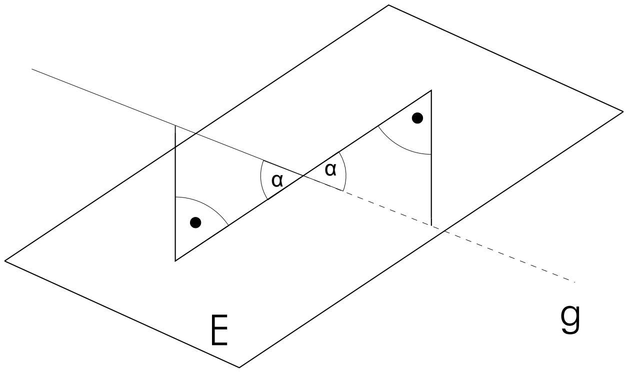
Q liegt irgendwo auf dieser Geraden. Seine Koordinaten lauten somit allgemein $Q\,(-1+2t \mid 1-t \mid 1)$. Der Abstand von Q zur Ebene E soll so groß sein wie der Abstand von P zur Ebene E. Diesen Abstand hast du eben berechnet, er beträgt 6 LE. Mit Hilfe der **Hesseschen Normalenform** von E ergibt sich somit die Gleichung:

$$\begin{aligned} d(Q;P) = 6 &= \left|\frac{3\cdot(-1+2t)-4\cdot 1+7}{5}\right| = \left|\frac{-3+6t-4+7}{5}\right| = \left|\frac{6t}{5}\right| && \mid \cdot 5 \\ 30 &= |6t| && \mid :6 \\ |t| &= 5 \\ t &= \pm 5 \end{aligned}$$

Setze $t=5$ und $t=-5$ ein in die allgemeinen Koordinaten von Q. Für $t=5$ ergibt sich der Punkt P aus der Aufgabenstellung. Für $t=-5$ ergibt sich jedoch der Punkt $Q\,(-11 \mid 6 \mid 1)$.

►► Lösungsweg B: Lösungsweg über den Richtungsvektor der Geraden

Der Abstand eines Punktes von einer Ebene wird immer **senkrecht** zur Ebene bestimmt. Q liegt auf der Geraden g durch S und P. Da S in der Ebene E und auf der Geraden g liegt, bildet S den Schnittpunkt von g mit E. Betrachte diesen Schnitt in einer Skizze:



Der Schnittwinkel α von Gerade und Ebene ist vor und hinter dem Schnittpunkt S gleich. Die Abstände der Punkte auf der Geraden werden also auf beiden Seiten des Schnittpunktes **gleichmäßig** größer. Das heißt also: Haben zwei Punkte auf g den gleichen Abstand zum Schnittpunkt S, so sind sie auch gleich weit von der Ebene E entfernt.

Der Punkt S hat von Q denselben Abstand wie von P. Da diese drei Punkte auf einer Geraden liegen, berechnest du die Koordinaten von Q mit Hilfe von Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-1)-9 \\ 1-(-4) \\ 1-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Koordinaten von Q lauten $(-11 \mid 6 \mid 1)$.

Aufgabe 8 (3VP)

► Verfahren zur Spiegelung beschreiben

Die Geraden g und g' sind „Spiegelgeraden" bezüglich der Ebene E. Da sich g und E in einem Punkt S schneiden und S folglich in der Ebene E liegt, bleibt er unter der Spiegelung erhalten und liegt auf **beiden Geraden** g und g'.

Um die Gerade g' eindeutig zu bestimmen benötigst du aber zwei Punkte. Wähle deshalb einen beliebigen weiteren Punkt P auf g. Du kannst diesen Punkt an E spiegeln, indem du zunächst die Gleichung einer Hilfsgeraden h bestimmst. h soll orthogonal zu E sein und durch P verlaufen. Dabei entspricht der Richtungsvektor dieser Hilfsgeraden h dem Normalenvektor der Ebene. Ermittle dann den Schnittpunkt F von h und E. Den Spiegelpunkt P' erhältst du nun mit $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$.

Du kennst nun die Koordinaten von S und von P'. Die gespiegelte Gerade g' verläuft durch diese beiden Punkte. Somit kannst du die Geradengleichung aufstellen:

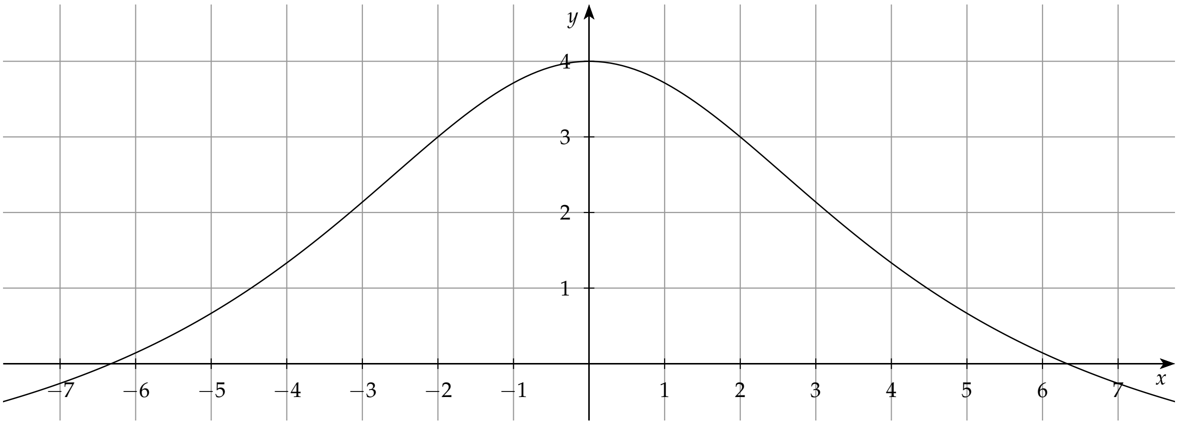
$$g': \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SP'} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wahlteil I

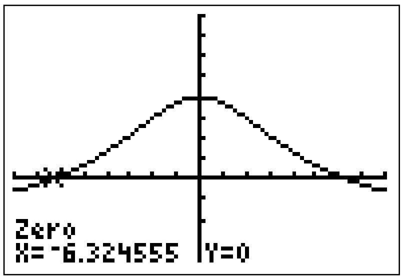
Aufgabe I 1.1

a) **► Breite des Walls berechnen** (4VP)

Gib zuerst die Funktion f als Y_1 in den GTR ein. Das Schaubild von f sieht so aus:



Die Breite des Schutzwalls entspricht dem Abstand der Nullstellen. Bestimme sie mit dem GTR. Verwende dazu den GTR-Befehl $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{ZERO}}$.



$x_1 \approx -6{,}32, \quad x_2 \approx 6{,}32$

Der Wall erstreckt sich von $x_1 \approx -6{,}32$ bis $x_2 \approx 6{,}32$. Daraus kannst du die Breite des Walls berechnen:

$x_2 - x_1 \approx 6{,}32 - (-6{,}32) \approx 12{,}65$

Somit ist der Lärmschutzwall etwa $12{,}65\,\text{m}$ breit.

► Symmetrischen Querschnitt nachweisen

Das Schaubild von f beschreibt das Profil des Querschnitts des Walls. Das Schaubild von f legt nahe, dass f achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Du kannst eine Achsensymmetrie zur y-Achse nachweisen, indem du zeigst, dass $f(x) = f(-x)$ ist:

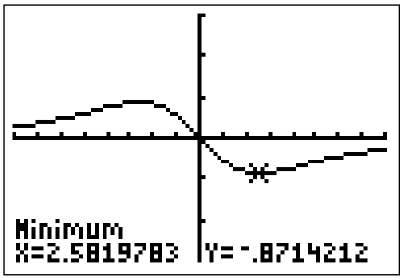
$$f(-x) = \frac{120}{(-x)^2 + 20} - 2 = \frac{120}{x^2 + 20} - 2 = f(x)$$

Das Minuszeichen löst sich bei der Quadrierung $(-x)^2 = x^2$ auf. Deshalb hat der Wall einen symmetrischen Querschnitt.

► **Maximales Gefälle überprüfen**

Mit dem Gefälle wird die **Steigung** von f angesprochen. Ein Gefälle von 100 % entspricht genau der Steigung 1. Das heißt, dass in keinem Punkt der Betrag der Steigung größer als 1 sein darf. Die Steigung wird dir gegeben durch die erste Ableitung. Du kannst dir das Schaubild von f' vom GTR mit $\boxed{Y_2\text{=nDeriv}(Y_1\text{,X,X})}$ anzeigen lassen. Da der Wall symmetrisch ist, brauchst du nur auf einer Seite das Gefälle zu betrachten.

Berechne mit $\boxed{\text{2ND} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{MINIMUM}}$ (bzw. MAXIMUM) das Minimum bzw. das Maximum der Ableitungsfunktion:



An den Stellen $x_{1,2} = \pm 2,58$ besitzt f die extremste Steigung von $\pm 0,87$. Es wird der Betrag der Steigung betrachtet. Da $0,87 < 1$, ist das Gefälle ist nicht größer als 100 %.

b) ► **Volumen des Lärmschutzwalls berechnen** (6VP)

Du kannst dir den Lärmschutzwall vereinfacht als **Prisma** vorstellen. Das Volumen eines Prismas berechnest du über die Formel $V = G \cdot h$. Grund- und Deckfläche werden jeweils von der Querschnittsfläche gebildet, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. Als Höhe des Prismas dient mit 500 m die Länge des Walls.

Den Flächeninhalt der Grundfläche kannst du über das Integral von $f(x)$ im Bereich von $x_1 \approx -6,32$ bis $x_2 \approx 6,32$ berechnen. Es entspricht der Maßzahl der Fläche, die vom Schaubild von f und der x-Achse zwischen den beiden Nullstellen eingeschlossen wird.

Den Befehl für Integrieren findest du unter $\boxed{\text{Math} \to \text{fnInt}}$. Achte auf die Reihenfolge: fnInt(Funktion, Variable, untere Grenze, obere Grenze.

$\boxed{\text{fnInt}(Y_1, X, -6.32, 6.32)}$

$$A = \int_{-6,32}^{6,32} \left(\frac{120}{x^2+20} - 2 \right) x \approx \; 25,97$$

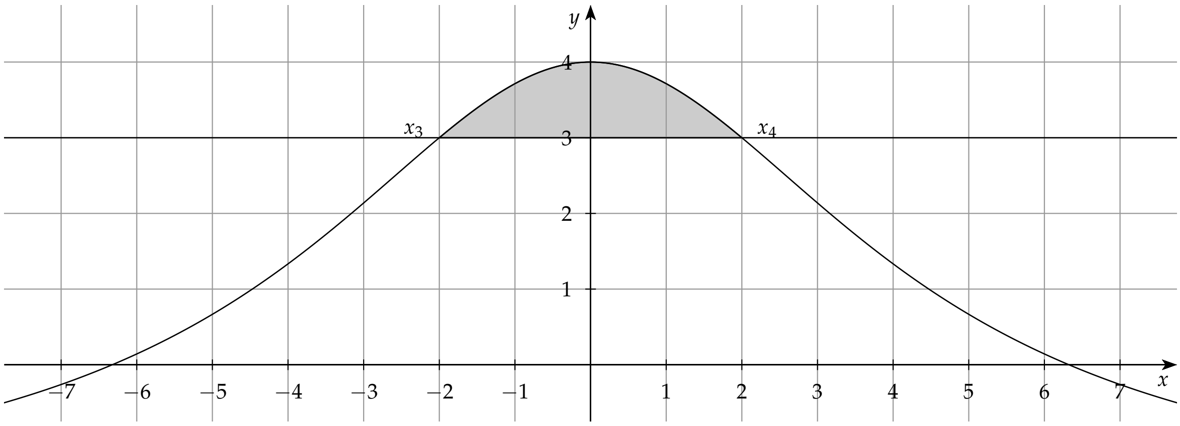
Mit der Länge von 500 m ergibt sich nach der Volumenformel von oben:

$V = 25,97\,\text{m}^2 \cdot 500\,\text{m} = 12.985\,\text{m}^3$

Das Volumen des Lärmschutzwalls beträgt $12.985\,\text{m}^3$.

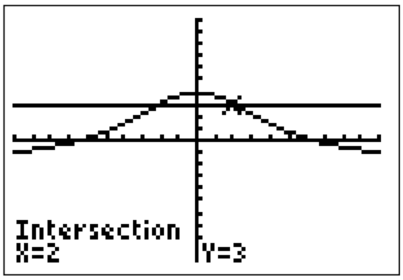
► **Breite des Fahrwegs berechnen**

Der Wall wird auf einer Höhe von 3 m abgetragen. Grafisch lässt sich dieser Vorgang so darstellen: Auf einer Höhe von 3 LE wird das Schaubild von f von einer waagerechten Geraden geschnitten. Die Breite des Wegs entspricht genau dem Abstand der Schnittstellen von f mit dieser Geraden.



Die waagerechte Gerade hat die Gleichung $y = 3$. Du kannst die Schnittstellen von f mit $y = 3$ allgemein durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen berechnen: $f(x) = 3$.

Zeichne das Schaubild von f und die Gerade $y = 3$ und berechne mit 2nd → TRACE (CALC) → INTERSECT die Schnittpunkte der Schaubilder



$x_3 = -2, \quad x_4 = 2$

Somit ist der Fahrweg genau 4 m breit.

► Volumen des abzutragenden Materials ermitteln

Es soll das Volumen des abzutragenden Materials berechnet werden. Du kannst vorgehen wie oben und diesen Körper als Prisma auffassen. Berechne wieder zunächst den Inhalt der Querschnittsfläche. Diese entspricht genau der **Schnittfläche**, die vom Schaubild von f und der Geraden mit der Gleichung $y = 3$ eingeschlossen wird. Wir haben sie im Schaubild von bereits mit eingezeichnet.

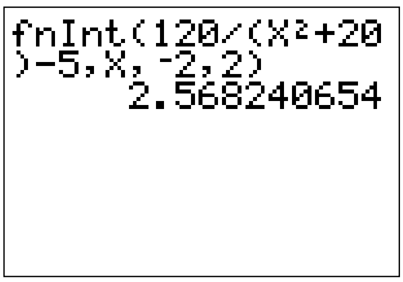
Als Grenzen des Integrals dienen die Schnittstellen der beiden Schaubilder.

$$A_{\text{abgetragen}} = \int_{-2}^{2} (f(x) - 3)\, x$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\frac{120}{x^2 + 20} - 5 \right)$$

Dieses Integral kannst du wieder mit dem GTR berechnen.

Verwende Math → fnInt und gib den Term ein, der integriert werden soll. Beachte dabei die Reihenfolge: fnInt(Funktion,Variable,untere Grenze,obere Grenze)



Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt etwa 2,57 FE.

Multipliziere diese Fläche nun wieder mit der Länge von 500 m:

$V = 2{,}57\,\text{m}^2 \cdot 500\,\text{m} = 1.285\,\text{m}^3$

Das Volumen des abzutragenden Materials beträgt $1.285\,\text{m}^3$.

► Verlängerung des Walls berechnen

Dieses Material soll nun an den abgeflachten Wall angefügt werden. Der daraus entstehende Wall unterscheidet sich vom ursprünglichen Wall also nur in der Grund- und Dachfläche und in der Länge, nicht aber im Volumen.
Du kannst zunächst die Querschnittsfläche des neuen, abgeflachten Walls betrachten. Ihr Inhalt entspricht genau der **Differenz** aus der ursprünglichen Fläche und der Fläche $A_{\text{abgetragen}}$:

$A_{\text{neu}} = 25{,}97 - 2{,}57 = 23{,}4.$

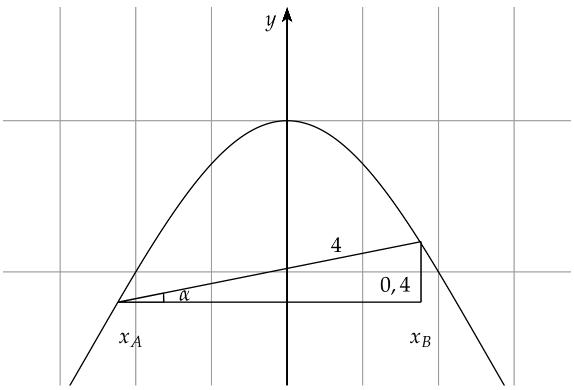
Der neue Wall besitzt mit dieser Querschnittsfläche und einer bislang unbekannten Länge ℓ das Volumen des alten Walls, nämlich $V = 12.985\,\text{m}^3$. Damit muss gelten:

$$\begin{aligned} 12.985 &= 23{,}4 \cdot \ell && \mid :23{,}4 \\ \ell &\approx 554{,}91 \end{aligned}$$

Der neue, abgeflachte Wall wäre insgesamt 554,91 m lang und damit um etwa 54,91 m länger als der alte Wall.

c) ► **Winkel der Neigung** (5VP)

Stelle den seitlich geneigten Fahrweg mit dem Höhenunterschied von 0,4 m in Form eines rechtwinkligen Dreiecks dar:



Den gesuchten Winkel kannst du mit dem Sinus berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{0{,}4}{4}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= 0{,}1 && \mid \sin^{-1} \\ \alpha &= 5{,}74^\circ \end{aligned}$$

Der Winkel ist 5,74 ° groß.

► Höhe des linken Randes

Der linke Rand befindet sich bei x_A, der rechte Rand ist bei x_B. Berechne zuerst mit dem Satz des Pythagoras den Abstand dieser beiden Punkte:

$$\begin{aligned} 0,4^2 + n^2 &= 4^2 \\ 0,16 + n^2 &= 16 \qquad \mid -0,16 \\ n^2 &= 15,84 \qquad \mid \sqrt{\ } \\ n &\approx 3,98 \end{aligned}$$

Außerdem befindet sich $f(x_B)$ $0,4$ Einheiten oberhalb von $f(x_A)$. Daraus ergibt sich eine Gleichung:

$$f(x_A) + 0,4 = f(x_B)$$

Ersetze den rechten Rand x_B mit $x_A + 3,98$:

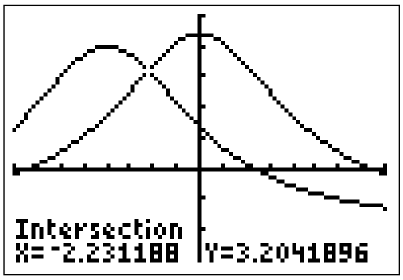
$$f(x_A) + 0,4 = f(x_A + 3,98)$$

Verwende dann den GTR, um den Wert für x_A auszurechnen. Dazu definierst du den linken Teil der Gleichung als Y_3 und den rechten Teil der Gleichung als Y_4:

$$Y_3 = 120 : (x^2 + 20) - 2 + 0.4$$

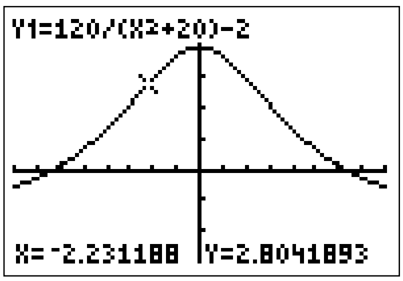
$$Y_4 = 120 : ((x + 3.98)^2 + 20) - 2$$

Benutze 2ND → TRACE (CALC) → INTERSECT und wähle die Funktionen Y_3 und Y_4 aus, um das Ergebnis für x_A zu erhalten:



$x_A \approx -2,23$

Setze diesen Wert für x in Y_1 mit 2ND → TRACE (CALC) → VALUE ein, damit du die Höhe des linken Randes erhältst:



$f(x_A) \approx 2,80$

Der linke Rand liegt in etwa $2,80\,\text{m}$ Höhe.

Aufgabe I 1.2

► Vollständige Induktion (3VP)

Bei der vollständigen Induktion geht es in dieser Aufgabe darum, zuerst die erste Ableitung zu berechnen. Vergleiche dann, ob sie mit der allgemeinen Ableitung $f^{(n)}(x)$ für $n = 1$ übereinstimmt. Dieser Schritt nennt sich der **Induktionsanfang**:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \mathrm{e}^x \\ f'(x) &= (1 \cdot \mathrm{e}^x) + (x \cdot (1 \cdot \mathrm{e}^x)) \\ &= \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x && \mathrm{e}^x \text{ ausklammern} \\ &= (1 + x) \cdot \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Für $n = 1$ stimmt die Formel mit der Ableitung überein.
Als nächstes beweist du, dass diese Formel für jede nachfolgende Ableitung ebenfalls stimmt. Dabei leitest du die angegebene Formel $f^{(k)}(x)$ ein Mal ab. Das Ergebnis sollte genau der Funktion $f^{(k+1)}(x)$ entsprechen. Dieser Schritt nennt sich der **Induktionsschritt**:

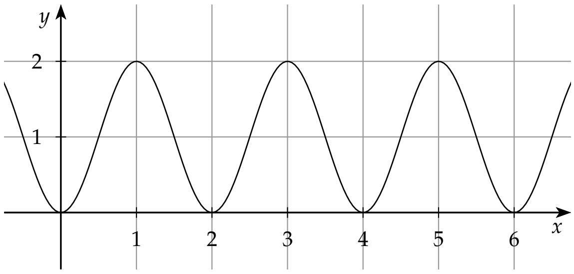
$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= (x + k) \cdot \mathrm{e}^x \\ \left(f^{(k)}(x)\right)' &= (1 \cdot \mathrm{e}^x) + ((x + k) \cdot (1 \cdot \mathrm{e}^x)) \\ &= \mathrm{e}^x + (x + k) \cdot \mathrm{e}^x && \mathrm{e}^x \text{ ausklammern} \\ &= (1 + (x + k)) \cdot \mathrm{e}^x = (x + (1 + k)) \cdot \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Die Behauptung stimmt also für jede k-te Ableitung.
Aus dem Induktionsbeginn und dem Induktionsschritt folgt, dass die Behauptung für alle $n \geq 1$ wahr ist.

Aufgabe I 2

a) ▶ **Nullstellen von f berechnen** (5VP)

Du kannst dir zur besseren Orientierung zunächst das Schaubild von f mit dem GTR zeichnen lassen:



Setze die Gleichung von f mit 0 gleich und löse nach x auf, um die Nullstellen zu erhalten:

$$1 - \cos(\pi x) = 0 \qquad | + \cos(\pi x)$$
$$\cos(\pi x) = 1 \qquad \text{Substitution: } z = \pi x$$
$$\cos(z) = 1$$

Die Nullstellen des Kosinus sind **ganzzahlige Vielfache von $\frac{\text{pi}}{2}$**: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, etc. Dafür kannst du kurz schreiben: $z_k = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Führe nun die **Resubstition** durch:

$$z_k = k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad | \; z = \pi \cdot x$$
$$\pi \cdot x_k = k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad | : \pi$$
$$x_k = 2k \qquad | : \pi$$

f besitzt die Nullstellen $x_k = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Dies sind **alle geraden Zahlen**.

▶ **K_f aus dem Schaubild des Kosinus entwickeln**

Die „allgemeine Kosinusfunktion“ hat die Gleichung $y = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$. Bei der „normalen“ Kosinusfunktion sind $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und $d = 0$.

Bringe die Gleichung von f auf diese Form und erhalte $f(x) = -\cos(\pi \cdot x) + 1$.

Im Funktionsterm von f kannst du also die Parameter $a = -1$, $b = \pi$ und $d = 1$ ausmachen. Jeder dieser Parameter hat einen bestimmten Einfluss auf das Schaubild von f.

$a = -1$ **spiegelt** das Schaubild der Kosinusfunktion an der x-Achse.

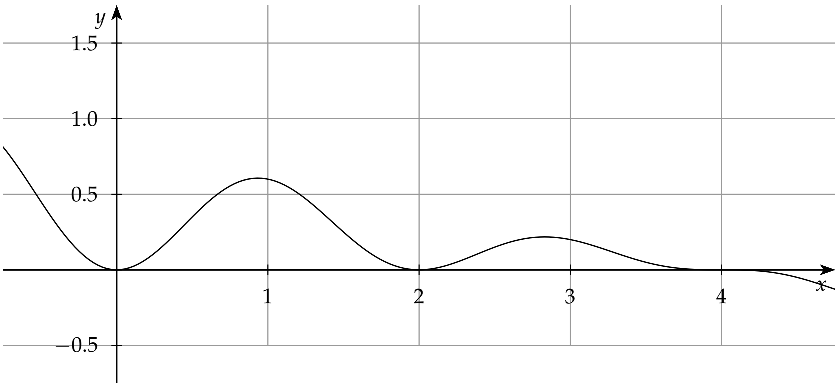
$b = \pi$ **streckt** das Schaubild der Kosinusfunktion um den Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung und verändert damit die **Periode** p von $p = 2\pi$ zu $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Diese Eigenschaft kannst auch an den **Nullstellen** von f wieder entdecken.

$d = 1$ schließlich **verschiebt** das Schaubild der Kosinusfunktion um 1 LE in y-Richtung, also nach oben.

Insgesamt kannst du sagen: Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild der Kosinusfunktion hervor durch eine Streckung um Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung, eine Spiegelung an der x-Achse und eine anschließende Verschiebung um 1 LE nach oben.

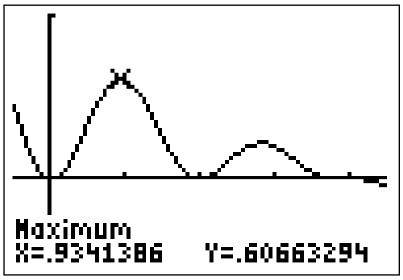
▶ Skizze von K_g

Du kannst dir das Schaubild von g im GTR ansehen und dich daran orientieren.



b) **▶ Höchsten Punkt der Bahn ermitteln** (5VP)

Die Koordinaten des höchsten Punktes ermittelst du mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MAXIMUM}}$.



$x_1 \approx 0,93, \quad g(x_1) \approx 0,61, \qquad \Longrightarrow H\,(0,93 \mid 0,61).$

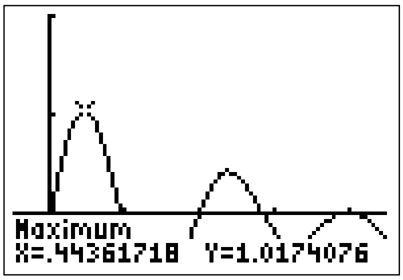
Der höchste Punkt der Minigolfbahn hat eine Höhe von etwa 0, 61 m.

▶ Stelle mit größter Steigung ermitteln

Die Steigung ist an einer bestimmten Stelle am größten. Das heißt, dass die Ableitungsfunktion an dieser Stelle ein Maximum besitzt. Du kannst dir nun vom GTR das Schaubild der Ableitungsfunktion g' ausgeben lassen und anschließend die Koordinaten des Hochpunktes berechnen.

Den Befehl für „Ableiten“ findest du im GRAPH-Menü unter $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{nDeriv(}}$. Beachte die Reihenfolge: nDeriv(Funktion,X,X).

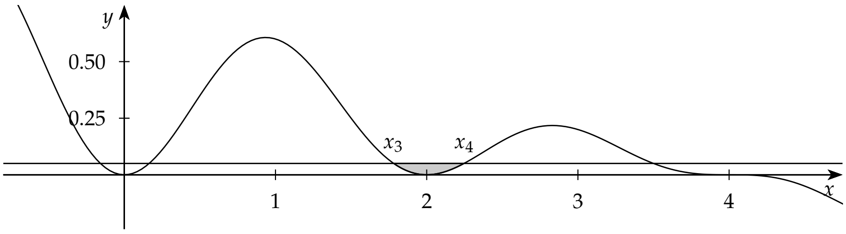
Zeichne das Schaubild von g' und bestimme dann wieder mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MAXIMUM}}$ die Koordinaten des Hochpunktes des Schaubildes:



$x_2 \approx 0,44$

Der Ball überwindet nach ca. $0,44\,\text{m}$ (in x-Richtung gemessen) die größte Steigung.

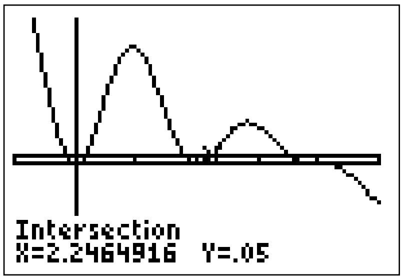
▶ Menge des angesammelten Wassers berechnen



Die Bahn ist $1,25\,\text{m}$ breit. Um das Volumen des angesammelten Wassers zu ermitteln benötigst du den Flächeninhalt der **Querschnittsfläche**. Diese ist oben im Schaubild eingefärbt. Sie wird eingeschlossen vom Graphen von g und der Geraden mit $y = 0,05$ (1 LE steht für 1 m).

Zu bestimmen sind also zunächst die beiden Schnittstellen der Schaubilder. Diese kannst du mit dem GTR ermitteln.

Zeichne das Schaubild von g und die Gerade mit $y = 0,05$ und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{Intersect}}$ die Koordinaten der Schnittpunkte.



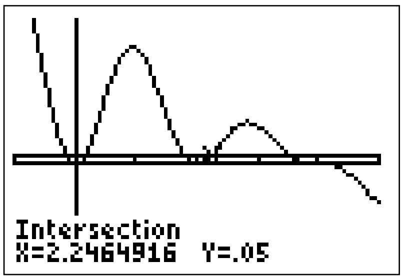
Es ergeben sich die Schnittstellen $x_3 \approx 1,782$ $x_4 \approx 2,2465$.

Den Inhalt A der Querschnittsfläche des Wassers erhältst du über das Integral:

$$A = \int_{1{,}782}^{2{,}2465} (0,05 - g(x))\,\text{d}x$$

Auch dieses Integral kannst du mit dem GTR berechnen: Unter $\boxed{\text{Math}}$ findest du den Befehl $\boxed{\text{fnInt}}$.

Achte auf die Reihenfolge: $\boxed{\text{fnInt(Funktion,Variable,untere Grenze,obere Grenze)}}$.
Als Funktion dient in diesem Fall $0,05 - g(x)$.



Auf diese Weise ergibt sich der Wert $A \approx 0,0153$.

Die Minigolfbahn ist $1,25\,\text{m}$. Für das Volumen des angesammelten Wassers ergibt sich damit nach der Formel $V = G \cdot h$ der Wert:

$V = 0,0153\,\text{m}^2 \cdot 1,25\,\text{m} \approx 0,0191\,\text{m}^3$

Ein Liter entspricht $1\,\text{dm}^3$. Rechne deshalb das Ergebnis in dm^3 um:

$0,0191\,\text{m}^3 = 19,1\,\text{dm}^3$

Es haben sich etwa $19,1\,\mathrm{l}$ Wasser zwischen den beiden Wellen angesammelt.

c) **► Maximale Höhe des Balls bestimmen** (4VP)

Bestimme zunächst die Funktionsgleichung der Parabel, die die Flugbahn beschreibt. Berechne dann die Koordinaten des Hochpunktes dieser Parabel.

1. Schritt: Funktionsgleichung bestimmen

Die Flugbahn des Balls wird durch eine Parabel beschrieben, d.h. durch das Schaubild einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades. Der Ansatz lautet daher:

$p(x) = ax^2 + bx + c$

Es sind drei Eigenschaften der Parabel bekannt:

1. Sie geht durch den Punkt $S(0,5 \mid g(0,5))$. $\Longrightarrow p(0,5) = g(0,5)$
2. Sie hat im Punkt S die Steigung $g'(0,5)$. $\Longrightarrow p'(0,5) = g'(0,5)$
3. Sie geht durch den Punkt $P(7 \mid 0)$. $\Longrightarrow p(7) = 0$

Du benötigst für die zweite Aussage noch die erste Ableitung von p:

$p'(x) = 2ax + b$

Die Werte für $g(0,5)$ und $g'(0,5)$ erhältst du z.B. mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{VALUE}}$:

$g(0,5) = 0,35$

$g'(0,5) \approx 1$

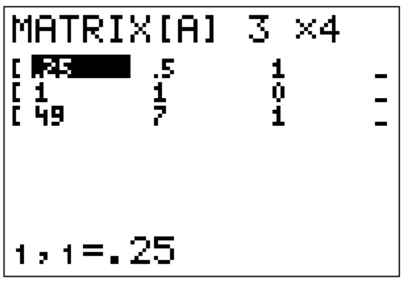
Sie können auch durch Einsetzen von $x = 0,5$ in die jeweiligen Funktionsgleichungen berechnet werden.

Aus den Bedingungen von oben ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

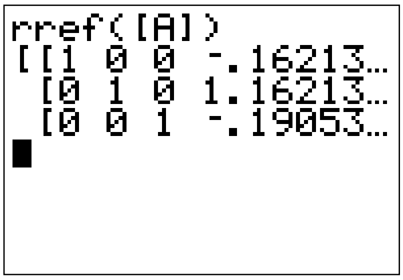
$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & p(0,5) = 0,35 & = & a \cdot 0,5^2 + b \cdot 0,5 + c \\
\mathrm{II} & p(7) = 0 & = & a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \\
\mathrm{III} & p'(0,5) = 1 & = & 2a \cdot 0,5 + b \\
\hline
\mathrm{I} & 0,35 & = & \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \\
\mathrm{II} & 0 & = & 49a + 7b + c \\
\mathrm{III} & 1 & = & a + b
\end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich als **Matrix** in den GTR eingeben:

Wechsle mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow x^{-1}\ \text{(MATRIX)} \rightarrow \text{EDIT}}$ ins Matrix-Menü und wähle eine 3x4-Matrix aus, in die du die Koeffizienten einsetzt:



Verlasse das Matrix-Menü und gib über $\boxed{\text{2nd} \to x^{-1}\text{ (MATRIX)} \to \text{Math}}$ den Befehl *rref(* ein. Setze die Matrix mit $\boxed{\text{2ND} \to x^{-1}\text{ (MATRIX)} \to \text{ENTER}}$ ein:



$$a \approx -0,162$$

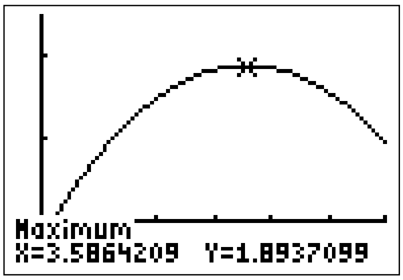
$$b \approx 1,162$$

$$c \approx -0,190$$

Somit lautet die Funktionsgleichung der Parabel, die die Flugbahn beschreibt $p(x) = -0,162 \cdot x^2 + 1,162 \cdot x - 0,190$.

2. Schritt: Hochpunkt der Parabel ermitteln

Diese Parabel besitzt einen Hochpunkt. Bestimme seine Koordinaten mit dem GTR:



$$x_5 \approx 3,58$$

$$p(x_5) \approx 1,89$$

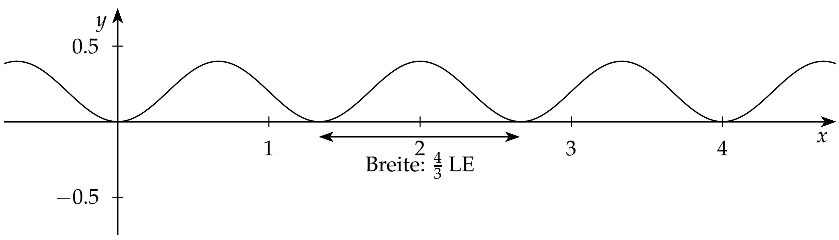
Die maximale Flughöhe des Balls beträgt ca. 1,89 m.

d) ▶ **Term für neuen Bahnverlauf bestimmen** (4VP)

Fertige zunächst eine Skizze an, die den neuen Bahnverlauf möglichst genau beschreibt. Folgende Bedingungen sind in der Aufgabenstellung gegeben:

- drei 40 cm hohe Wellen (40 cm entsprechen 0,4 LE
- Anfang und Ende der Bahn sollen **waagerecht** und wie bisher auf einer Höhe von 0 LE liegen

Ein mögliches Schaubild wäre folgendes:



Es bietet sich an, wieder eine **Kosinusfunktion** zur Beschreibung des neuen Bahnverlaufs zu benutzen. Angelehnt an den Funktionsterm von f lautet die Gleichung der neuen Funktion allgemein $y = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$.

Der Kosinus besitzt an der Stelle $x = 0$ normalerweise ein **Maximum**. Da unsere Funktion hier ein **Minimum** aufweist, muss der Wert für a ebenfalls wie in der Gleichung von f, ein **negativer** Wert sein.

Die **Höhe des Hindernisses** entspricht genau der **Amplitudenhöhe** der Kosinusfunktion und liegt bei $0,4$. Für a ergibt sich damit $a = -0,4$.

Der Querschnitt der Bahn ist insgesamt 4 LE lang. Auf diesen 4 LE wurden **gleichmäßig** drei Minima verteilt. Somit beträgt der **Abstand** zwischen den Minima bei $\frac{4}{3}$ LE.
Der Abstand der Minima entspricht der **Periode** p unserer neuen Funktion. Für sie gilt: $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{4}{3}$. Diese Gleichung kannst du nach b auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{b} &= \frac{4}{3} && \mid \cdot b \cdot \frac{3}{4} \\ \frac{6\pi}{4} &= \frac{3}{2}\pi \ b \end{aligned}$$

Schließlich verläuft das Schaubild der neuen Funktion durch den **Ursprung** $(0 \mid 0)$. Setze die bisher berechneten Parameter ein in die allgemeine Funktionsgleichung und erhalte:

$$y = -0,2 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi \cdot x\right) + c$$

Setze z.B. die Koordinaten des Ursprungs ein und löse nach c auf:

$$\begin{aligned} 0 &= -0,2 \cdot \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi \cdot 0\right) + c && (\cos(0) = 1) \\ 0 &= -0,2 + c && \mid +0,2 \\ 0,2 &= c \end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung der Funktion, deren Schaubild den neuen Bahnverlauf beschreibt,
$h(x) = -0,2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + 0,2$

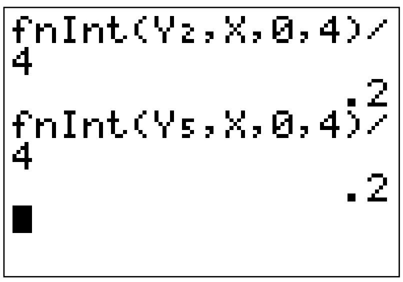
► Durchschnittliche Höhe der Bahnen vergleichen

Die **Höhe** der Bahnen entspricht den **Funktionswerten** der beiden Funktionen. Es ist nach dem **Mittelwert** $\overline{T}$ gefragt. Den Mittelwert der Funktionswerte einer Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ erhältst du allgemein über die Gleichung:

$$\overline{T} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Die notwendigen Integrale kannst du z.B. mit dem GTR berechnen. Den Befehl für das Integral erhältst du mit $\boxed{\text{MATH} \to \text{fnInt}}$. Achte wie oben auf die Reihenfolge der Argumente, die eingegeben werden müssen.

$Y_2 = g(x)$
$Y_5 = h(x)$

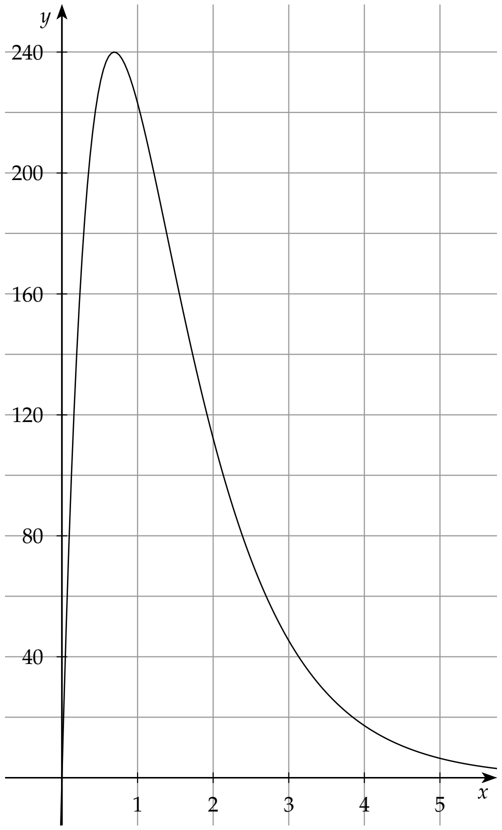


Die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen sind somit identisch.

Aufgabe I 3

a) ▶ **Schaubild skizzieren** (6VP)

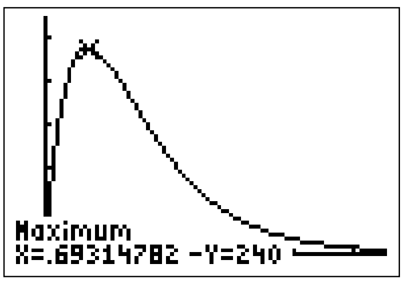
Du kannst das Schaubild von v mit dem GTR zeichnen lassen und dich daran orientieren.



▶ **Höchste Geschwindigkeit bestimmen**

Die Funktionswerte $v(t)$ geben dir die Geschwindigkeit des Motorboots zu einem bestimmten Zeitpunkt t an. Die höchste Geschwindigkeit liegt also am **Maximum** von v vor.

Zeichne das Schaubild von v und bestimme mit $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{MAXIMUM}}$ die Koordinaten des Hochpunktes.



Es ergibt sich der Punkt $H\,(0,6931 \mid 240)$ und damit die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes $v_{max} = 240\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Die Höchstgeschwindigkeit des Motorbootes beträgt $240\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

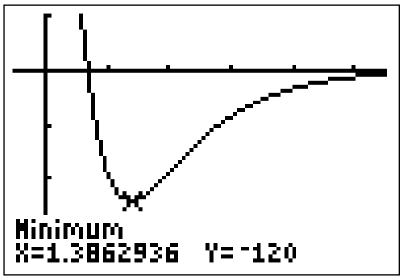
▶ **Stelle mit stärkster Abnahme der Geschwindigkeit bestimmen**

Da dir v die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit angibt, wird dir die **Zunahme** bzw. die **Abnahme** der Geschwindigkeit von der ersten Ableitung v' geliefert. Die Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt am stärksten ab, an dem die erste Ableitung ein **Minimum** besitzt.

Bestimme also die erste Ableitung v'. Du kannst sie über $\boxed{\text{Y}_2\text{=nDeriv(Y}_1\text{,X,X)}}$ direkt mit dem GTR zeichnen lassen, oder sie nach der Kettenregel von Hand bestimmen:

$v'(t) = 960 \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-t} - 960 \cdot (-2) \cdot \mathrm{e}^{-2t}$
$v'(t) = -960\mathrm{e}^{-t} + 1.920\mathrm{e}^{-2t}$

Zeichne das Schaubild von v' und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{Minimum}}$ die Koordinaten des Tiefpunktes.:



Es ergibt sich $t \approx 1,39$.

Die Geschwindigkeit des Motorbootes nimmt nach etwa 1,39 min am stärksten ab.

▶ Mittlere Geschwindigkeit berechnen

Die Funktionswerte $v(t)$ geben dir die Geschwindigkeit des Motorbootes an. Die mittlere Geschwindigkeit entspricht dem **Mittelwert der Funktionswerte**. Er wird mit $\overline{T}$ bezeichnet und berechnet sich über das Integral. Für den Mittelwert $\overline{T}$ von v in einem Intervall $[a;b]$ gilt $\overline{T} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

In unserem Fall ergibt sich also $\overline{T} = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t$.

Du kannst das benötigte Integral mit dem GTR berechnen. Den Befehl für „Integrieren“ findest du unter $\boxed{\text{Math} \to \text{fnInt}}$. Achte dabei auf die Reihenfolge: fnInt(Funktion, Variable, untere Grenze, obere Grenze). Als Lösung gibt der GTR den Wert $\displaystyle\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t \approx 473,55$ aus. Für die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich damit:

$\overline{T} = \dfrac{1}{5} \cdot 473,55 \approx 94,71$

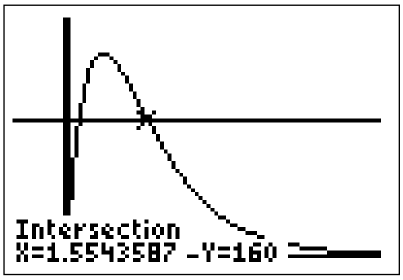
Das Motorboot fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von ungefähr $94,71\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ Geschwindigkeitsvergleich zum Segelboot anstellen

Das Segelboot fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $160\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Gesucht ist der Zeitpunkt t, zu dem das Motorboot diese Geschwindigkeit erreicht bzw. überschreitet. Setze also $v(t) = 160$.

Diese Gleichung lässt sich von Hand nur schwer lösen. Du kannst also den GTR verwenden. Eine Möglichkeit wäre, die Gleichung **grafisch** zu lösen.

Zeichne das Schaubild von v, sowie die Gerade mit $y = 160$. Bestimme nun mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE(CALC)} \rightarrow \text{Intersect}}$ den Schnittpunkt der Schaubilder.



Es ergeben sich die Stellen $t_1 \approx 0{,}2374$ und $t_2 \approx 1{,}5544$. Im Bereich zwischen diesen beiden Schnittstellen verläuft das Schaubild von v **oberhalb** der Geraden $y = 160$.

Im Sachzusammenhang interpretiert bedeutet dies, dass das Motorboot nach $0{,}2374$ Minuten die Geschwindigkeit des Segelbootes erreicht, dann überschreitet und nach $1{,}5544$ Minuten wieder langsamer wird. Mit der Differenz $1{,}5544 - 0{,}2374 = 1{,}317$ ergibt sich: Das Motorboot fährt insgesamt $1{,}317$ Minuten lang schneller als das Segelboot.

b) **► Zurückgelegte Strecke nach zwei Minuten berechnen** (6VP)

Die Funktion v gibt dir die **Geschwindigkeit** des Motorbootes an. Den **insgesamt zurückgelegten Weg** kannst du über das **Integral** berechnen.

Für den Weg s, den das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, gilt: $s = \int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$.

Dieses Integral kannst du wie oben über $\boxed{\text{Math} \rightarrow \text{fnInt}}$ mit dem GTR berechnen. Er gibt dir den Wert $358{,}87$ aus.

Das Motorboot ist nach 2 min etwa $358{,}87$ m gefahren.

► Funktionsterm für zurückgelegten Weg bestimmen

Du hast eben den Weg berechnet, den das Motorboot in den ersten **zwei** Minuten zurückgelegt hat und hast für diese Rechnung das **Integral** verwendet. Nun soll allgemein ein Funktionsterm bestimmt werden, der den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Anstatt der ersten zwei Minuten werden nun also die ersten t Minuten betrachtet. Damit gilt mit dem gleichen Ansatz wie oben:

$$s(t) = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int_0^t \left(960 \cdot \mathrm{e}^{-t} - 960 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{Stammfunktion bestimmen}$$

$$s(t) = \left[-1 \cdot 960 \cdot \mathrm{e}^{-t} - (-\frac{1}{2}) \cdot 960 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right]_0^t$$

$$s(t) = \left[-960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x \qquad \text{Hauptsatz der Integralrechnung}$$

$$s(t) = \left(-960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right) - \left(-960 \cdot \mathrm{e}^{0} + 480 \cdot \mathrm{e}^{0}\right) \qquad |\ \mathrm{e}^0 = 1$$

$$s(t) = -960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t} - (-960 + 480)$$

$$s(t) = -960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 480$$

Der Funktionsterm, der den vom Motorboot zurückgelegten Weg beschreibt, lautet $-960 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 480 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 480$.

► Prüfen, ob mehr als 500 m erreicht werden

Eben hast du den Funktionsterm berechnet, der dir den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Nun ist danach gefragt, ob das Motorboot jemals 500 m zurücklegen kann, d.h. ob der oben bestimmte Funktionsterm **jemals den Wert 500** annehmen kann.

Du kannst hierzu den **Grenzwert** des Funktionsterms für $t \to \infty$ betrachten. Damit untersuchst du die langfristige Entwicklung der zurückgelegten Wegstrecke.

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{-960\cdot \mathrm{e}^{-t}}_{\to 0} + \underbrace{480\cdot \mathrm{e}^{-2t}}_{\to 0} + 480\right)$$

Aufgrund der negativen Hochzahl nehmen die Exponenten von e jeweils sehr große negative Werte an. Exponentialfunktionen laufen für große negative Werte gegen 0.
Somit gilt:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = 480$$

Das Motorboot legt nach diesem Modell maximal einen Weg von 480 m zurück und erreicht nicht die 500 m-Marke.

► Zeitpunkt t bestimmen

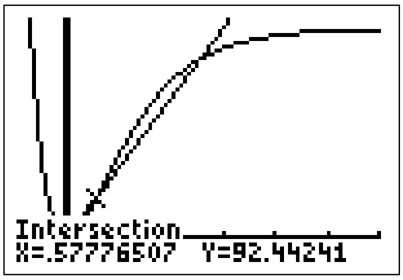
Das Segelboot fährt konstant mit $160\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Daraus ergibt sich die Weg-Zeit-Funktion für das Segelboot:

$$s_{\text{Seg}}(t) = 160t$$

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass das Motorboot genau zu dem Zeitpunkt losfährt, an dem es sich neben dem Segelboot befindet. Somit überholt das Motorboot das Segelboot, wenn **beide** Boote den **gleichen Weg** zurückgelegt haben.

Du kannst diesen Zeitpunkt t berechnen, indem du die **Schnittstelle** der beiden Weg-Zeit-Funktionen ermittelst. Dies kannst du mit dem GTR tun.

Zeichne das Schaubild von s und das von s_{Seg} und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE(CALC)} \to \text{Intersect}}$ den Schnittpunkt der beiden Schaubilder.



$t \approx 0,58$

Das Motorboot überholt das Segelboot nach ungefähr 0,58 min.

c) ### ► Stillstand des Motorbootes (6VP)

Bestimme zuerst die Gleichung der Tangente, welche die Geschwindigkeit des Motorboots ab dem Zeitpunkt t_0 beschreibt. Berechne dann den Zeitpunkt, zu dem das Motorboot stehen bleibt.

1. Schritt: Gleichung der Tangente bestimmen

Du kannst die Gleichung der Tangente von Hand und mit dem GTR ermitteln.

►► Lösungsweg A: Tangentengleichung von Hand bestimmen

Eine Tangente ist eine Gerade und besitzt somit die allgemeine Gleichung $t: y = mx + b$, wobei m die Steigung der Tangente darstellt. Die Steigung der Tangente ist gleich der Steigung von v an der Berührstelle t_0. Damit gilt $m = v'(2,55)$.

Zeichne das Schaubild von v und bestimme diesen Wert über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{dy/dx}}$. Er liegt bei $m \approx -63,25$

Die Gleichung der Tangente lautet bisher $t: y = -63,25x + b$.
Die Tangente berührt das Schaubild von v im Punkt $B\,(2,55 \mid v(2,55))$. Berechne zunächst die vollständigen Koordinaten von B:

$v(2,55) \approx 69,11 \qquad \Longrightarrow B\,(2,55 \mid 69,11)$

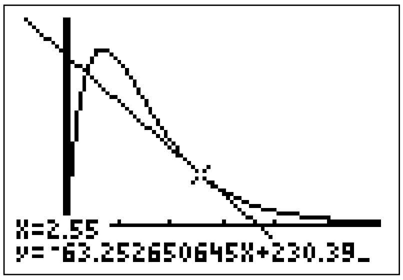
Setze die Koordinaten von B ein in die Gleichung der Tangente und löse nach b auf:

$$\begin{aligned} 69,11 &= -63,25 \cdot 2,55 + b \\ 69,11 &= -161,2875 + b \qquad && \mid +161,2875 \\ b &= 230,3975 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung der Tangente $t: y = -63,25x + 230,3975$.

►► Lösungsweg B: Lösung mit dem GTR

Zeichne das Schaubild von v und bestimme mit $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{PRGM (DRAW)} \rightarrow \text{tangent}}$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 2,55$



$t: y = -63,25x + 230,3975.$

2. Schritt: Zeitpunkt t berechnen

Das Motorboot bleibt stehen, wenn seine Geschwindigkeit Null beträgt. Ab $t_0 = 2,55$ wird seine Geschwindigkeit von der Tangente t beschrieben. Berechne also die **Nullstelle** der Tangente.

Das Motorboot bleibt stehen, wenn seine Geschwindigkeit Null beträgt. Ab $t_0 = 2,55$ wird seine Geschwindigkeit von der Tangente t beschrieben. Berechne also die **Nullstelle** der Tangente.

$$\begin{aligned} -63,25x + 230,3975 &= 0 \qquad && \mid +63,25x \\ 230,3975 &= 63,25x && \mid :63,25 \\ x &= 3,6427 \end{aligned}$$

Nach etwa 3,64 Minuten kommt das Motorboot zum Stillstand.

▶ Zeitpunkt t für Stillstand des Segelboots bestimmen

Zum Zeitpunkt $t_0 = 2,55$ hat das Segelboot das Motorboot wieder eingeholt. Das heißt, dass sie bis dort hin die gleiche Strecke zurückgelegt haben.

Die Idee ist nun folgende:

- Berechne zuerst die Länge der Wegstrecke, die das Motorboot nach t_0 zurücklegt.
- Das Segelboot legt laut Aufgabenstellung ab t_0 genau die gleiche Strecke zurück und kommt dann zum Stillstand.
- Berechne, wie sich die Geschwindigkeit des Segelboots ab t_0 verändert.
- Berechne außerdem, wie lang das Segelboot für die vom Motorboot zurückgelegte Strecke benötigt.

1. Schritt: Zurückgelegte Wegstrecke berechnen

Es ist bekannt, dass das Motorboot zum Zeitpunkt $t = 3,64$ zum Stillstand kommt und zwischen $t_0 = 2,55$ und $t = 3,64$ eine gewisse Strecke zurücklegt. Die Geschwindigkeit wird in diesem Intervall beschrieben durch die Tangente t mit der Gleichung $y = -63,25x + 230,3975$. Die insgesamt zurückgelegte Strecke in diesem Zeitintervall kann wieder wie oben durch das Integral berechnet werden:

$$s = \int_{2,55}^{3,64} (-63,25x + 230,3975)\,\mathrm{d}t$$

$$s = \left[-63,25 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 230,3975x\right]_{2,55}^{3,64}$$

$$s = \left[-31,625x^2 + 230,3975x\right]_{2,55}^{3,64}$$

$$s = \left(-31,625 \cdot (3,64)^2 + 230,3975 \cdot 3,64\right) - \left(-31,625 \cdot (2,55)^2 + 230,3975 \cdot 2,55\right)$$

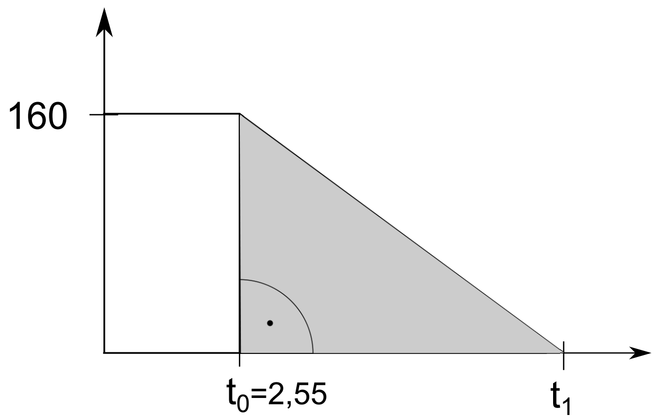
$$s = 419,6283 - 381,872 = 37,7562$$

Das Motorboot legt nach der Verringerung der Geschwindigkeit noch $37,7562\,\mathrm{m}$ zurück.

2. Schritt: Stillstand des Segelboots berechnen

Das Segelboot legt denselben Weg zurück. Es hat zum Zeitpunkt $t_0 = 2,55$ eine Geschwindigkeit von $160\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$. Ab t_0 verringert sich nun auch die Geschwindigkeit des Segelbootes und lässt sich durch eine Gerade beschreiben.
Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 kommt das Segelboot zum Stillstand und die Gerade muss an dieser Stelle eine Nullstelle besitzen:

Die Gerade gibt die Geschwindigkeit des Segelboots an. Die Länge des zurückgelegten Wegs hast du oben über das Integral berechnet. Er entspricht also genau dem **Inhalt** der Fläche, die von der Gerade und der x-Achse eingeschlossen wird und zwar zwischen $t_0 = 2,55$ und t_1 unbekannt.



Die Fläche hat die Form eines **rechtwinkligen Dreiecks** und ihr Inhalt soll $37,7562$ betragen. Nach der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich:

$$37,7562 = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot (t_1 - 2,55)$$

$$37,7562 = 80t_2 - 204 \qquad | +204$$

$$241,7562 = 80t_2 \qquad | :80$$

$$t_2 = 3,02$$

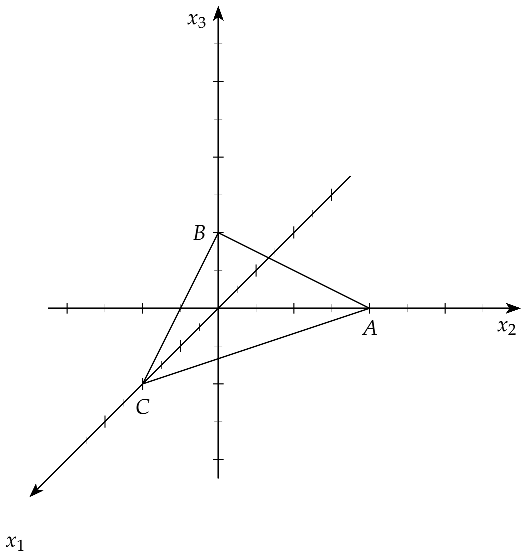
Das Segelboot stoppt nach ca. $3,02$ min.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) ▶ **Gleichschenkliges Dreieck nachweisen** (5VP)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.



Aus den gegebenen Koordinaten der Punkte A, B und C liegt es nahe, dass AC die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist. Überprüfe also, ob der Betrag von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich ist:

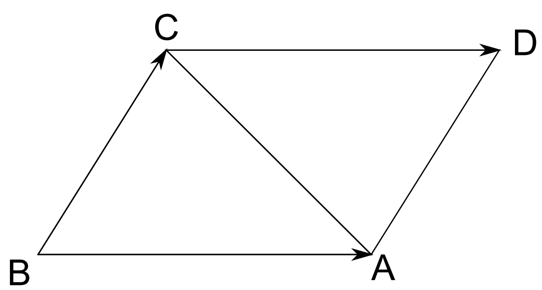
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

Somit ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

▶ **Punkt D der Raute ermitteln**

Bei einer Raute sollte der Punkt D gegenüber vom Punkt B liegen. Die Koordinaten von D erhältst du, indem du von B aus den Richtungsvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ folgst:



$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alternative Lösung

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Punktes D lauten $D(4 \mid 4 \mid -2)$.

▶ Innenwinkel der Raute

Das Maß eines Winkels α zwischen zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ berechnest du nach der Formel $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}\right|}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$.

Berechne zuerst den Winkel im Punkt B. Dazu benötigst du die Richtungsvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$. Setze diese in die Formel ein Skalarprodukt ein und löse nach dem Winkel β auf:

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{\left|\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}\right|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \\
&= \frac{|(0 \cdot 4) + (4 \cdot 0) + ((-2) \cdot (-2))|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} \\
\cos(\beta) &= \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \qquad \qquad | \cos^{-1} \\
\beta &= 78,46\,^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel im Punkt B ist $78,46\,^\circ$ groß. Bei Rauten haben gegenüberliegende Winkel dieselben Maße, also ist der Winkel im Punkt D ebenfalls $78,46\,^\circ$ groß. Da die Innenwinkelsumme im Viereck $360\,^\circ$ beträgt und die Winkel in A und C ebenfalls gleich groß sind, ergibt sich:

für den Winkel in A: $\dfrac{360\,^\circ - 2 \cdot 78,46\,^\circ}{2} = 101,54\,^\circ$

für den Winkel in B: Analog zu dem in A: $101,54\,^\circ$.

▶ Lage der Raute nachweisen

Die Raute liegt in der Ebene E, wenn alle vier Punkte A, B, C und D in der Ebene E liegen. Prüfe dies durch Punktprobe nach. Setze also die Koordinaten der Punkte A, B, C und D in die Koordinatengleichung der Ebene E ein.

$$A \text{ in } E: \; 0+4+2\cdot 0 = 4$$
$$4 = 4$$
$$B \text{ in } E: \; 0+0+2\cdot 2 = 4$$
$$4 = 4$$
$$C \text{ in } E: \; 4+0+2\cdot 0 = 4$$
$$4 = 4$$
$$D \text{ in } E: \; 4+4+2\cdot(-2) = 4$$
$$4 = 4$$

Die vier Punkte liegen alle in der Ebene. Somit liegt auch die Raute in der Ebene E.

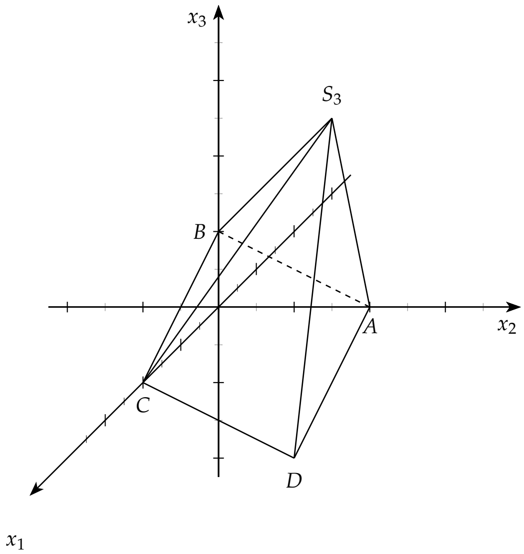
b) ▶ **Pyramide P_3 zeichnen** (6VP)

Berechne zuerst die genauen Koordinaten des Punktes S_3. Setze dazu $t = 3$ in die allgemeine Form für S_t ein:

$S_3(-3+3\cdot 3 \mid -3+3\cdot 3 \mid 5+3)$

$S_3(6 \mid 6 \mid 8)$

Zeichne nun das Koordinatensystem. Denke daran, dass eine Längeneinheit auf der x_1-Achse der Diagonalen eines Kästchens entspricht. Trage dann die Punkte A, B, C, D und S_3 in das Koordinatensystem ein. Verbinde zum Schluss die Punkte der Raute $ABCD$ miteinander, sowie alle Punkte mit der Spitze S_3 der Pyramide:



▶ Koordinatengleichung der Ebene F bestimmen

Stelle zuerst die eine Ebenengleichung von F in Parameterform auf. Dafür kannst du den Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ zum Punkt B als Stützvektor benutzen und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS_3}$:

$$\begin{aligned} F:\ \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BD} + s\cdot\overrightarrow{BS_3} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ;r,s\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit, die Koordinatenform der Ebenengleichung aus der Parameterform zu gewinnen, ist es, die Parametergleichung in ein lineares Gleichungssystem zu überführen und so aufzulösen, dass die Parameter r und s eliminiert werden.

$$\begin{aligned} 0+r+s &= x_1 \quad (1) \qquad \Longrightarrow r = x_1 - s \\ 0+r+s &= x_2 \quad (2) \\ 2-r+s &= x_3 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0+(x_1-s)+s &= x_2 \quad (2) \qquad \Longrightarrow x_1 = x_2 \\ 2-r+s &= x_3 \quad (3) \end{aligned}$$

Selbst wenn du zuerst nach r oder s in der dritten Gleichung auflöst, macht es für die ertsen beiden Gleichungen keinen Unterschied. Die Koordinatengleichung der Ebene F lautet $x_1 = x_2$ bzw. $x_1 - x_2 = 0$.

▶ Ebene F als Symmetrieebene der Pyramide P_3 nachweisen

Damit die Ebene F eine Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist, müssen drei Eigenschaften erfüllt sein:
1. Die Spitze S_3 der Pyramide liegt in der Ebene F. (sonst gäbe es zwei Spitzen)
2. Die Ebene F halbiert die Grundfläche der Pyramide.
3. Die Ebene F ist orthogonal zur Grundfläche der Pyramide.

Die Ebene F wurde durch die Punkte B, D und S_3 bestimmt. Die Spitze der Pyramide ist also in der Ebene F enthalten. Die Grundfläche der Pyramide ist eine Raute. Deshalb halbiert die Diagonale BD die Grundfläche der Pyramide automatisch. Um zu überprüfen, ob F orthogonal zu dieser Grundfläche ist, verwendest du das Skalarprodukt. Als Richtungsvektoren nimmst du die Normalenvektoren der Ebenen E und F. Das Skalarprodukt muss 0 sein, damit sie in einem Winkel von 90° zueinander stehen:

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e} \circ \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1 - 1 = 0$$

F ist somit orthogonal zu E. Die Ebene F ist also eine Symmetrieebene der Pyramide P_3.

c) ▶ **Wert für t** (5VP)

Berechne zuerst die genauen Koordinaten des Mittelpunktes M der Grundfläche. Dazu gehst du von B aus den halben Richtungsvektor $\overrightarrow{BD}$ entlang:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alternative Lösung

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Stelle nun eine Gleichung einer Geraden auf, die orthogonal zu E ist und durch den Mittelpunkt der Raute geht:

$$\begin{aligned} g: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OM} + r \cdot \overrightarrow{e} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad ; r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Setze dann den Punkt S_t mit dieser Geradengleichung gleich. Benutze ein lineares Gleichungsverfahren, um den gesuchten Wert für t zu erhalten:

$$\begin{aligned} 2 + r &= -3 + 3t \quad (1) \qquad \Longrightarrow r = 3t - 5 \\ 2 + r &= -3 + 3t \quad (2) \\ 0 + 2r &= 5 + t \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3t - 5) &= 5 + t \quad (3) \\ 6t - 10 &= 5 + t \qquad | \ -t + 10 \\ 5t &= 15 \qquad | \, | : 5 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Für $t = 3$ liegt der dazugehörige Punkt S_3 senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.

▶ Durchstoßpunkte der Spitze in der $x_1 - x_2$-Ebene

Bei der Rotation der Pyramidenspitze um die Achse AC, bleibt der Punkt S_3 immer auf der Ebene F (da AC ein Lot von F ist). Für sämtliche Punkt auf F gilt auf der Grund der Koordinatenform der Ebenengleichung: $x_1 = x_2$.

Es ist nach den Durchstoßpunkten mit der x_1x_2-Ebene gefragt. Alle Punkte, die in dieser Ebene liegen, haben die x_3-Koordinate $x_3 = 0$. Für die Durchstoßpunkte U ergeben sich damit die allgemeinen Koordinaten $U(u \mid u \mid 0)$.

Die Spitze S_3 rotiert mit dem Radius $\overline{MS_3}$ um die Strecke AC. Also müssen auch die Durchstoßpunkte den gleichen Abstand von Punkt M besitzen. Berechne zunächst den Abstand zwischen M und S_3. Dieser entspricht dem Betrag des Richtungsvektors:

$$\overrightarrow{MS_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{MS_3}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 16 + 64} = \sqrt{96}$$

Dieser Abstand von $\sqrt{96}$ muss der Länge von MU entsprechen, d.h.:

$$\begin{aligned}
\overline{MU} &= \sqrt{96} \\
|\overline{MU}| &= \sqrt{96} \\
\left| \begin{pmatrix} u-2 \\ u-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{96} \\
\sqrt{(u-2)^2 + (u-2)^2 + (0-0)^2} &= \sqrt{96} && \mid\ ()^2 \\
(u-2)^2 + (u-2)^2 &= 96 \\
2(u-2)^2 &= 96 && \mid :2;\quad \text{binomische Formel} \\
u^2 - 4u + 4 &= 48 && \mid\ -48 \\
u^2 - 4u - 44 &= 0 \\
u_{1,2} &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 44} \\
u_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{48} \\
u_1 &\approx u_1 = && 8{,}93 \\
u_2 &\approx -4{,}93
\end{aligned}$$

Der Punkt S_3 trifft bei der Rotation um AC auf die Punkte $U_1(8{,}93 \mid 8{,}93 \mid 0)$ und $U_2(-4{,}93 \mid -4{,}93 \mid 0)$.

Aufgabe II 2.1

a) ▶ **Schnittpunkt der Geraden ermitteln** (7VP)

Alle Punkte in der x_1x_2-Ebene haben die Koordinaten $P(x_1 \mid x_2 \mid 0)$. Die Geradengleichung g gibt dir für jedes t die Koordinaten eines Punktes, der auf der Geraden g liegt. Setze also einen Wert für t ein, sodass die dritte Komponente (also x_3) 0 ist:

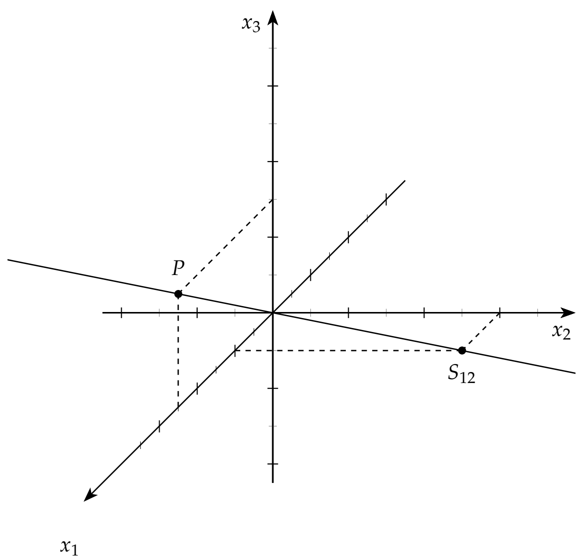
$$3 + t \cdot 1 = 0 \qquad \Longrightarrow t = -3$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der x_1x_2-Ebene lauten $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$.

▶ **Gerade g zeichnen**

Du zeichnest eine Gerade in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein, indem du sie durch zwei Punkte der Geraden zeichnest. Nimm hierfür am bestem den Stützpunkt der Geraden $P(5 \mid 0 \mid 3)$ und den eben berechneten Schnittpunkt $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$. Trage diese beiden Punkte ein und ziehe dann die Gerade durch diese beiden Punkte. Denke daran, dass eine Längeneinheit auf der x_1-Achse der Diagonalen eines Kästchens entspricht:



▶ **Schnittwinkel der Geraden g und der x_1x_2-Ebene berechnen**

Maße von Schnittwinkeln zwischen einer Geraden mit Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ und einer Ebenen mit Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ kannst du mit der folgenden Formel berechnen:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$$

Der Normalenvektor der $x_1 - x_2$-Ebene lautet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) =& \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\\ =& \frac{|1\cdot 0+(-2)\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\\ =& \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \alpha =& \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\approx 24,095\,^\circ.\end{aligned}$$

Die Maßzahl des Schnittwinkels von g und der x_1x_2-Ebene beträgt $24,1\,^\circ$.

► Koordinaten von F ermitteln

Es ist ein Punkt F gesucht, der auf g liegt und vom Punkt A den kleinsten Abstand hat. Den Abstand eines **Punktes** zu einer **Geraden** kannst du mit Hilfe einer **Hilfsebene** H bestimmen.

Der kleinste Abstand zu einer Geraden ist immer eine **orthogonale Strecke** zu dieser Geraden. Die Hilfsebene H verläuft also orthogonal zur Geraden g und beinhaltet den Punkt A. Du kannst als **Normalenvektor** von H den **Richtungsvektor** von g benutzen. H hat dann zunächst die Koordinatenform $H: \; x_1-2x_2+x_3=d$.

Da A ein Punkt dieser Ebene sein soll, muss er die Ebenengleichung erfüllen. Du kannst also die Koordinaten von A in die Koordinatengleichung der Ebene einsetzen und nach d auflösen:

$$\begin{aligned}d &= 4,5-2\cdot 6+3,5\\ &= 8-12\\ &= -4\end{aligned}$$

Somit lautet die Koordinatengleichung der Hilfsebene $H: \; x_1-2x_2+x_3=-4$.

Der Punkt auf g mit dem kleinsten Abstand zu A ist nun der **Schnittpunkt von g und H**. Du kannst ihn berechnen, indem du die jeweiligen Koordinaten der Gerade g in die Koordinatengleichung der Ebene für x_1, x_2 und x_3 einsetzt:

$$\begin{aligned}(5+t)-2\cdot(0-2t)+(3+t) &= -4\\ 5+t+4t+3+t &= -4\\ 8+6t &= -4 \quad \mid -8\\ 6t &= -12 \quad \mid :6\\ t &= -2\end{aligned}$$

Die Koordinaten von F erhältst du, indem du $t=-2$ in die Geradengleichung von g einsetzt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

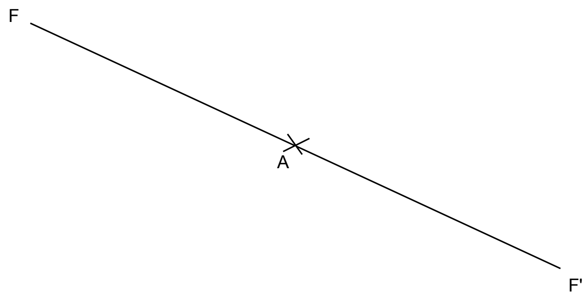
Die Koordinaten des Punktes F lauten $F(3 \mid 4 \mid 1)$.

▶ Gleichung der Geraden h aufstellen

Um die Gleichung der Spiegelgeraden von h aufzustellen, benötigst du die Koordinaten **zweier Punkte** dieser Geraden. Wähle also zwei Punkte, die auf der Geraden h liegen und **spiegle diese** am Punkt A. Zwei mögliche Punkte, die sich anbieten, wären z.B. $F(3 \mid 4 \mid 1)$ und $S_{12}(2 \mid 6 \mid 0)$.

Die Koordinaten der Spiegelpunkte kannst du so berechnen:

$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$,
und
$\overrightarrow{OS'_{12}} = \overrightarrow{OS_{12}} + 2 \cdot \overrightarrow{AS_{12}}$



$$\overrightarrow{S_{12}A} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OS_{12}} + 2 \cdot \overrightarrow{S_{12}A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $S'_{12}(7 \mid 6 \mid 7)$ und $F'(6 \mid 8 \mid 6)$. Berechne als nächstes den Richtungsvektor von h:

$$\overrightarrow{S'F'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du kannst als Stützvektor der Geraden h entweder $\overrightarrow{OS'}$ oder $\overrightarrow{OF'}$ nehmen. Die Gleichung von h lautet dann $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}$.

b) ▶ **Entstehung einer Ebene bei Rotation der Geraden g begründen** (5VP)

Der Punkt F ist der Punkt auf g, der den kürzesten Abstand zum Punkt A hat. Daraus folgt, dass die Gerade durch A und F im rechten Winkel zur Geraden g verläuft. Bei der Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F entsteht also eine Art „Scheibe“, die senkrecht zur Geraden durch A und F verläuft. Diese „Scheibe“ liegt in einer Ebene.

▶ **Gleichung der Ebene nachweisen**

Die Ebene E hat das Lot $\overrightarrow{FA}$. Somit kannst du diesen Vektor als **Normalenvektor der Ebene** E benutzen. In der Teilaufgabe a) hast du diesen Richtungsvektor bereits ausgerechnet.

$$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Werten stellst du die Gleichung der Ebene E auf:

$$E: \; 1,5x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 = d$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$$

Ein Punkt, der in der Ebene liegt, heißt F. Setze die Koordinaten von F in die Ebenengleichung ein, um den Wert für d zu berechnen:

$$\begin{aligned} d &= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \\ &= 9 + 16 + 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Somit stimmt die Gleichung der Ebene.

▶ **Lage von P und Q auf verschiedenen Seiten überprüfen**

Die Punkte P und Q liegen auf anderen Ebenen, die parallel zur Ebene E sind. Sie haben also ebenfalls die Koordinatengleichung $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$. Setze die Punkte in diese Gleichung ein, um d_P und d_Q zu erhalten. Sind beide Werte größer oder kleiner als 30 (Wert für d der Ebene E), liegen die Punkte auf einer Seite der Ebene.

$$\begin{aligned} d_P &= 3 \cdot 18 + 4 \cdot (-9) + 5 \cdot 1 \\ &= 54 - 36 + 5 \\ &= 23 \qquad 23 < 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_Q &= 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-9) \\ &= -6 + 4 - 45 \\ &= -47 \qquad -47 < 30 \end{aligned}$$

Beide Werte sind kleiner als 30. Somit liegen die Punkte P und Q nicht auf verschiedenen Seiten von E.

Aufgabe II 2.2

► Verhältnis von CS zu SD (4VP)

Das Verhältnis erhältst du mit der Berechnung von Vektoren.

Du „kennst“ die Beträge einiger Vektoren; du hast zwar keine konkreten Werte, aber du weißt z.B., dass die $\overline{CD} = \overline{AD}$ und dass $\overline{MC} = \overline{MD}$ ist. Versuche nun, mit Hilfe von **geschlossenen Vektorzügen**, die Vektoren $\overrightarrow{PS}$ und $\overrightarrow{SQ}$ als **Linearkombinationen** von Vektoren auszudrücken, über die du mehr weißt.

Eine Möglichkeit wäre, die unbekannten Vektoren $\overrightarrow{PS}$ und $\overrightarrow{SQ}$ durch Linearkombinationen von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ auszudrücken: die beiden Vektoren sind **nicht** parallel und sie spielen eine wichtige Rolle für die Lage von P und Q.

1. Schritt: Geschlossenen Vektorzug durch S erstellen

Stelle zuerst einen geschlossenen Vektorzug auf. Er sollte möglichst klein sein und durch den Punkt S gehen, z.B.:

$$\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{0}$$

2. Schritt: Vektoren durch $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ beschreiben

Beschreibe die Vektoren $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{SP}$ mit den Vektoren $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$.

Laut Aufgabenstellung ist $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$. Also ist $\overrightarrow{PC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{MC}$.

Für $\overrightarrow{CS}$ benötigst du nun einen Parameter r, der das noch unbekannte Verhältnis von $\overrightarrow{CS}$ zu $\overrightarrow{SD}$ angibt:

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{CS} = r \cdot \overrightarrow{CD} = r \cdot \left(-\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$$

Für $\overrightarrow{SP}$ benötigst du einen weiteren Parameter s, der das ebenfalls unbekannte Verhältnis von $\overrightarrow{PS}$ zu $\overrightarrow{SQ}$ angibt:

$$\overrightarrow{QP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{PS} = s \cdot \overrightarrow{QP} = s \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{MD} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}\right)$$

3. Schritt: Parameter r und s bestimmen

Setze nun alles in den geschlossenen Vektorzug ein. Du kannst die Gleichung nach r bzw. s lösen, indem du $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ ausklammerst:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} &= \overrightarrow{0} \\
\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{MC}\right) + \left(r \cdot \left(-\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)\right) + \left(s \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}\right)\right) &= \overrightarrow{0} && \text{ausmultiplizieren} \\
\frac{1}{4}\overrightarrow{MC} - r \cdot \overrightarrow{MC} + r \cdot \overrightarrow{MD} + s \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{MC} - s \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{0} && \text{ausklammern} \\
\overrightarrow{MC}\left(\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}s\right) + \overrightarrow{MD}\left(r - \frac{5}{4}s\right) &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MD}$ sind nicht parallel und somit linear unabhängig voneinander sind. In Formeln heißt das, dass es **keine Werte außer Null** für k und l gibt, sodass $k \cdot \overrightarrow{MC} + l \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Deshalb müssen die Ausdrücke in den Klammern jeweils den Wert Null annehmen, damit die Gleichung eine Lösung besitzt. Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}s &= 0 \quad (1) \\ r - \frac{5}{4}s &= 0 \quad (2) \qquad \Longrightarrow r = \frac{5}{4}s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - (\frac{5}{4}s) + \frac{3}{4}s &= 0 \quad (1) \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}s &= 0 && | \cdot 2 \\ \frac{1}{2} - s &= 0 && | +s \\ s &= \frac{1}{2} \\ r &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Die Variable r teilt die Strecke CD in CS und SD auf. Somit ist $\overrightarrow{CS} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{SD} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$. Das Verhältnis beträgt 5 : 3.