Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

Aufgabe 2 (2VP)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$.

Aufgabe 3 (3VP)

Lösen Sie die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$.

Aufgabe 4 (4VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2};\; x \neq 0$.

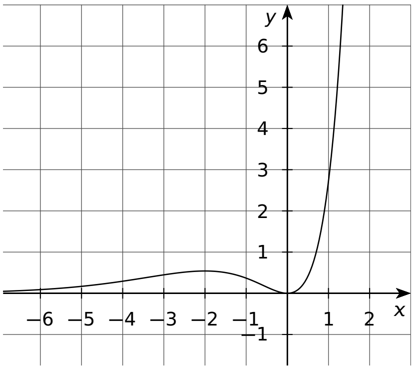
Geben Sie die Asymptoten des Schaubilds von f an.
Skizzieren Sie damit das Schaubild von f.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen im Punkt $P(2\,|\,f(2))$.

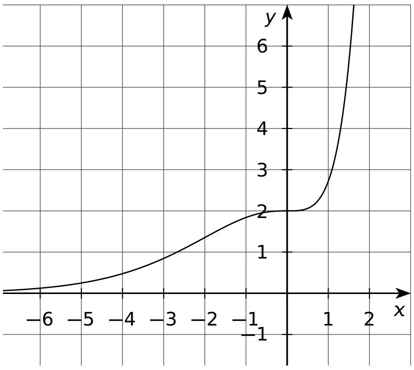
Aufgabe 5 (5VP)

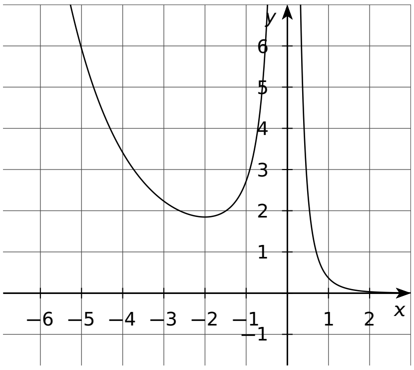
Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

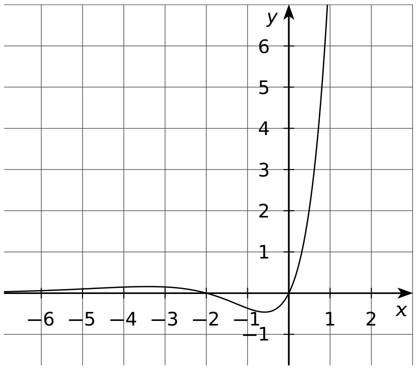
a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

b) Ordnen Sie die Funktion f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.









Aufgabe 6 (4VP)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 10 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ \text{III} & x_1 + x_2 - x_3 & = & 3 \end{array}$$

Wie lässt sich ein solches Gleichungssystem und seine eindeutige Lösung geometrisch deuten?

Aufgabe 7 (3VP)

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2\,|\,-1\,|\,-2)$ und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ enthält.

Aufgabe 8 (3VP)

Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt.
P wird an E gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen.
Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Wahlteil IAufgabe I 1.1

Ein Supermarkt A führt eine neue Zahnpasta ein. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende wöchentliche Verkaufszahlen:

Verkaufzahlen	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	26	46	60	76	86

In einem Modell beschreibt die Funktion f der Form $f(x)=\dfrac{ax+15}{bx+15}$ die verkaufte Stückzahl $f(x)$ innerhalb der Woche x.

a) Bestimmen Sie a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche. (5VP)

Zeichnen Sie das Schaubild K der Funktion f für das erste Jahr.

Wie entwickeln sich nach diesem Modell die wöchentlichen Verkaufszahlen während des ersten Jahres?

Nennen Sie mögliche Gründe für diese Entwicklung.

(Teilergebnis: $f(x)=\dfrac{427x+15}{2x+15}$)

b) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft. (3VP)

Nach wie vielen Wochen sind insgesamt mehr als 1500 Tuben verkauft?

c) Gleichzeitig mit dem neuen Supermarkt A bringt der Supermarkt B ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x)=214-214\cdot \mathrm{e}^{-0{,}08x}$ beschreiben. (6VP)

Zeichnen Sie das Schaubild C dieser Funktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.

Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen?

Wann hat der Supermarkt A den größten Vorsprung an insgesamt verkauften Tuben?

Beschreiben Sie, wie sich anhand der Schaubilder abschätzen lässt, bis zu welchem Zeitpunkt in beiden Supermärkten etwa gleich viele Tuben verkauft sind.

Aufgabe I 1.2

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ mit $x\in\mathbb{R}$ die n-te Abteilung $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(x-n)}{\mathrm{e}^x}$ für $n\geq 1$ besitzt. (4VP)

Aufgabe I 2

Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch

$f(x) = \cos x;$ $\quad D_f = [-\pi;\ \pi]$, und

$g(x) = \dfrac{1}{1-\cos x};$ $\quad D_g = D_f \backslash \{0\}$.

a) Skizzieren Sie die Schaubilder von f und g. (7VP)

Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.

Wie groß ist deren Inhalt?

Die Funktion f soll nun durch eine quadratische Funktion h ersetzt werden, welche die gleichen Nullstellen wie f hat.

Bestimmen Sie eine Gleichung von h so, dass die Schaubilder von h und f mit der x-Achse gleich große Flächen einschließen.

b) Bestimmen Sie die Punkte auf dem Schaubild von g, die vom Hochpunkt des Schaubilds von f den kleinsten Abstand haben. (4VP)

c) Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch (7VP)

$$f_t(x) = t \cdot \cos x;\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Das Schaubild der Funktion f_t schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper.

Berechnen Sie dessen Volumen in Abhängigkeit von t.

Berechnen Sie t^* so, dass die 1. Winkelhalbierende das Schaubild von f_{t^*} rechtwinklig schneidet.

Aufgabe I 3.1

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestands in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2};\quad t \geq 0$$

beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen pro Jahr).

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq t \leq 6$. (6VP)
Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$.
Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt.
Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt?
Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(t) = \dfrac{-1}{e^t + 1}$ eine Stammfunktion von f ist. (5VP)
Welcher Fischbestand ist zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung zu erwarten?
Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten?

Aufgabe I 3.2

Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestands proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden. (7VP)

Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.

Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Nach wie vielen Monaten sind 5.000 Fische in dem Teich vorhanden?

Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind?

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Gegeben sind eine Pyramide $ABCDS$ mit den Punkten $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,0\,|\,0)$, $C(8\,|\,8\,|\,0)$, $D(0\,|\,8\,|\,0)$ und $S(4\,|\,4\,|\,8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene
E_r: $rx_1 + 3x_3 = 8r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar. (7VP)

Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante BC und schneidet die Kante DS in F und die Kante AS in G.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an.

Zeichnen Sie das Viereck $BCFG$ ein.

Zeigen Sie, dass das Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.

Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

b) Bestimmen Sie r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat. (4VP)

Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt. (5VP)

Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.

Welche Schnittfiguren sind möglich?

Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

Aufgabe II 2.1

Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,1\,|\,3)$ und $B(2\,|\,5\,|\,3)$ sowie die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad r \in \mathbb{R}.$$

a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g. (4VP)

Bestimmen Sie eine Gleichung von E.

Beschreiben Sie die Lage von E.

Welchen Abstand hat g von E?

b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. (5VP)

Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?

Bestimmen Sie einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

c) Das Dreieck ABC mit $C(2\,|\,3\,|\,5)$ rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel. (3VP)

Bestimmen Sie dessen Volumen.

Aufgabe II 2.2

Die Punkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken PQ und PR, die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken QS und RS. (4VP)
Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.