Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Mithilfe der Quotientenregel ergibt sich die Ableitung von f mit $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ zu:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}.$$

Aufgabe 2 (2VP)

Eine Stammfunktion von f mit $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin(2x)=x^{-2}+\sin(2x)$ ist beispielsweise:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{-1}x^{-1}-\frac{1}{2}\cos(2x)\\&=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos(2x).\end{aligned}$$

Der Term $\sin(2x)$ kann dabei durch die „innere Integration“ mit der allgemeinen Regel $\sin(ax)\longrightarrow -\dfrac{1}{a}\cos(ax)$ integriert werden. Eine Stammfunktion von $\sin x$ ist dabei $-\cos x$.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ lässt sich nach den Potenzgesetzen umschreiben zu $(e^{2x})^2-11e^{2x}+18=0$. Diese **Exponentialgleichung** lässt sich lösen, indem der Term e^{2x} mit u ersetzt (substituiert) wird. Es ergibt sich damit eine quadratische Gleichung:

$$u^2-11u+18=0$$

$$u_{1/2}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-18}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}-\frac{72}{4}}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{11}{2}\pm\frac{7}{2}$$

$$u_1=2;\quad u_2=9$$

Die Substitution muss nun mit diesen beiden Lösungen wieder rückgängig (Resubstitution) gemacht werden:

$$u_1=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2x=\ln 2\quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{1}{2}\ln 2;$$

$$u_2=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 9=e^{2x}\quad\Leftrightarrow\quad 2x=\ln 9\quad\Leftrightarrow\quad x_2=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 9^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{9}=\ln 3.$$

Die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ hat damit die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\frac{1}{2}\ln 2;\ln 3\right\}$.

Aufgabe 4 (3VP)

Der Punkt $P(1\mid v)$ liegt auf dem Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2}{x}+2;\ x\neq 0$.

Für seine y-Koordinate gilt somit $v=f(1)=4$, der Punkt hat die vollständigen Koordinaten $P(1\mid 4)$.

Mit der Ableitung $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$ von f ergibt sich für die Tangente im Punkt P:

t: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$y = -2(x-1) + 4 = -2x + 2 + 4$
$y = -2x + 6$

Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle, an der sie die y-Koordinate Null besitzt:

$0 = -2x + 6$
$x = 3$

Der Schnittpunkt S besitzt damit die Koordinaten $S(3\,|\,0)$.

Aufgabe 5 (6VP)

1. Für die Ableitung gilt, wie am Schaubild erkennbar, $f'(x) > 0$ für $-3 \leq x \leq 3$. Die Funktion f ist in diesem Bereich damit monoton steigend, die Aussage ist **wahr**.
2. Die Ableitungsfunktion f' besitzt ein Extremum an der Stelle $x = 0$. Das Schaubild der Funktion f muss an dieser Stelle daher eine Wendestelle haben, die Aussage ist ebenfalls **wahr**.
3. Unter 1. wurde bereits gesagt, dass die Funktion f für $-3 \leq x \leq 3$ streng monoton wachsend ist. Das Schaubild von f kann somit niemals symmetrisch zur y-Achse sein, die Aussage ist **falsch**.
4. Wenn eine Funktion g die Stammfunktion der Ableitung ist, lässt sich die Ausgangsfunktion f nur mit $f(x) = g(x) + c$ darstellen (Unbestimmtheit der Stammfunktion).

   Für die Funktion f bedeutet dies, dass sie aufgrund des konstanten Summanden c beliebig weit in Richtung der positiven bzw. negativen y-Achse verschoben sein kann, daher lässt sich nicht sagen, ob $f(x) > 0$ für $x \in [-3;\,3]$ gilt. Die Aussage ist **unentscheidbar**.

Aufgabe 6 (4VP)

Um zu überprüfen, ob der Punkt $A(3\,|\,0\,|\,2)$ auf g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ liegt, muss sein Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ für $\vec{x}$ in die Geradengleichung eingesetzt werden:

$$A \text{ in } g\text{:}\quad \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\Rightarrow & t=1\\ \Rightarrow & t=1\\ \Rightarrow & t=1\end{matrix}$$

Aus jeder Zeile ergibt sich die (einheitliche) Lösung $t = 1$. Der Punkt A liegt somit (für $t = 1$) auf der Geraden g.

Aus der Koordinatengleichung von E lässt sich ihr Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$ ablesen, die Gerade g besitzt den Richtungsvektor $\vec{u}_g = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Es ist nun sofort erkennbar, dass $\vec{n} = 2 \cdot \vec{u}_g$ gilt. Die beiden Vektoren sind daher Vielfache voneinander und somit parallel – die Gerade g muss somit senkrecht zur Ebene E verlaufen.

Der Punkt A liegt auf der Geraden g, die wiederum senkrecht auf der Ebene E steht. Der Ebenenpunkt P, der von A den kleinsten Abstand hat, entspricht somit dem **Schnittpunkt** von g mit E.

Um diesen zu bestimmen, werden die Koordinaten von g in die Koordinatengleichung von E mit E: $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} g \cap E: \quad 4(1+2t) - 2(1-t) + 4(2t) &= 11 \\ 4 + 8t - 2 + 2t + 8t &= 11 \\ 18t &= 9 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt somit für $t = \frac{1}{2}$ auf der Geraden g. Für seinen Ortsvektor gilt damit:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right)$$

Der Ebenenpunkt $P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1\right)$ hat von A den kleinsten Abstand.

Aufgabe 7 (3VP)

Um die Gleichung einer Ebene (egal in welcher Form) aufstellen zu können, werden stets **3 Punkte** benötigt. Aus der Zeichnung kann man die sogenannten **Spurpunkte** ablesen, das sind die Schnittpunkte der Ebene E mit dem Koordinatenachsen. Sie sind hier $S_1(5 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 3)$.

Allgemein gilt für eine Ebene E, die weder den Ursprung enthält noch parallel zu einer der Koordinatenebenen ist, folgendes: Sind ihre Spurpunkte $S_1(a \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid b \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid c)$ bekannt, so lautet ihre Koordinatenform:

$$E\colon \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

Mit den hier gegebenen Punkten ergibt sich für E:

$$E\colon \quad \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1 \qquad | \cdot 60$$

$$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$$

Alternativer Lösungsweg

Mit den drei gegebenen Punkten S_1, S_2 und S_3 lässt sich E auch problemlos in Parameterform darstellen:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + s \cdot \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Über das **Kreuzprodukt** (Vektorprodukt) der beiden Spannvektoren von E lässt sich ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E berechnen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-5) - (-5) \cdot 3 \\ (-5) \cdot 0 - 4 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Als Ansatz für eine Koordinatengleichung ergibt sich damit $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = d$. Um den fehlenden Summanden d zu bestimmen, müssen die Koordinaten eines der Ebenenpunkte eingesetzt werden, z.B. von $S_1(5 \mid 0 \mid 0)$:

$$\begin{aligned} S_1 \text{ in } E\text{:}\quad 12 \cdot 5 + 15 \cdot 0 + 20 \cdot 0 &= d \\ 60 &= d \end{aligned}$$

Die Ebene E besitzt somit die Koordinatengleichung E: $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$.

Aufgabe 8 (3VP)

Um den Abstand des Punktes A von einer Geraden g zu bestimmen, ist das folgende Verfahren das Standardverfahren:

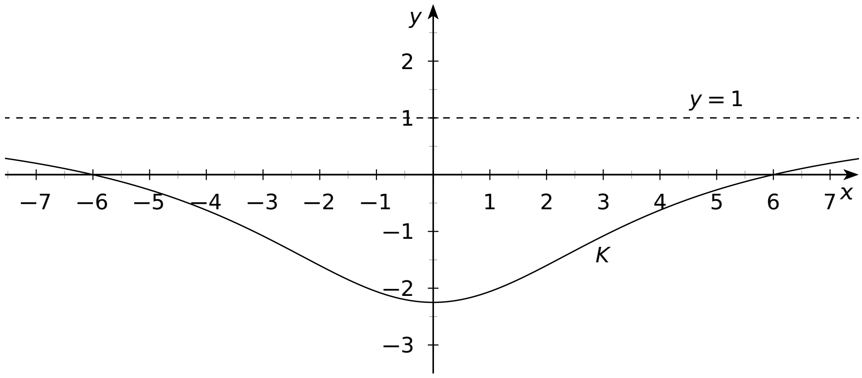
- Es wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die orthogonal zu g verläuft und den Punkt A enthält. Dabei ist der Richtungsvektor von g ein **Normalenvektor** dieser Hilfsebene.
- Es wird anschließend der Schnittpunkt dieser Hilfsebene mit der Geraden g berechnet. Er sei S.
- Der Abstand von A zur Geraden g entspricht den dem Abstand von A zu S. Er kann über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AS}$ bestimmt werden.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

a) **Zeichnung des Schaubilds K von f** (7VP)

Das Schaubild der Funktion f ergibt sich mithilfe des GTR, indem entweder das Schaubild direkt gezeichnet oder eine Wertetabelle erstellt wird:



Untersuchung des Verhaltens von K für $|x| \to \infty$

Bei der Funktion f handelt es sich um eine gebrochenrationale Funktion, wobei der **Zählergrad gleich dem Nennergrad** ist. Somit gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2-36}{x^2+16} = 1.$$

Somit ist auch die Gerade $y = 1$ die **waagrechte Asymptote** von K.

Nachweis, dass K genau zwei Wendepunkte besitzt

Das Schaubild K hat genau dann zwei Wendepunkte, wenn die zweite Ableitung von f nur genau zwei Nullstellen besitzt und dort auch ihr Vorzeichen wechselt. Dieser Nachweis muss handschriftlich durchgeführt werden und ist **nicht** mit dem GTR durchführbar!

Für die erste Ableitung von f ergibt sich nach der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x\cdot(x^2+16)-(x^2-36)\cdot 2x}{(x^2+16)^2} \\ &= \frac{2x^3+32x-2x^3+72x}{(x^2+16)^2} \\ &= \frac{104x}{(x^2+16)^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ergibt sich wiederum aus der Quotienten- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{104\cdot(x^2+16)^2-104x\cdot 2(x^2+16)^1\cdot 2x}{(x^2+16)^4} \\ &= \frac{(x^2+16)\cdot\left[104\cdot(x^2+16)-104x\cdot 2\cdot 2x\right]}{(x^2+16)^4} \\ &= \frac{104(x^2+16)-104\cdot 4x^2}{(x^2+16)^3} = \frac{104(x^2+16-4x^2)}{(x^2+16)^3} = \frac{104(16-3x^2)}{(x^2+16)^3} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte lautet $f''(x) = 0$. Der Bruchterm von f'' nimmt dabei genau dann den Wert Null an, wenn sein **Zähler** den Wert Null annimmt:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 104(16-3x^2) &= 0 \\ 16-3x^2 &= 0 \\ 3x^2 &= 16 \\ x^2 &= \frac{16}{3} \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

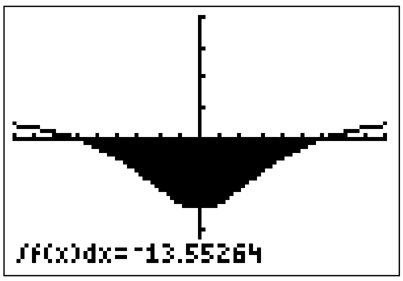
f'' hat also genau zwei Nullstellen. Ihr Vorzeichen wird dabei allein vom Ausdruck $16-3x^2$ im Zähler bestimmt, da sowohl der Nenner als auch der Faktor 104 im Zähler **stets positiv** sind.
Da eine quadratische Funktion g mit $g(x) = 16-3x^2$ an ihren Nullstellen **immer** ihr Vorzeichen wechselt, ist dies auch für f'' dort der Fall.
Das Schaubild K besitzt somit genau zwei Wendepunkte.

b) **Berechnung des Wasservolumens, wenn der Kanal vollständig gefüllt ist** (5VP)

Das Wasservolumen kann berechnet werden, indem zunächst der Inhalt der Querschnittsfläche des Kanals berechnet und anschließend mit der Kanallänge von 500 m multipliziert wird.

Das Schaubild stellt den Querschnitt des Kanals laut Aufgabentext für $-6 \leq x \leq 6$ dar. Der Flächeninhalt A_1 kann somit über das **Integral** über $f(x)\,dx$ von -6 bis 6 berechnet werden.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{7: } \int f(x)\,dx}$ lässt sich das Integral berechnen, es beträgt etwa $-13,55$. Da eine Fläche allerdings nie negativ sein kann, ergibt sich:



$$A_1 = \left| \int_{-6}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \approx 13,55.$$

Für das Volumen V des Kanals ergibt sich damit:

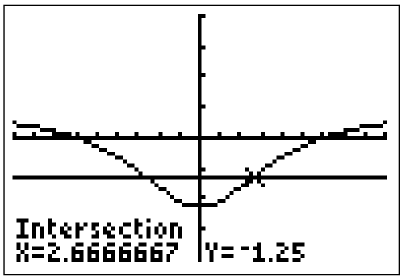
$V = A_1 \cdot 500 \approx 13,55 \cdot 500 = 6775.$

Wenn der Kanal vollständig gefüllt ist, fasst er etwa $6775\,\mathrm{m}^3$ Wasser.

Füllvolumen bei einem Pegelstand von 1,00 m

Da der Pegelstand in Bezug auf den tiefsten Punkt gemessen wird, wird zweckmäßigerweise zunächst dieser Tiefpunkt von K berechnet.
Seine Koordinaten können über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ mit dem GTR bestimmt werden, sie lauten $T(0\,|\,-2,25)$.
Bei einem Pegelstand von $1,00$ m (über diesem tiefsten Punkt) liegt die Wasseroberfläche im Querschnitt also auf der Geraden $y = -1,25$.

Die beiden Schnittstellen von K und der Geraden $y = -1{,}25$ ergeben sich mit dem GTR über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$. Sie lauten $x_1 \approx -2{,}67$ und $x_2 \approx 2{,}67$.
Die Schnittstellen können alternativ auch schnell von Hand berechnet werden:



Handschriftliche Lösung

$$\frac{x^2-36}{x^2+16} = -1{,}25 = -\frac{5}{4}$$

$$x^2-36 = -\frac{5}{4}(x^2+16)$$

$$x^2-36 = -\frac{5}{4}x^2-20$$

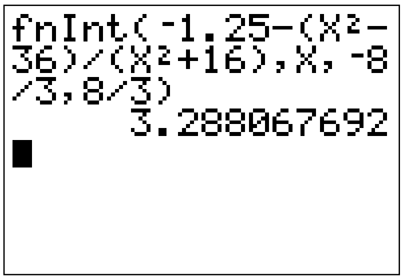
$$\frac{9}{4}x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{64}{9} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\frac{8}{3} \approx \pm 2{,}67$$

Die neue Querschnittsfläche A_2 des Wassers im Kanal entspricht der Schnittfläche zwischen K und der Geraden $y = -1{,}25$ zwischen den beiden Schnittstellen:

$$A_2 = \int_{-\frac{8}{3}}^{\frac{8}{3}} (-1{,}25 - f(x))\,\mathrm{d}x \approx 3{,}29$$

Das Integral kann dabei mit dem GTR über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ berechnet werden.
Der Anteil, zu dem der Kanal nun gefüllt ist, kann nun einfach berechnet werden, indem die beiden **Querschnittsflächen** verglichen werden.



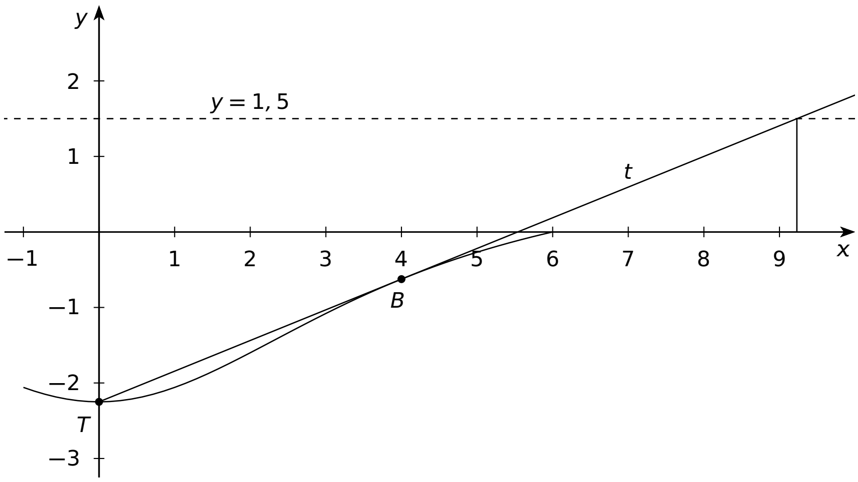
Die Länge des Kanals ändert sich nämlich nicht, der Unterschied der beiden Querschnittsflächen entspricht daher auch dem Unterschied der beiden Volumina:

$$p\,\% = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\,\% = \frac{3{,}29}{13{,}55} \cdot 100\,\% \approx 0{,}243 \cdot 100\,\% = 24{,}3\,\%.$$

Bei einem Pegelstand von 1,00 m ist der Kanal zu etwa 24 % gefüllt.

c) **Berechnung der maximalen Entfernung vom Kanalrand** (6VP)

Wenn die Person möglichst weit weg vom Kanalrand steht und gerade noch den tiefsten Punkt des Kanals sehen kann, dann wird ihr Sehstrahl durch die **Tangente** an das Schaubild K beschrieben, die durch den Tiefpunkt T verläuft.



Die Tangente liegt an K in einem noch unbekannten Berührpunkt $B(x_0 \mid f(x_0))$ mit einer positiven Berührstelle x_0. Sie hat die Gleichung:

t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = \frac{104x_0}{(x_0^2+16)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - 36}{x_0^2 + 16}$$

Die Tangente soll weiterhin durch den Tiefpunkt $T(0 \mid -2,25)$ von K verlaufen. Seine Koordinaten können daher in der Tangentengleichung für x bzw. y eingesetzt werden:

$$-2,25 = -\frac{9}{4} = \frac{104x_0}{(x_0^2+16)^2}(0 - x_0) + \frac{x_0^2 - 36}{x_0^2 + 16}$$

$$-\frac{9}{4} = \frac{-104x_0^2}{(x_0^2+16)^2} + \frac{x_0^2 - 36}{x_0^2 + 16} \qquad \mid \cdot (x_0^2+16)^2$$

$$-\frac{9}{4} \cdot (x_0^2+16)^2 = -104x_0^2 + (x_0^2 - 36)\cdot(x_0^2+16) \qquad \mid \text{ausmultiplizieren}$$

$$-\frac{9}{4}x_0^4 - 72x_0^2 - 576 = -104x_0^2 + x_0^4 - 20x_0^2 - 576$$

$$-\frac{13}{4}x_0^4 + 52x_0^2 = 0$$

$$x_0^4 - 16x_0^2 = 0 \qquad \mid x_0^2 \text{ ausklammern}$$

$$x_0^2 \cdot (x_0^2 - 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{0/1} = 0$$

$$x_0^2 - 16 = 0$$

$$x_{0/2} = 4;\; x_{0/3} = -4$$

(Hinweis: Alternativ kann die Gleichung oben auch mit dem GTR gelöst werden.)

Da die Berührstelle x_0 positiv sein soll, kommt nur die zweite Lösung in Frage, es ist $x_0 = 4$. Die Tangente hat somit die Gleichung:

$$t\colon\; y = \frac{104 \cdot 4}{(4^2+16)^2}(x - 4) + \frac{4^2 - 36}{4^2 + 16} \approx 0,4063x - 2,25.$$

Nun fehlt noch diejenige Stelle x, an der $y = 1,5$ gilt:

$$1,5 = 0,4063x - 2,25$$

$$0,4063x = 3,75$$

$$x = \frac{3,75}{0,4063} \approx 9,23$$

Da sich der Kanalrand an der Stelle $x = 6$ liegt, gilt:

Die Person darf höchstens $9,23 - 6 = 3,23$ m vom Kanalrand entfernt stehen, um den tiefsten Punkt gerade noch sehen zu können.

Aufgabe I 2.1

Stellen zunächst deinen GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein! (6VP)

Bestimmung der Periodendauer

Die Periodendauer T in Sekunden entspricht der Länge einer Periode der Funktion v. Für diese gilt:
$T = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} \approx 0,52\,\text{s}.$
Eine Periode dauert etwa $0,52\,\text{s}$.

Berechnung der Randgeschwindigkeiten des Schwimmers

In der Funktionsgleichung $v(t) = 0,4\sin(12t) + 1,5$ ist der Ausdruck $\sin(12t)$ der einzige Teil, der **variabel** ist. Als „einfache“ Sinusfunktion schwankt er zwischen den Werten 1 und -1.
Die maximale Geschwindigkeit wird also erreicht, wenn der Term $\sin(12t)$ seinen größten Wert 1 annimmt:

$v_{\text{max}} = 0,4 \cdot 1 + 1,5 = 1,9.$

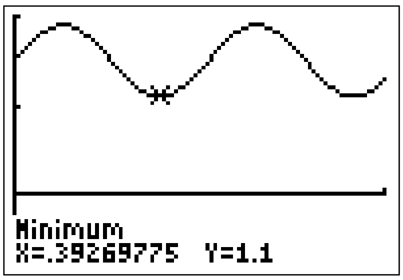
Entsprechend ergibt sich die minimale Geschwindigkeit, wenn $\sin(12t) = -1$ ist:

$v_{\text{min}} = 0,4 \cdot (-1) + 1,5 = 1,1.$

Die Geschwindigkeit v des Schwimmers schwankt somit zwischen $1,9\,\text{m/s}$ und $1,1\,\text{m/s}$.

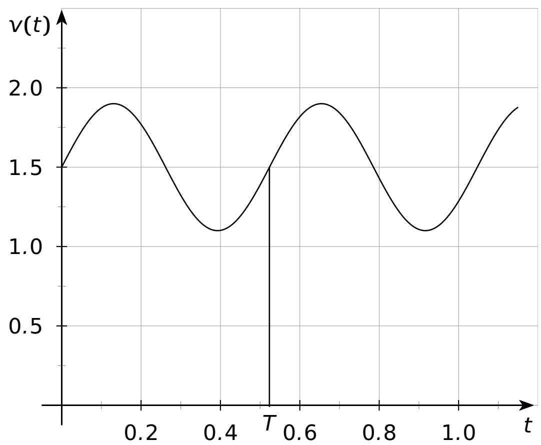
Alternativer Lösungsweg

Alternativ können mit dem GTR einfach die Werte der Minima bzw. Maxima von v bestimmt werden. Auch hier ergibt sich jeweils $v_{\text{min}} = 1,1$ und $v_{\text{max}} = 1,9$, die Geschwindigkeit schwankt demnach zwischen $1,1\,\text{m/s}$ und $1,9\,\text{m/s}$.



Skizze des Schaubildes von *v*

Ein Schaubild lässt sich leicht mithilfe des GTR erstellen. Da keine weiteren Angaben im Aufgabentext enthalten sind, kann der Bereich, indem das Schaubild von v skizziert wird, eigenständig gewählt werden!



Zeitpunkte der stärksten Abnahme

Eine Änderung der Geschwindigkeit, also eine Zu- bzw. Abnahme wird durch die Ableitung v' von v beschrieben.

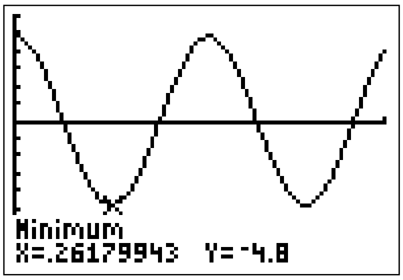
Die Ableitung hat nach der Kettenregel den Funktionsterm

$v'(t) = 0,4\cos(12t) \cdot 12 = 4,8\cos(12t)$.

Die Geschwindigkeit nimmt dabei ab, wenn die Ableitung $v'(t) < 0$ gilt. Die **stärkste** Abnahme ergibt sich dann, wenn $v'(t)$ sogar seinen allerkleinsten Wert, also sein **Minimum** annimmt.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{3: minimum}}$ ergibt sich mit dem GTR das erste Minimum von v' an der Stelle $t_1 \approx 0,26$.

Aufgrund der Periodizität von v ergeben sich die weiteren Zeitpunkte dann, indem zu diesem Wert jeweils ein Vielfaches der Periodendauer $T = 0,52\,\text{s}$ hinzuaddiert wird.



Somit gilt:

Etwa zu den Zeitpunkten $t_1 = 0,26\,\text{s}$, $t_2 = 0,78\,\text{s}$, $t_3 = 1,30\,\text{s}$, $t_4 = 1,82\,\text{s}$ usw. nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab.

Alternativer Lösungsweg

Die Minima der Ableitung liegen an den **Wendestellen** von v vor, bei denen die Steigung negativ ist. Die erste solche Stelle t_1 existiert laut der Zeichnung nachdem die Hälfte einer Periode vergangen ist:

$t_1 = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{12} \approx 0,26\,\text{s}$.

Die weiteren Stellen ergeben sich wie oben indem jeweils ein Vielfaches der Periodendauer von $T = 0,52$ s hinzu addiert wird.

Berechnung des nach 50 Periodendauern zurückgelegten Weges

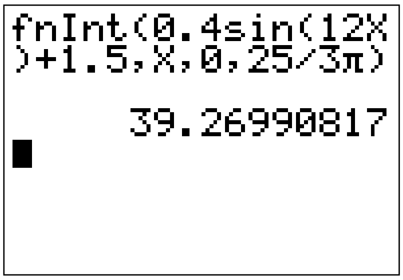
Die Geschwindigkeit v entspricht der **Änderungsrate** des Weges. Der Weg s lässt sich also durch **Integration** von $v(t)$ berechnen.

Die Integrationsgrenzen sind dabei 0 sowie $50 \cdot T = \frac{50}{6}\pi = \frac{25}{3}\pi$:

$$s = \int_0^{\frac{25}{3}\pi} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{25}{3}\pi} (0,4\sin(12t) + 1,5)\,\mathrm{d}t$$

Das Integral lässt sich über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR berechnen, es beträgt etwa 39,27.

Nach 50 Periodendauern hat der Schwimmer einen Weg von etwa $39,3\,\text{m}$ zurückgelegt.



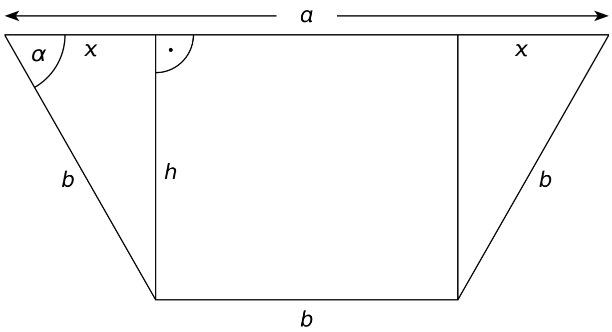
Aufgabe I 2.2

a) **Wahl eines sinnvollen Definitionsbereichs für α** (5VP)

Man wird wohl annehmen, dass die Tröge oben breiter als unten sein sollen. Der Winkel α liegt dann in einem Definitionsbereich von $\mathbb{D} =]0^\circ; 90^\circ[$.

Höhe und obere Kante in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α

Eine kleine Information fehlt hier: Die Höhe und die obere Kante können nicht **nur** in Abhängigkeit von Neigungswinkel dargestellt werden, sondern nur vom Neigungswinkel **und** einer weiteren Länge, z.B. der Breite b.



Mithilfe von Trigonometrie lassen sich die beiden Größen nun in Abhängigkeit von α und b darstellen. So gilt zum einen:

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{bzw.} \quad h = b \cdot \sin\alpha.$$

Mit einer Hilfsstrecke x (vgl. Skizze) gilt weiterhin:

$$\cos\alpha = \frac{x}{b} \quad \text{bzw.} \quad x = b \cdot \cos\alpha.$$

Die Hilfsstrecke erweist sich hier als nützlich, denn es gilt $a = b + 2x = b + 2b \cdot \cos\alpha$.

Nachweis der Flächeninhaltsfunktion

Ein Trapez mit der Oberkante a, der Grundseite b und der Höhe h besitzt allgemein einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$.
Werden die obigen Abhängigkeiten in diese Formel eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \frac{1}{2}(a+b)\cdot h = \frac{1}{2}(b + 2b\cdot\cos\alpha + b)\cdot b\cdot\sin\alpha \\
&= \frac{1}{2}(2b + 2b\cdot\cos\alpha)\cdot b\cdot\sin\alpha \\
&= (b + b\cdot\cos\alpha)\cdot b\cdot\sin\alpha \\
&= b(1+\cos\alpha)\cdot b\cdot\sin\alpha \\
&= b^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel für den Flächeninhalt in Abhängigkeit vom Neigungswinkel nachgewiesen.

b) **Bestimmung des Neigungswinkels für ein maximales Trogvolumen** (7VP)

Die Tröge sollen nun quadratisch sein und haben daher laut Aufgabentext die Länge $\ell = b\cdot(1 + 2\cos\alpha) = a$ (vgl. Teilaufgabe a). Die Breite der Bretter beträgt nun $b = 0,5\,\text{m}$.

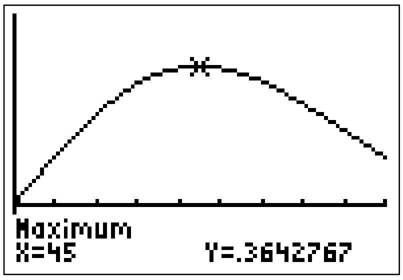
Mit der Formel für den Flächeninhalt $A(\alpha)$ und der obigen Formel für die Länge $\ell(\alpha)$ ergibt sich für das Volumen V eines solchen Troges:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= A(\alpha)\cdot\ell(\alpha) \\ &= \left[b^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\right]\cdot[b(1+2\cos\alpha)] \\ &= b^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot b(1+2\cos\alpha) \\ &= b^3\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot(1+2\cos\alpha) \end{aligned}$$

Mit $b=0,5$ ergibt sich weiterhin $V(\alpha)=0,125\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot(1+2\cos\alpha)$.

Nun ist derjenige Winkel α gesucht, für den $V(\alpha)$ maximal wird. Er kann mit dem GTR bestimmt werden. Da dieser Winkel in Grad gesucht ist, **muss der GTR nun auf das Gradmaß (Degree) eingestellt werden.**

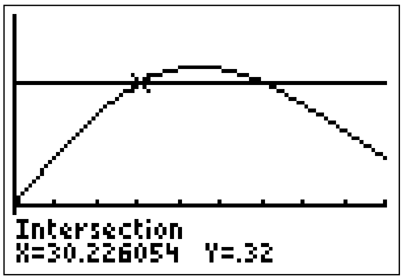
Über $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{4: maximum}}$ ergibt sich das globale Maximum $0,364$ von V für $\alpha=45^\circ$. Ein Trog mit quadratischer Pflanzfläche besitzt für $\alpha=45^\circ$ sein maximales Volumen von $0,364\,\text{m}^3 = 364\,\text{Liter}$.



Werte von α, sodass vier Säcke Erde in den Trog passen

Es sind nun diejenigen Werte von α gesucht, bei denen das Volumen $V(\alpha)$ mindestens $4\cdot 80\,\text{Liter} = 320\,\text{Liter} = 0,32\,\text{m}^3$ beträgt.

Mit dem GTR können die Werte von α berechnet werden, für die der Trog genau $0,32\,\text{m}^3$ Erde fasst. Dazu wird das Schaubild der Funktion V mit der Geraden $y=0,32$ mit dem Befehl $\boxed{\text{2nd} \to \text{TRACE (CALC)} \to \text{5: intersect}}$ geschnitten. Es ergeben sich die beiden Winkel $\alpha_1\approx 30,2^\circ$ und $\alpha_2\approx 60,9^\circ$.



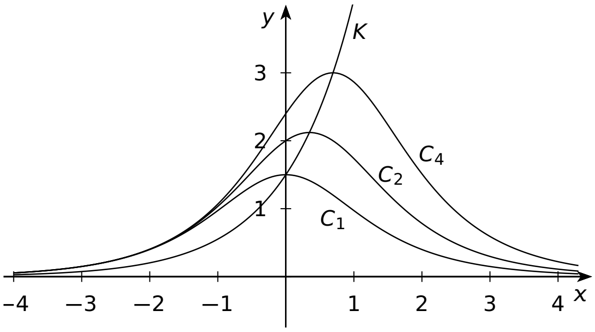
Am Schaubild ist weiterhin erkennbar: Für alle Winkel, die zwischen α_1 und α_2 liegen, ist das Volumen $V(\alpha)$ größer als $0,32$. Somit ergibt sich:

Wenn der Neigungswinkel etwa zwischen $30,2^\circ$ und $60,9^\circ$ liegt, kann man den Blumentrog mit 4 Säcken Blumenerde von je 80 Litern Inhalt befüllen.

Aufgabe I 3.1

a) **Schaubilder von drei Scharkurven** (5VP)

Mithilfe des GTR lassen sich drei Schaubilder von Scharkurven C_k erstellen. Nebenstehend sind die Scharkurven C_1, C_2 und C_4 abgebildet. Beachten Sie bei Ihrer Wahl, dass der Parameter k **positiv** sein soll!



Untersuchung des Verhaltens von f_k für $x \to \pm\infty$

Zunächst wird das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ untersucht. Hierbei gilt $e^x \to 0$ sowie auch $e^{2x} \to 0$.
Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3ke^x}{e^{2x}+k}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3k\cdot \underbrace{e^x}_{\to 0}}{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+k}\right) \to 0.$$

Um das Verhalten von f_k für $x \to +\infty$ zu bestimmen, wird zunächst innerhalb des Funktionsterms mit e^x gekürzt:

$$f_k(x) = \frac{3ke^x}{e^{2x}+k} = \frac{3k}{e^x + \frac{k}{e^x}} = \frac{3k}{e^x + ke^{-x}}$$

Für $x \to +\infty$ gilt weiterhin $e^x \to +\infty$ und $e^{-x} \to 0$.
Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3k}{e^x + ke^{-x}}\right) \to 0.$$

Insgesamt gilt damit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) = 0$. Für das Schaubild von f_k bedeutet dies, dass die x-Achse mit der Gleichung $y = 0$ seine waagrechte Asymptote ist.

Zusammenstellung gemeinsamer Eigenschaften der Schaubilder

Anhand der obigen Schaubilder ergeben sich folgende gemeinsamen Eigenschaften:

- Jedes Schaubild besitzt genau einen Extrempunkt, nämlich einen Hochpunkt.
- Jedes der Schaubilder verläuft oberhalb der x-Achse, die gleichzeitig ihre Asymptote darstellt.
- Jedes der Schaubilder besitzt exakt zwei Wendepunkte.
- Jedes Schaubild ist achsensymmetrisch zur einer Parallelen zur y-Achse, die durch seinen Hochpunkt verläuft.

b) **Berechnung der Koordinaten des Hochpunktes** (6VP)

Im Aufgabentext wird bereits festgelegt, dass jedes Schaubild exakt einen Hochpunkt besitzt, der Nachweis mit der zweiten Ableitung muss daher nicht durchgeführt werden!
Um den Hochpunkt zu bestimmen, wird lediglich die erste Ableitung von f_k benötigt, die sich nach der Quotienten- und Kettenregel bestimmen lässt:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \frac{3ke^x\cdot(e^{2x}+k) - 3ke^x\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+k)^2} \\ &= \frac{3ke^{3x} + 3k^2e^x - 6ke^{3x}}{(e^{2x}+k)^2} \\ &= \frac{3k^2e^x - 3ke^{3x}}{(e^{2x}+k)^2} && \mid \text{im Zähler } 3ke^x \text{ ausklammern} \\ &= \frac{3ke^x(k-e^{2x})}{(e^{2x}+k)^2} \end{aligned}$$

Die Extremstellen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung $f_k'(x) = 0$. Der Bruchterm nimmt dabei den Wert Null an, wenn sein **Zähler** gleich Null ist:

$$\begin{aligned} f_k'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3ke^x(k-e^{2x}) &= 0 && \mid 3ke^x \text{ kann selbst nie Null werden!} \\ k-e^{2x} &= 0 \\ e^{2x} &= k \\ 2x &= \ln k \\ x &= \frac{1}{2}\ln k \end{aligned}$$

Der Hochpunkt liegt also an der Stelle $x = \frac{1}{2}\ln k$.

Die zugehörige y-Koordinate ist dabei:

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{1}{2}\ln k\right) &= \frac{3k\cdot e^{\frac{1}{2}\ln k}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln k}+k} && \mid \text{Logarithmengesetz: } \tfrac{1}{2}\ln k = \ln k^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{k} \\ &= \frac{3ke^{\ln\sqrt{k}}}{e^{\ln k}+k} = \frac{3k\cdot\sqrt{k}}{k+k} \\ &= \frac{3k\cdot\sqrt{k}}{2k} = \frac{3}{2}\sqrt{k} \end{aligned}$$

Der Hochpunkt des Schaubildes C_k ist somit insgesamt $H_k\left(\frac{1}{2}\ln k \mid \frac{3}{2}\sqrt{k}\right)$.

Bestimmung einer Gleichung der Ortskurve K aller Hochpunkte

Alle Hochpunkte besitzen die Koordinaten $x = \frac{1}{2}\ln k$ und $y = \frac{3}{2}\sqrt{k}$.

Um die Gleichung der Ortskurve zu bestimmen, wird die x-Koordinate nach k aufgelöst und dann in die y-Koordinate eingesetzt. Dabei wird der störende Parameter k eliminiert:

$$x = \frac{1}{2}\ln k \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln k \quad \Leftrightarrow \quad k = e^{2x}.$$

Einsetzen in $y = \frac{3}{2}\sqrt{k}$:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{e^{2x}} = \frac{3}{2}\sqrt{(e^x)^2} = \frac{3}{2}e^x.$$

Die Gleichung der Ortskurve beträgt damit $y = \frac{3}{2}e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild K ist bereits im Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) eingezeichnet.

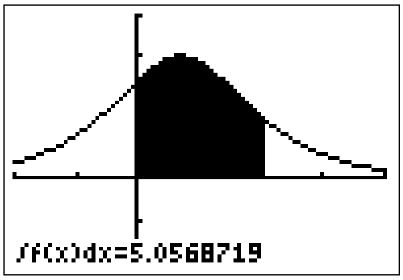
c) **Berechnung des Flächenzuwachses in den ersten 2 Minuten** (3VP)

Die Zuwachsrate einer Bakterienkultur wird durch den Term $f_4(x) = \dfrac{12e^x}{e^{2x}+4}$ beschrieben.

Die von der Kultur in den ersten zwei Minuten bedeckte **Fläche** entspricht dem Integral über dieser Funktion von 0 bis 2:

$$A = \int_0^2 f_4(x)\,dx = \int_0^2 \frac{12e^x}{e^{2x}+4}\,dx$$

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow 7\text{: } \int f(x)\,dx}$ lässt sich das Integral beispielsweise mit dem GTR berechnen, es beträgt etwa $5,057$.
In den ersten zwei Minuten vergrößert sich die von der Kultur bedeckte Fläche um rund $5,1\,\text{cm}^2$.



Aufgabe I 3.2

Es wird behauptet, dass die Funktion h_n mit $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ die n-te Ableitung h'_n mit $h'_n(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ besitzt. Dabei werden die Produktregel und die Ableitung der Funktion h_1 mit $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$ benötigt. (4VP)

Der Beweis soll über das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** geführt werden.

Induktionsanfang

Zunächst muss gezeigt werden, dass die angegebene Formel für $n = 1$ stimmt. Die Funktion h_1 mit $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$ besitzt die Ableitung $h'_1(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Mit der Formel ergibt sich derselbe Ausdruck, für $n = 1$ ist die Behauptung damit wahr.

Induktionsschritt

Es wird angenommen, dass für eine beliebige Zahl $k \geq 1$ die entsprechende Funktion h_k mit $h_k(x) = \dfrac{1}{x^k}$ die Ableitung h'_k mit $h'_k(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$ besitzt.

Dann muss für die Folgezahl $k+1$ und h_{k+1} mit $h_{k+1} = \dfrac{1}{x^{k+1}}$ automatisch gelten:
$h'_{k+1}(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$.

Um dies zu beweisen, muss der Funktionsterm von h_{k+1} zunächst als Produkt geschrieben werden:

$$h_{k+1}(x) = \frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x} = h_k(x) \cdot h_1(x).$$

Mithilfe der Produktregel ergibt sich dann für die Ableitung von h_{k+1}:

$$\begin{aligned} h'_{k+1}(x) &= h'_k(x) \cdot h_1(x) + h_k(x) \cdot h'_1(x) \\ &= -\frac{k}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{k}{x^{k+2}} - \frac{1}{x^{k+2}} \\ &= -\frac{k+1}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

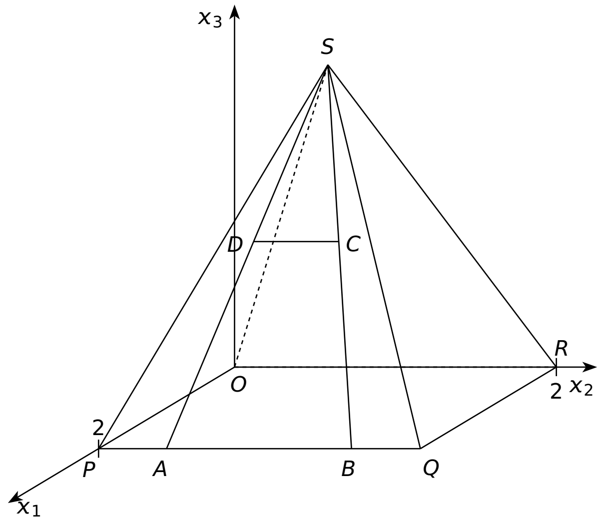
Damit ist die Ableitung von h_{k+1} nachgewiesen. Insgesamt gilt die Behauptung damit für alle $n \geq 1$.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) **Berechnung des stumpfen Winkels zwischen zwei Seitenflächen** (6VP)

Um die Aufgabe zu bearbeiten, muss die gegebene Pyramide zunächst in ein geeignete Koordinatensystem eingebettet werden. Beispielsweise kann dazu die hintere linke Ecke der Pyramide in den Koordinatenursprung O gelegt werden.



Wegen der Seitenlänge und der Höhe der Pyramide von jeweils 2,0 m ergeben sich damit folgende Koordinaten der Eckpunkte:
$O(0 \mid 0 \mid 0)$, $P(2 \mid 0 \mid 0)$, $Q(2 \mid 2 \mid 0)$, $R(0 \mid 2 \mid 0)$ und $S(1 \mid 1 \mid 2)$.

Der gesuchte stumpfe Winkel kann z.B. zwischen den beiden Seitenflächen OPS und PQS berechnet werden. Dazu wird jeweils ein **Normalenvektor** von jeder der beiden Seitenflächen benötigt.

Die Seitenfläche OPS wird von den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OS}$ aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}_1$ dieser Fläche ergibt sich damit zu:

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurde innerhalb des Normalenvektors mit 2 gekürzt, was zulässig ist, da der Normalenvektor ein Richtungsvektor ist.

Die zweite Seitenfläche PQS wird von den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS}$ aufgespannt. Für ihren Normalenvektor $\vec{n}_2$ ergibt sich:

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittwinkel β dieser beiden Vektoren gilt:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 78,5^\circ.$$

Der gesuchte Winkel α zwischen zwei Seitenflächen ist laut Aufgabentext ein **stumpfer Winkel**. Er muss daher der Nebenwinkel zu β sein:

$\alpha = 180^\circ - \beta \approx 180^\circ - 78,5^\circ = 101,5^\circ.$

Zwei benachbarte Seitenflächen im Zelt bilden einen Winkel von etwa $101,5^\circ$.

b) **Bestimmung des Anteils der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche** (5VP)

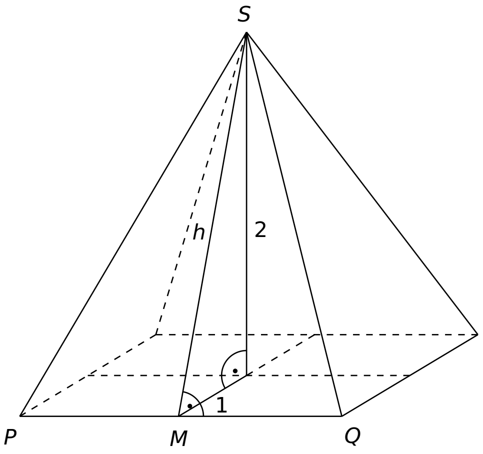
Ein möglicher Lösungsweg zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist z.B. folgender:

Laut Aufgabentext ist die Pyramide 2 m hoch und gerade, die Seiten der Grundfläche sind ebenfalls 2 m lang. Für die Höhe h der Pyramidenseite PQS gilt dann mithilfe des Satzes von Pythagoras:

$h^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{5}.$

Nach der Dreiecksformel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ gilt dann für den Flächeninhalt des Dreiecks PQS:

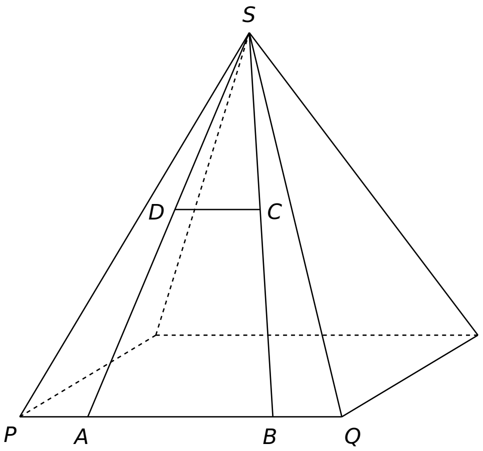
$$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}\,\text{m}^2.$$



Hinweis: Da das Dreieck PQS gleichschenklig ist, lässt sich seine Höhe auch mithilfe der Vektorrechnung bestimmen: Der Punkt $M(2\,|\,1\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke PQ. Für die Höhe h gilt dann:

$$h = \overline{MS} = |\overrightarrow{MS}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Die Punkte C bzw. D sind jeweils die Mittelpunkte von A uns S bzw. B und S. Da die Strecke $\overline{CD}$ weiterhin parallel zu $\overline{AB}$ ist, bedeutet dies nach dem zweiten Strahlensatz, dass CD genau **halb so lang** wie $\overline{AB}$ ist. Ihre Länge beträgt damit $0,5$ m.
Nach dem ersten Strahlensatz hat das Trapez $ABCD$ weiterhin eine Höhe, die genau halb so lang ist wie die Höhe der Pyramide. Somit ist $h_T = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.



Für den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung, also dem Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h_T \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,5) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{8}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Für den Anteil p der Einstiegsöffnung an der gesamten Vorderfläche gilt damit in Prozent:

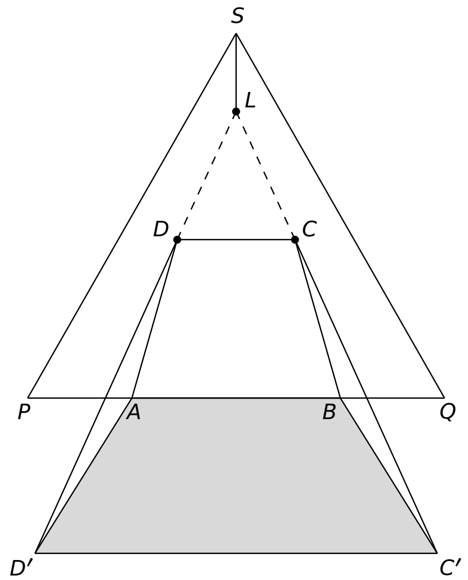
$$p\,\% = \frac{A_{ABCD}}{A_{PQS}} \cdot 100\,\% = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot 100\,\% = \frac{3}{8} \cdot 100\,\% = 0,375 \cdot 100\,\% = 37,5\,\%.$$

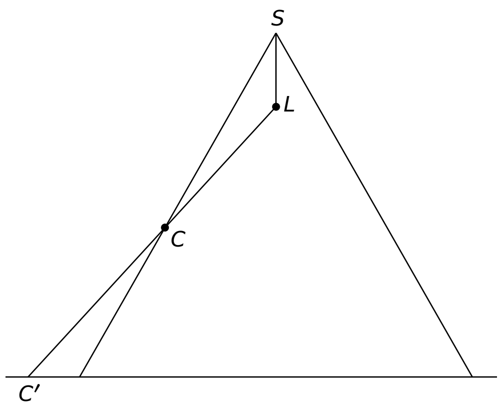
Die Einstiegsöffnung beansprucht $37,5\,\%$ der gesamten Vorderfläche.

c) **Berechnung der Länge der Strecke $\overline{C'D'}$** (5VP)

Die Lichtquelle L liegt 25 cm unter der Pyramidenspitze $S(1\,|\,1\,|\,2)$. Sie hat damit die Koordinaten $L(1\,|\,1\,|\,1,75)$.

Nebenstehend ist das Zelt mit dem (grau gefärbten) Lichtteppich in räumlicher Frontalsicht dargestellt. Der Punkt C' liegt genau dort, wo der Lichtstrahl von der Lichtquelle L aus durch den Punkt C auf den Boden auftrifft. Der Boden liegt hier in der x_1x_2-Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.
Die Punkte A und B haben einen Abstand von $1,0$ m und liegen symmetrisch in der Seite $\overline{PQ}$. Der Punkt A hat somit einen halben Meter Abstand zu $P(2\,|\,0\,|\,0)$ und damit die Koordinaten $A(2\,|\,0,5\,|\,0)$, der Punkt B ist entsprechend $0,5$ m entfernt von Q und hat die Koordinaten $B(2\,|\,1,75\,|\,0)$.
Der Punkt C ist laut Aufgabentext bei b) der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BS}$ mit $S(1\,|\,1\,|\,2)$ und hat damit die Koordinaten $C(1,5\,|\,1,25\,|\,1)$ (seine Koordinaten sind jeweils die Mittelwerte der Koordinaten von B bzw. S).
Entsprechend ist D der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AS}$, somit hat er die Koordinaten $D(1,5\,|\,0,75\,|\,1)$.





Der Bildpunkt C' ist der Schnittpunkt einer Geraden g durch L und C mit der x_1x_2-Ebene. Für g gilt:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von g in die Koordinatengleichung $x_3 = 0$ der x_1x_2-Ebene kann nun der Schnittpunkt C' berechnet werden:

$$g \cap E_{x_1x_2}\colon \quad 1,5 - 0,75r = 0$$
$$r = \frac{1,75}{0,75} = \frac{7}{3}$$

Der Schnittpunkt C' liegt somit für $r = \frac{7}{3}$ auf der Geraden g:

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{19}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'\left(\frac{13}{6}\,\middle|\,\frac{19}{12}\,\middle|\,0\right).$$

Entsprechend wie oben ergibt sich der zweite Bildpunkt D' als Schnittpunkt einer Geraden h durch L und D mit der x_1x_2-Ebene.

$$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OL} + s \cdot \overrightarrow{LD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Koordinaten in $x_3 = 0$:

$$h \cap E_{x_1x_2}\colon \quad 1,75 - 0,75s = 0$$

$$s = \frac{1,75}{0,75} = \frac{7}{3}$$

Für den Punkt D' ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D'\left(\frac{13}{6} \mid \frac{5}{12} \mid 0\right).$$

Für die Länge ℓ der Strecke $\overline{C'D'}$ ergibt sich letztlich:

$$\ell = \overline{C'D'} = |\overrightarrow{C'D'}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{12} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \approx 1,17.$$

Die Strecke $\overline{C'D'}$ besitzt eine Länge von $\frac{7}{6} \approx 1,17\,\text{m}$.

Aufgabe II 2.1

a) **Beschreibung der Lage der Scharebene E_3** (5VP)

Da in der Koordinatengleichung von E_3: $3x_1 - x_3 = 0$ die x_2-Koordinate fehlt, muss E_3 **parallel** zur x_2-Achse verlaufen.

Die Ebene verläuft weiterhin durch den Koordinatenursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$. Die Ebene verläuft damit nicht nur parallel zur x_2-Achse, sondern enthält sie sogar vollständig.

Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes D_a

Die Lotgerade ℓ_a zu E_a besitzt als Richtungsvektor einen **Normalenvektor** von E_a, nämlich $\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Da sie weiterhin durch den Punkt $A(10 \mid 0 \mid 0)$ verlaufen soll, ergibt sich als Geradengleichung:

$$\ell_a\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{n}_a = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt D_a wird nun berechnet, indem die Koordinaten von ℓ_a in die Koordinatengleichung von E_a: $ax_1 - x_3 = 0$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \ell_a \cap E_a:\ a\cdot(10+t\cdot a)-(-t) &= 0 \\ 10a + a^2\cdot t + t &= 0 \\ 10a + t\cdot(a^2+1) &= 0 \\ t\cdot(a^2+1) &= -10a \\ t &= -\frac{10a}{a^2+1} \end{aligned}$$

Für den Punkt D_a ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OD_a} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{10a}{a^2+1}\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-\frac{10a^2}{a^2+1}\\0\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10(a^2+1)-10a^2}{a^2+1}\\0\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{10a^2+10-10a^2}{a^2+1}\\0\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{1+a^2}\\0\\\frac{10a}{1+a^2}\end{pmatrix} \Rightarrow D_a\left(\frac{10}{1+a^2} \mid 0 \mid \frac{10a}{1+a^2}\right)$$

Der Punkt D_a hat die Koordinaten $D_a\left(\frac{10}{1+a^2} \mid 0 \mid \frac{10a}{1+a^2}\right)$.

b) **Nachweis, dass das Dreieck $\boldsymbol{ABD_a}$ stets rechtwinklig ist** (3VP)

Um zu überprüfen, ob das Dreieck ABD_a rechtwinklig ist, muss untersucht werden, ob jeweils zwei Seitenvektoren des Dreiecks senkrecht zueinander verlaufen.
Es können beispielsweise zunächst die Seitenvektoren $\overrightarrow{AD_a}$ und $\overrightarrow{BD_a}$ darauf untersucht werden. Wenn sie senkrecht zueinander sind, muss ihr Skalarprodukt Null ergeben.

Mit $\overrightarrow{AD_a} = \begin{pmatrix}-\frac{10a^2}{1+a^2}\\0\\\frac{10a}{1+a^2}\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix}\frac{10}{1+a^2}\\-10\\\frac{10a}{1+a^2}\end{pmatrix}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD_a}\circ\overrightarrow{BD_a} &= -\frac{10a^2}{1+a^2}\cdot\frac{10}{1+a^2} + 0\cdot(-10) + \frac{10a}{1+a^2}\cdot\frac{10a}{1+a^2} \\ &= -\frac{100a^2}{(1+a^2)^2} + \frac{100a^2}{(1+a^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

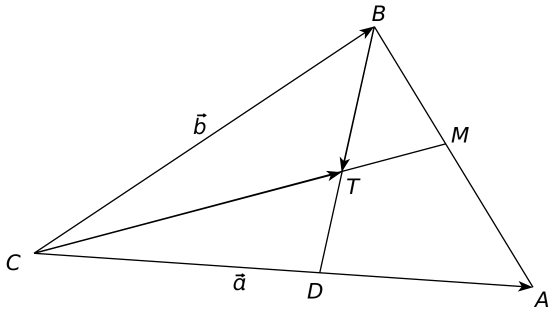
Somit besitzt jedes Dreieck ABD_a unabhängig von a einen rechten Winkel im Punkt D_a.

Hinweis: Beginnt man mit den anderen beiden Seiten, ergibt sich $\overrightarrow{AD_a}\circ\overrightarrow{AB} \neq 0$ und auch $\overrightarrow{BD_a}\circ\overrightarrow{AB} \neq 0$, das Dreieck hat somit weder im Punkt A noch im Punkt B einen rechten Winkel.

Aufgabe II 2.2

(8VP)

Um das Teilverhältnis zu bestimmen, wird ein **geschlossener Vektorzug** aufgestellt, der über den Teilungspunkt T verläuft, z.B.:
$\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.
Nun müssen die einzelnen Vektoren daraus mithilfe unserer Basisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden. Dazu müssen nun weitere Informationen aus dem Text zur Hilfe genommen werden.



Der Punkt M ist der Mittelpunkt von A und B. Für den Vektor $\overrightarrow{CM}$ gilt damit $\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

Der Punkt T teilt die Strecke CM weiterhin laut Aufgabentext im Verhältnis 3 : 1. Dies bedeutet, dass $\overrightarrow{CT}=3\cdot\overrightarrow{TM}$ gilt bzw. $\overrightarrow{CT}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CM}$.

Nun zu den einzelnen Vektoren aus dem Vektorzug von oben. Für die einzelnen Vektoren gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CT}&=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CM}\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für den Vektor $\overrightarrow{TD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TD}&=r\cdot\overrightarrow{BD}\\&=r\cdot(-\vec{b}+\overrightarrow{CT})\\&=r\cdot\left(-\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)\\&=r\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

Da der Vektor $\overrightarrow{DC}$ ein Bruchteil so lang ist wie unser Grundvektor $\vec{a}$, lässt sich für ihn einfach $\overrightarrow{DC}=s\cdot(-\vec{a})=-s\cdot\vec{a}$.

Die ganzen Abhängigkeiten müssen nun in den obigen geschlossenen Vektorzug eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)+r\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}\right)-s\cdot\vec{a}&=\vec{0} &&\mid \text{Klammern ausmultiplizieren}\\ \frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}r\cdot\vec{a}-\frac{5}{8}r\cdot\vec{b}-s\cdot\vec{a}&=\vec{0} &&\mid \vec{a}\text{ und }\vec{b}\text{ ausklammern}\\ \left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}r-s\right)\cdot\vec{a}+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{8}r\right)\cdot\vec{b}&=\vec{0}\end{aligned}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeigen in verschiedene Richtungen, sie sind linear unabhängig. Der Term kann also nur dann den Nullvektor ergeben, wenn die Ausdrücke $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}r-s$ und $\frac{3}{8}-\frac{5}{8}r$ jeweils gleich Null sind, dann ergibt sich nämlich $0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}=\vec{0}$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}+\frac{3}{8}r-s&=0\\ \frac{3}{8}-\frac{5}{8}r&=0\end{aligned}$$

Aus Gleichung II folgt $\frac{3}{8} = \frac{5}{8}r$ und damit $r = \frac{3}{5}$. Wird dies in die erste Gleichung eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} - s = 0$$

$$s = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Mit $r = \frac{3}{5}$ gilt nun beispielsweise $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{BT}$. Für das gesuchte Teilverhältnis ergibt sich damit sofort:

Der Punkt T teilt die Strecke BD im Verhältnis $3 : 5$.