Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP

Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 e^{2x}$ wird nach der **Produktregel** gebildet. Dabei ist zu beachten, dass der Term e^{2x} nach der Kettenregel abgeleitet $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$ ergibt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot 2e^{2x} \\ &= 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} \quad | \ e^{-2x} \text{ ausklammern} \\ &= e^{2x} \cdot \left(3x^2 + 2x^3\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2VP)

Durch Integration der Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ ergibt sich eine Stammfunktion F mit

$$\begin{aligned} F(x) &= 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} x^5 \\ &= 8\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5 \end{aligned}$$

Der Term $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ kann dabei durch die „innere Integration" mit der allgemeinen Regel $\cos(ax) \longrightarrow \frac{1}{a}\sin(ax)$ integriert werden. Eine Stammfunktion von $\cos x$ ist dabei $\sin x$.

Aufgabe 3 (3VP)

Da in jedem Summanden auf der linken Seite ein x vorkommt, kann man dieses zunächst ausklammern:

$$\begin{aligned} x^5 - 3x^3 - 4x &= 0 \\ x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die erste Lösung $x_1 = 0$.
Die weiteren Lösungen ergeben sich nun aus der Gleichung $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Diese **biquadratische Gleichung** lässt sich lösen, indem jeweils ein x^2 mit u ersetzt (substituiert) wird. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$u^2 - 3u - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} u_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ u_1 &= 4 \\ u_2 &= -1 \end{aligned}$$

Die Substitution muss mit diesen zwei Lösungen nun wieder rückgängig gemacht werden. Aus $u_1 = 4$ ergibt sich damit $4 = x^2$ und daraus $x_{2/3} = \pm 2$.
Mit der zweiten Lösung $u_2 = -1$ ergibt sich $-1 = x^2$. Diese Gleichung ist allerdings nicht weiter lösbar.

Die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$ hat also die einzigen drei Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.

Aufgabe 4 (4VP)

Asymptoten angeben

Waagrechte Asymptote: Grenzwert betrachten, um herauszufinden, an welchen Wert sich das Schaubild annähert.

$$\lim_{x\to\infty} 4-\frac{4}{x^2}=4$$

Wenn $x\to\infty$ läuft, wird der Nenner des Bruchs $\frac{4}{x^2}$ unendlich groß, der Zähler verändert sich jedoch nicht. Dadurch läuft der Bruch gegen 0, weil 4 durch diese unendlich große Zahl geteilt wird.

Somit besitzt das Schaubild die waagerechte Asymptote $y=4$.

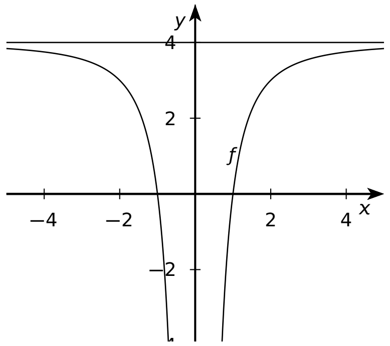
Die senkrechten Asymptoten können nur an den **Definitionslücken** von f auftreten. Die Definitionslücken existieren an den Stellen, an denen der Nenner des Bruches gleich Null ist:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \qquad \mid \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Somit besitzt f eine senkrechte Asymptote bei $x=0$.

Da es eine Nenner-Nullstelle 2. Grades ist, handelt es sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Schaubild skizzieren



Gleichung der Normalen ermitteln

Gleichung der Normalen im Punkt $P(2\mid f(2))$ ermitteln:

Um die Gleichung der Normalen aufzustellen, wird als Voraussetzung der y-Wert von P, sowie die Steigung in diesem Punkt benötigt: $f(2)=3$

$$f'(x)=8x^{-3}$$
$$f'(2)=1$$

Die Steigung, die eben bestimmt wurde, stellt die Steigung der Tangente dar, die in P anliegt. Da die Normale orthogonal zur Tangente steht, gilt für ihre Steigung:

$$m_n=-\frac{1}{m_t}.$$

Die Funktionsgleichung der Normalen kann nun mit Hilfe der allgemeinen Tangentengleichung berechnet werden:

$$n\colon y=-\frac{1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$$
$$y=-\frac{1}{1}\cdot(x-2)+3$$
$$y=-(x-2)+3$$
$$y=-x+5$$

Aufgabe 5 (5VP)

a) Begründung für Bild 1 als f

Nur das Schaubild der Funktion f besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x=0$.

b) Funktionen den Schaubildern zuordnen

Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' muss an der Stelle, an der das Schaubild der Funktion f Extremstellen besitzt, Nullstellen aufweisen, d.h. bei $x=-2$ und $x=0$.

Des Weiteren muss es im Intervall von -2 bis 0 unterhalb der x-Achse verlaufen, weil das Schaubild von f in diesem Intervall fällt (negative Steigung).

Somit erweist sich Bild 4 als das Schaubild von f'.

Da die Funktion g an der Stelle $x=0$ eine Definitionslücke aufweist (Nullstelle im Nenner), muss ihr Schaubild an dieser Stelle eine senkrechte Asymptote besitzen.

Bild 3 zeigt also das Schaubild der Funktion g.

Das Schaubild der Stammfunktion F muss streng monoton steigend sein, weil das Schaubild von f nur oberhalb der x-Achse verläuft (nur positive Steigung).

Außerdem muss es an der Stelle $x=0$ aufgrund der doppelten Nullstelle im Schaubild von f einen Sattelpunkt und an der Stelle $x=-2$ einen Wendepunkt besitzen (Schaubild von f zeigt einen Extrempunkt).

Deshalb stellt Bild 2 das Schaubild der Funktion F dar.

Aufgabe 6 (4VP)

Lineares Gleichungssystem lösen

$$\begin{array}{ccccccl}
x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\
\hline
x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
 & & 2x_2 & & & = & 2 \quad | \ I-II \quad \Rightarrow x_2=1 \\
 & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \quad | \ I-III \\
\hline
x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
 & & x_2 & & & = & 1 \\
 & & 3 & + & 2x_3 & = & 7 \quad | \ \text{Einsetzen: } x_2=1 \quad \Rightarrow x_3=2 \\
\hline
x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 10 \\
 & & x_2 & & & = & 1 \\
 & & & & x_3 & = & 2 \\
\hline
x_1 & + & 4 & + & 2 & = & 10 \quad | \ \Rightarrow x_1=4 \\
 & & x_2 & & & = & 1 \\
 & & & & x_3 & = & 2 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbb{L} = \{4; 1; 2\}$

Geometrische Interpretation der Lösungsmenge

Geometrisch gesehen haben wir den Schnittpunkt dreier Ebenen bestimmt. Die drei Gleichungen aus dem LGS sind dabei die Koordinatengleichungen der Ebenen. Der Schnittpunkt S dieser Ebenen ist $S(4\,|\,1\,|\,2)$.

Aufgabe 7 (3VP)

Koordinatengleichung ermitteln

Zuerst wird eine Parametergleichung der Ebene aufgestellt, die folgende Form besitzt:

$E{:}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + r \cdot \overrightarrow{u} + s \cdot \overrightarrow{v}$

Als Stützvektor der Ebene kann der Stützvektor der gegebenen Gerade benutzt werden.

Den ersten Spannvektor bildet der Richtungsvektor der Geraden.

Den zweiten Spannvektor bildet der Verbindungsvektor zwischen dem Stützvektor und dem Punkt A:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Ebene in Parameterform lautet somit

$$E{:}\ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um die Parameterform in eine Koordinatenform zu überführen, wird zunächst der Normalenvektor der Ebene gebildet.

Die Koordinaten des Normalenvektors können später in der Koordinatenform, anstelle der Variablen a, b und c, eingesetzt werden.

Der Normalenvektor der Ebene wird über das Kreuzprodukt der Spannvektoren gebildet.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Da bei dem Normalenvektor nur die Richtung und nicht dessen Länge ausschlaggebend ist, wird der Faktor vier aus Gründen der Vereinfachung gekürzt.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn die Koordinaten des Normalenvektors für a, b und c in der Koordinatenform eingesetzt werden, ergibt sich folgendes:

$E{:}\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = d$

Um einen Wert für d zu bekommen, werden die Koordinaten des Stützvektors für x_1, x_2, und x_3 eingesetzt und die Gleichung nach d aufgelöst:

$$\begin{aligned} -3 - 6 + 3 &= d \\ -6 &= d \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung der Ebene in Koordinatenform:

$E{:}\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6$

Aufgabe 8 (3VP)

Verfahren beschreiben

Um P an E zu spiegeln, muss eine Gerade g berechnet werden, die durch P geht und senkrecht auf E steht. Der Punkt, in dem g E durchstößt, ist der Fußpunkt F.

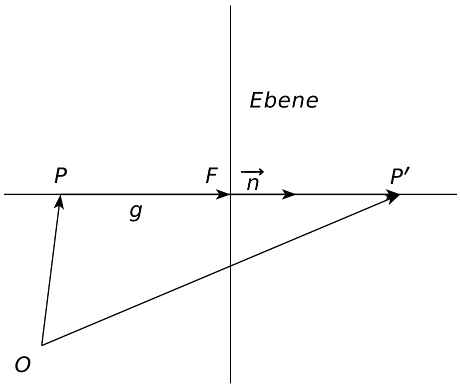
Zur Berechnung der Geraden g nimmt man den Ortsvektor von P als Stützvektor und den Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor:

$g\colon \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{n}$

Nun wird der Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E berechnet und es ergibt sich der Fußpunkt F. Der Vektor $\overrightarrow{PF}$ bildet also den Verbindungsvektor zwischen Punkt P und Ebene E.

Um P an E zu spiegeln, wird der Verbindungsvektor nun zwei Mal zum Ortsvektor von P addiert, d.h. man 'geht' von P aus zwei Mal in Richtung $\overrightarrow{PF}$; einmal, um bis zur Ebene E zu gelangen und dann noch einmal, um im gleichen Abstand hinter der Ebene E zu liegen.

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PF}$



Wahlteil IAufgabe I 1.1

a) **Bestimmung der beiden Parameter a und b** (5VP)

Laut Aufgabentext sollen die beiden Parameter mit Hilfe von den Werten der **ersten** und **fünften** Woche berechnet werden, also mit $f(1)$ und $f(5)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 26 \\ 26 &= \frac{a+15}{b+15} && \mid \cdot (b+15) \\ 26(b+15) &= a+15 \\ 26b+390 &= a+15 && \mid -15 \\ 26b+375 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 86 \\ 86 &= \frac{5a+15}{5b+15} && \mid \cdot (5b+15) \\ 86(5b+15) &= 5a+15 \\ 430b+1290 &= 5a+15 && \mid -15 \\ 430b+1275 &= 5a && \mid : 5 \\ 86b+255 &= a \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen sind nun jeweils nach a aufgelöst. Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 26b+375 &= 86b+255 && \mid -26b \mid -255 \\ 120 &= 60b && \mid : 60 \\ 2 &= b \end{aligned}$$

Somit ist $b = 2$. Wird dieser Wert in eine der Ausgangsgleichungen (z.B. $a = 26b + 375$) eingesetzt, so ergibt sich $a = 26 \cdot 2 + 375 = 427$.

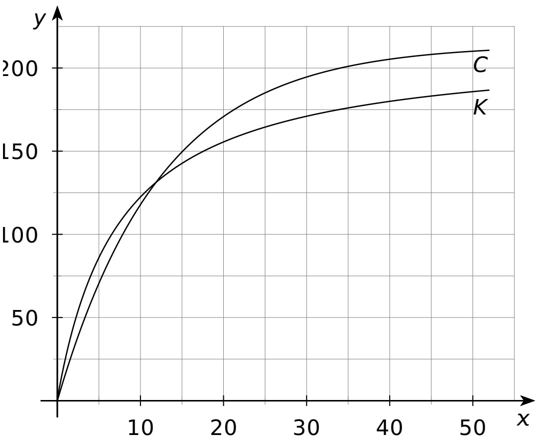
Die Funktion f ist somit durch $f(x) = \dfrac{427x+15}{2x+15}$ gegeben.

Alternativ hätte man das obige LGS auch mit dem GTR lösen können.

Zeichnung des Schaubilds von f

Das Schaubild von f soll für das erste Jahr gezeichnet werden. Da x in Wochen angegeben wird, muss K also für $0 \leq x \leq 52$ dargestellt werden. Das Schaubild ergibt sich dabei mithilfe des GTR.

Hier ist auch noch das Schaubild C der Funktion g eingezeichnet, die später auftauchen wird.



Beschreibung und Begründung Verkaufszahlenentwicklung

In den ersten Wochen steigen die wöchentlichen Verkaufszahlen zunächst stark an, dann flacht die Zunahme der Verkaufszahlen ab und die Kurve nähert sich einer oberen Schranke an.

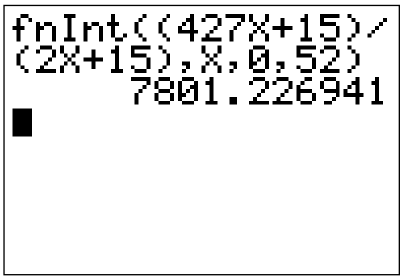
Dies liegt daran, dass die Zahnpasta ein neues Produkt ist und somit über ein hohes Kaufinteresse bei Kunden verfügt.

Mit der Zeit jedoch bildet sich ein fester Kundenkreis, der die Zahnpasta kontinuierlich kauft und es kommen kaum noch neue Kunden hinzu. Das Produkt ist bekannt und keine Neuware mehr, deshalb steigen die wöchentlichen Verkaufszahlen nicht mehr weiter an.

b) **Berechnung der Anzahl verkaufter Tuben** (3VP)

Um die Anzahl N der verkauften Tuben in den ersten 52 Wochen zu bestimmen, müssen alle Funktionswerte von f von $x=0$ bis $x=52$ aufsummiert werden. Dies wird mithilfe eines **Integrals** gemacht:

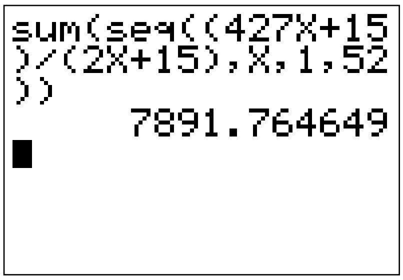
$$N = \int_0^{52} f(x)\,dx$$



Das Integral lässt sich über MATH → 9: fnInt berechnen, es beträgt etwa 7.801.
In den ersten 52 Wochen verkauft Supermarkt A etwa 7.800 Tuben Zahnpasta.

Alternativer Lösungsweg

Alternativ zum Integral können auch die einzelnen Funktionswerte von f von $x=1$ bis $x=52$ mit dem GTR aufsummiert werden.

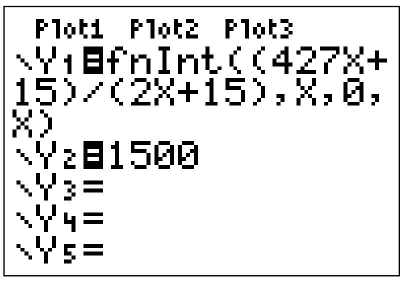


Dazu wird über 2nd → STAT (LIST) das LIST-Menü aufgerufen und dort über die Befehlsfolge LIST → MATH → 5: sum und dann LIST → OPS → 5: seq die Summe berechnet. Nebenstehend ist der genaue Befehl abgebildet.
Nach dieser Methode ergibt sich $N \approx 7.890$, hier wurden also etwa 7.890 Tuben verkauft.

In diesem Fall summiert der GTR tatsächlich auch nur ganzzahlige Werte von x auf, es ist hier also $S = f(1)+f(2)+\ldots+f(52) \approx 7.890$.

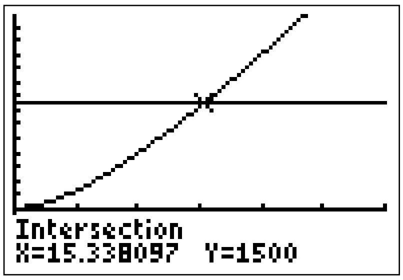
Berechnung der Wochenzahl mit mehr als 1500 verkaufen Tuben

Nun ist der Zeitpunkt x_0 gesucht, an dem die Gesamtzahl der verkauften Tuben erstmals größer als 1.500 ist, also $N = \int_0^{x_0} f(x)\,dx \geq 1.500$ ist.



Mit dem GTR kann berechnet werden, wann die **Integralfunktion** $N(x) = \int_0^{x} f(t)\,dt$ genau den Wert 1.500 besitzt. Die Integralfunktion kann wie nebenstehend im Y-Editor eingegeben werden, das Schaubild zeichnet der GTR aufgrund des hohen Rechenaufwands allerdings nur sehr langsam.

Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ lässt sich das Schaubild dann mit der Geraden $y = 1.500$ schneiden, es ergibt sich die Schnittstelle $x \approx 15,3$. Somit wurden nach etwa $15,3$ Wochen 1.500 Tuben Zahnpasta verkauft.



c) **Zeichnung des Schaubildes von** g (6VP)

Beim Supermarkt B werden die Verkaufszahlen eines Konkurrenzproduktes durch die Funktion g mit $g(x) = 214 - 214 \cdot e^{-0,08x}$ beschrieben.

Das Schaubild C von g ergibt sich ebenfalls mit dem GTR. Es ist bereits im Koordinatensystem von Teilaufgabe a) eingezeichnet.

Bestimmung der langfristigen Verkaufszahlen

Nun muss berechnet werden, gegen welchen Wert die Verkaufszahlen $g(x)$ streben, wenn die Zeitdauer x immer größer wird. Dazu wird der **Grenzwert** von g für $x \to \infty$ gebildet:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \left[214 - 214 \cdot \underbrace{e^{-0,08x}}_{\to 0} \right] = 214 - 0 = 214.$$

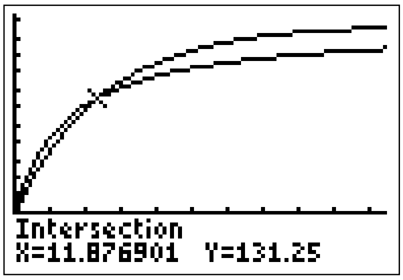
Langfristig kann der Supermarkt B mit etwa 214 verkauften Tuben Zahnpasta pro Woche rechnen.

Berechnung des größten Verkaufsvorsprungs von Supermarkt A

Betrachtet man die Schaubilder der beiden Kurven, so fällt auf, dass das Schaubild der Funktion f zuerst oberhalb des Schaubildes von g verläuft, dass sich die Schaubilder dann schneiden und das Schaubild von g oberhalb dem von f verläuft.

Den größten Vorsprung hat die Funktion f folglich dann genau zu dem Zeitpunkt, an dem sich die Schaubilder der beiden Funktionen schneiden. Bis hierhin konnte f seinen Vorsprung ausbauen, der nun dadurch, dass das Schaubild von g oberhalb verläuft, immer geringer wird.

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, werden die beiden Schaubilder von f und g gezeichnet und über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ miteinander geschnitten. Es ergibt sich die Schnittstelle $x \approx 11,9$.
Nach etwa 12 Wochen hat der Supermarkt A seinen größten Vorsprung an verkauften Tuben.

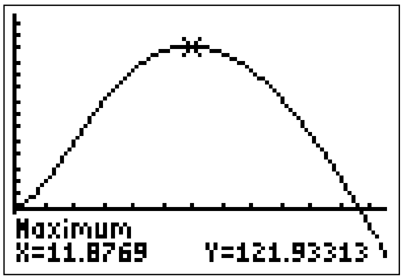


Alternativer Lösungsweg

Der Vorsprung vom Supermarkt A in Bezug auf Supermarkt B wird durch den **Unterschied** der verkauften Tuben beschrieben. Für diesen gilt:

$$N(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x g(t)dt = \int_0^x (f(t) - g(t))\,dt.$$

Der größte Vorsprung von Supermarkt A entspricht dann dem **Maximum** dieser Funktion, welches mit dem GTR bestimmt werden.

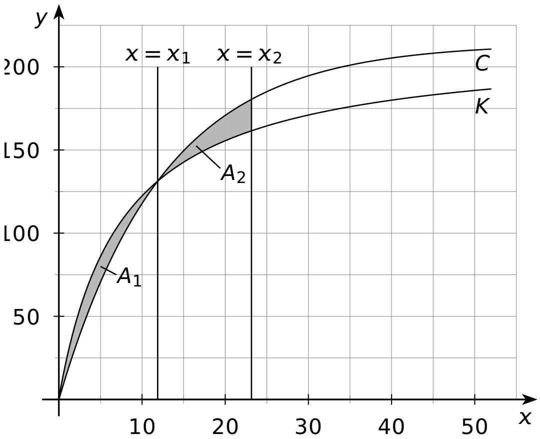


Dazu wird diese Integralfunktion wie oben mit dem Befehl MATH → 9: fnInt im Y-Editor eingegeben und gezeichnet. Über 2nd → TRACE (CALC) → 4: maximum lässt sich anschließend das Maximum von $N(x)$ bestimmen, es liegt etwa bei $x \approx 11,9$.
Nach etwa 12 Wochen hat Supermarkt A den größten Vorsprung.

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen beiden Lösungsvarianten ergibt sich mithilfe der Integralrechnung. Die Integralfunktion $N(x)$ besitzt nämlich ihr Maximum an der Stelle, an der $N'(x) = 0$ gilt.

Wegen $N'(x) = \left(\int\limits_0^x (f(t) - g(t))\, dt \right)' = f(x) - g(x)$ ergibt sich also die Bedingung $f(x) - g(x) = 0$ bzw. $f(x) = g(x)$. Damit wäre man wieder bei der ersten Lösungsvariante angelangt.

Beschreibung einer Abschätzung des Verkaufsgleichstands



Der Flächeninhalt unterhalb einer der beiden Kurven gibt jeweils an, wieviele Tuben bis zur jeweiligen Obergrenze x hin verkauft wurden.
Die Schnittfläche A_1 zwischen K und C reicht bis zur Schnittstelle x_1 der beiden Kurven. Die Funktion f nimmt hier größere Werte als die Funktion g an. Die Fläche A_1 gibt somit an, wie viele Tuben Supermarkt A bis zum Zeitpunkt x_1 **mehr** verkauft hat als Supermarkt B.

Ab dem Zeitpunkt x_2 verkauft Supermarkt B mehr Tuben pro Woche als Supermarkt A. Die Schnittfläche A_2 von x_1 bis zu einer gewissen Obergrenze x_2 zeigt nun, wieviele Tuben Supermarkt B mehr verkauft hat als Supermarkt A.

Wenn diese Flächen gleich groß sind, müssen die Verkaufszahlen bei beiden Supermärkten gleich groß sein. Dazu kann der obere Zeitpunkt x_2 so abgeschätzt werden, dass die beiden Flächen in etwa denselben Inhalt besitzen.

Aufgabe I 1.2

Es wird behauptet, dass die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ die n-te Ableitung (4VP)

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$ für $n \geq 1$ besitzt.

Der Beweis hierfür soll über das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** geführt werden.

Induktionsanfang

Es muss zunächst gezeigt werden, dass die Aussage für $n=1$ wahr ist. Es gilt dabei für die erste Ableitung von f nach der Quotientenregel:

$$f'(x)=\frac{1\cdot \mathrm{e}^x-x\cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}.$$

Nach der angegebenen Formel gilt $f^{(1)}(x)=\dfrac{(-1)^1(x-1)}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$. Somit gilt $f'(x)=f^{(1)}(x)$, der Induktionsanfang ist gesichert.

Induktionsschritt

Es wird angenommen, dass die Behauptung für irgendein beliebiges $k\geq 1$ gilt:

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k(x-k)}{\mathrm{e}^x}=(-1)^k\cdot\frac{x-k}{\mathrm{e}^x}.$$

Dann muss sie automatisch auch für die Folgezahl $k+1$ gelten:

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}(x-(k-1))}{\mathrm{e}^x}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{x-k-1}{\mathrm{e}^x}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\left[f^{(k)}(x)\right]'=f^{(k+1)}(x)$ gilt. Um dies zu beweisen, wird $f^{(k)}$ nach der Quotientenregel abgeleitet:

$$\begin{aligned}
\left[f^{(k)}(x)\right]' &= (-1)^k\cdot\frac{1\cdot \mathrm{e}^x-(x-k)\cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} && \mid \mathrm{e}^x \text{ im Zähler ausklammern}\\
&= (-1)^k\cdot\frac{\mathrm{e}^x(1-(x-k))}{(\mathrm{e}^x)^2} && \mid \mathrm{e}^x \text{ kürzen}\\
&= (-1)^k\cdot\frac{1-x+k}{\mathrm{e}^x} && \mid \text{im Zähler } -1 \text{ ausklammern}\\
&= (-1)^k\cdot\frac{(-1)\cdot(x-k-1)}{\mathrm{e}^x} && \mid -1 \text{ vor den Bruch ziehen; } (-1)^k\cdot(-1)=(-1)^{k+1}\\
&= (-1)^{k+1}\cdot\frac{x-k-1}{\mathrm{e}^x}\\
&= f^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

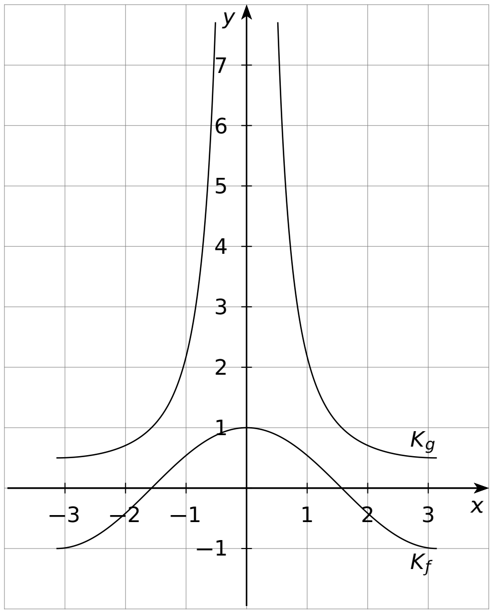
Somit gilt die Aussage für $k+1$. Die Behauptung ist damit für alle $n\geq 1$ bewiesen.

Aufgabe I 2

Stellen Sie zunächst Ihren GTR auf das Bogenmaß (Radian) ein!

a) **Skizze der Schaubilder von f und g** (7VP)

Die Schaubilder der Funktionen f mit $f(x) = \cos x$ und g mit $g(x) = \dfrac{1}{1-\cos x}$ ergeben sich mithilfe des GTR. Achten Sie dabei dringend darauf, dass der GTR auf das Bogenmaß eingestellt ist.

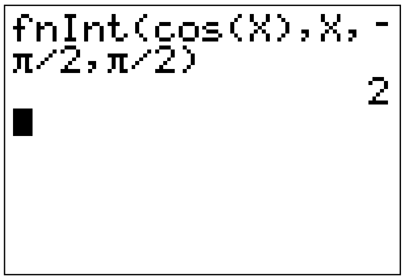


Berechnung des Flächeninhalts

Um die obere und untere Grenze des Integrals zu bestimmen, werden zuerst die Nullstellen von f bestimmt. Aus $\cos x = 0$ folgt hieraus $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Für den Flächeninhalt ergibt sich damit:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1)$$
$$= 2$$



Alternativ kann das Integral auch einfach über $\boxed{\text{MATH} \rightarrow \text{9: fnInt}}$ mit dem GTR bestimmt werden.

Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 2 ein.

Bestimmung einer Gleichung der Funktion h

Die Funktion h ist eine quadratische Funktion. Dabei sind ihre **Nullstellen** bekannt, es bietet sich hierbei deshalb ein sehr besonderer Ansatz für eine Gleichung an:

$$h(x) = a \cdot (x - \text{Nullstelle}) \cdot (x - \text{Nullstelle})$$

Werden nun die Nullstellen $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$h(x) = a \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{| 3. binomische Formel}$$
$$= a \cdot \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Weiterhin soll h mit der x-Achse eine Fläche einschließen, deren Inhalt **genauso groß** wie die von der Funktion f eingeschlossene Fläche ist.

Die von h eingeschlossene Fläche wird beschrieben durch das Integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)dx = a\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\pi^2}{4}x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{\pi^2}{4}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= a\cdot\left(\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi^3}{8}\right) = a\cdot\left(\frac{2\pi^3}{24}-\frac{2\pi^3}{8}\right)$$

$$= a\cdot\left(\frac{2\pi^3}{24}-\frac{6\pi^3}{24}\right) = a\cdot\left(-\frac{4\pi^3}{24}\right) = -a\cdot\frac{\pi^3}{6}$$

Dieser Flächeninhalt soll ebenfalls 2 betragen. Es ergibt sich $2=-a\cdot\frac{\pi^3}{6}$ und damit $a=-\frac{12}{\pi^3}$.

Die Funktion h ist somit gegeben durch $h(x)=-\frac{12}{\pi^3}\cdot\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{12}{\pi^3}x^2+\frac{3}{\pi}$.

b) **Bestimmung der Punkte mit dem kleinsten Abstand zum Hochpunkt** (4VP)

Der Abstand zweier Punkte $P(x_1\mid y_1)$ und $Q(x_2\mid y_2)$ ist gegeben durch $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

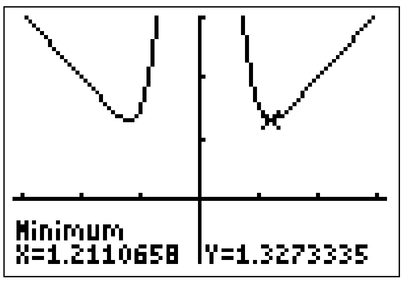
Die Koordinaten des Hochpunkts H vom Schaubild von f können einfach abgelesen werden, es ist $H(0\mid 1)$. Ein Punkt, der auf dem Schaubild von g wiederum liegt, hat **allgemein** die Koordinaten $P(u\mid g(u))$. Vom Hochpunkt hat er den Abstand

$$d(u)=\sqrt{(u-0)^2+(g(u)-1)^2}$$

$$=\sqrt{u^2-\left(\frac{1}{1-\cos u}-1\right)^2}$$

Diese Funktion muss nun auf **Minima** im Bereich $-\pi\le u\le\pi$ untersucht werden.

Dazu wird die Funktion d gezeichnet und mit 2nd → TRACE (CALC) → 3: minimum ihre Minima berechnet. Es ergeben sich zwei Minima, nämlich an den Stellen $u_1\approx -1,21$ und $u_2\approx 1,21$.



Weiterhin ist $g(u_1)=g(u_2)\approx 1,54$. Die beiden Punkte mit minimalem Abstand sind also $P_1(-1,21\mid 1,54)$ und $P_2(1,21\mid 1,54)$.

c) **Bestimmung des Rotationsvolumens** (7VP)

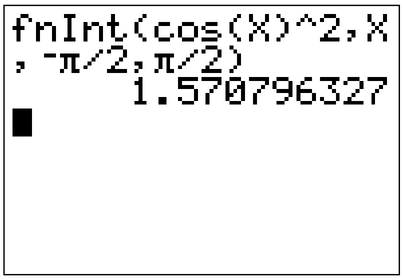
Die Funktionen f_t mit $f_t(x)=t\cdot\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ haben dieselben Nullstellen wie die Kosinusfunktion, nämlich $x_1=-\frac{\pi}{2}$ und $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Für das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich damit:

$$V=\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f_t(x))^2\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t\cdot\cos x)^2\,dx$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cdot (\cos x)^2 \, dx = \pi \cdot t^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \, dx$$

Das letzte Integral kann mit dem GTR berechnet werden, es beträgt etwa $1,57$.
Das Volumen des Rotationskörpers beträgt also $V \approx 1,57\pi \cdot t^2$.



Berechnung von t^* für einen rechtwinkligen Schnitt

t^* soll so berechnet werden, dass die erste Winkelhalbierende das Schaubild von f_{t^*} rechtwinklig schneidet. Die **erste Winkelhalbierende** ist dabei die Gerade $y = x$ mit der Steigung 1.

Für diesen rechtwinkligen Schnitt sind zwei Bedingungen notwendig:

1. Die beiden Schaubilder müssen sich schneiden
2. Die Steigung im Schnittpunkt muss aufgrund der Orthogonalität $m = -1$ betragen

Die Steigung des Schaubildes von f_t an einer Stelle x wird durch die Ableitung $f_t'(x) = t \cdot (-\sin x) = -t \cdot \sin x$ beschrieben.

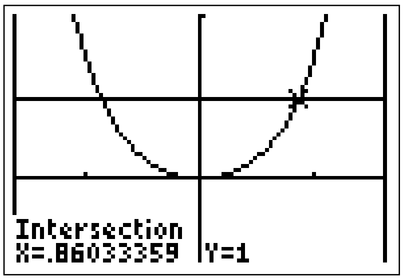
Es ist nun zunächst der t-Wert t^* gesucht, für den die Ableitung $f_{t^*}'(x) = -1$ ist:

$$\begin{aligned} f_{t^*}'(x) &= -1 \\ -t^* \cdot \sin x &= -1 && \mid : (-\sin x) \\ t^* &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Nun muss als nächstes die **Schnittstelle** von f_{t^*} mit der ersten Winkelhalbierenden berechnet werden. Dazu werden die beiden Funktionsgleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} t^* \cdot \cos x &= x && \mid t^* = \frac{1}{\sin x} \\ \frac{\cos x}{\sin x} &= x && \mid \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 &= x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} && \mid \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \\ 1 &= x \cdot \tan x \end{aligned}$$

Um diese Gleichung zu lösen, werden im GTR die Schaubilder von $y = x \cdot \tan x$ und $y = 1$ über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ miteinander geschnitten. Es ergeben sich die beiden Schnittstellen $x_1 \approx -0,86$ und $x_2 \approx 0,86$.
Für t^* ergeben sich damit folgende Werte:



$$t_1^* \approx \frac{1}{\sin 0,86} \approx 1,32 \text{ sowie } t_2^* \approx \frac{1}{\sin(-0,86)} \approx -1,32.$$

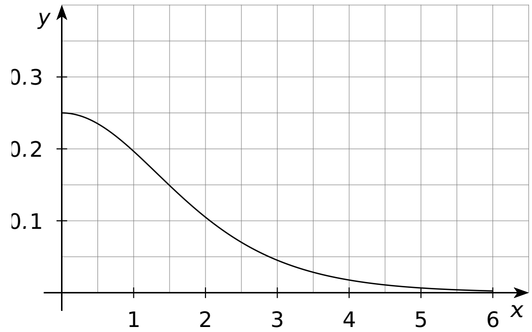
Da $t > 0$ gilt, entfällt die zweite Lösung.

Für $t^* \approx 1,32$ schneidet das Schaubild von f_{t^*} die erste Winkelhalbierende senkrecht.

Aufgabe I 3.1

a) **Skizze des Schaubildes von f** (6VP)

Die Funktion f mit $f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ gibt mit $t \geq 0$ die **Änderungsrate** (und eben nicht den Bestand) eines Fischbestandes an.
Ihr nebenstehendes Schaubild ergibt sich mithilfe des GTR.



Untersuchung des Verhaltens von f im Unendlichen

Um das Verhalten von f im Unendlichen bestimmen zu können, muss der Funktionsterm von f zunächst umgeformt werden:

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{1+2e^t+(e^t)^2} = \frac{1}{\frac{1}{e^t}+2+e^t}.$$

Im letzten Schritt wurde dabei innerhalb des Bruchterms mit e^t gekürzt.

Im Nenner strebt $\frac{1}{e^t} = e^{-t}$ für $t \to \infty$ gegen Null, ist also unerheblich. Allein der Summand e^t ist von Interesse, denn er wächst für $t \to \infty$ ins Unendliche. Der Nenner wird damit immer größer während der Zähler fest bleibt. Somit gilt:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{-t}+2+e^t} = 0.$$

Nachweis, dass f für $t > 0$ monoton fallend ist

Die Funktion f ist genau dann streng monoton fallend, wenn ihre Ableitung f' für $t > 0$ **negativ** ist.

Für die Ableitung f' gilt dabei nach der Quotienten- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{e^t\cdot(1+e^t)^2 - e^t\cdot 2(1+e^t)^1\cdot e^t}{(1+e^t)^4} && \mid (1+e^t) \text{ im Zähler ausklammern}\\
&= \frac{(1+e^t)\cdot\left[e^t\cdot(1+e^t) - e^t\cdot 2\cdot e^t\right]}{(1+e^t)^4} && \mid \text{mit } (1+e^t) \text{ kürzen, Zähler zusammenfassen}\\
&= \frac{e^t+(e^t)^2-2(e^t)^2}{(1+e^t)^3} && \mid e^t \text{ im Zähler ausklammern}\\
&= \frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3} = \frac{-e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}
\end{aligned}$$

Für $t > 0$ sind damit sowohl der Term $1+e^t$ im Nenner positiv, als auch der Ausdruck $e^t - 1$ im Zähler. Allerdings bewirkt der **negative** Faktor $-e^t$, dass der komplette Zähler negativ ist. Somit ist auch die gesamte Ableitung negativ, es gilt $f'(t) < 0$ für $t > 0$.

Die Funktion f ist demnach monoton abnehmend für $t > 0$.

Klärung der Bedeutung für den Fischbestand

Es ist bekannt, dass die Funktion f die **Änderungsrate** des Fischbestandes beschreibt. Die Funktion f selbst besitzt nur positive Funktionswerte, wie es an ihrem Schaubild erkennbar ist – **der Fischbestand nimmt somit stets zu**.

Dass die **Änderungsrate** abnimmt, bedeutet hier bloß, dass der Fischbestand mit der Zeit immer schwächer wächst, er nimmt jedoch trotzdem immer zu.

b) **Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist** (5VP)

Die Funktion F mit $F(t) = \dfrac{-1}{e^t+1}$ ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $F'(t) = f(t)$ gilt. Dies kann durch Ableiten von F mit der Quotientenregel überprüft werden:

$$F'(t) = \frac{0\cdot(e^t+1)-(-1)\cdot e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t).$$

Somit ist F tatsächlich eine Stammfunktion von f.

Bestimmung des Fischbestandes nach 2 Jahren

Man würde meinen, dass die Funktion F als Stammfunktion von f den **Bestand** der Fische beschreibt. Dem ist allerdings nicht so, denn bekanntlich sind alle Funktionen G mit $G(t) = F(t) + c$ Stammfunktionen und müssten alle den Bestand beschreiben.

Tatsächlich beschreibt nur die Stammfunktion G den Bestand, die die Anfangsbedingung erfüllt – dass nämlich zu Untersuchungsbeginn der Fischbestand 4 Millionen Fische umfasst. Es muss also $G(0) = 4$ sein:

$$\begin{aligned} G(0) = F(0) + c = \frac{-1}{e^0+1} + c &= 4 \qquad \mid e^0 = 1 \\ -\frac{1}{2} + c &= 4 \\ c &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Der Fischbestand wird also durch die Gleichung $G(t) = F(t) + 4{,}5 = \dfrac{-1}{e^t+1} + 4{,}5$ beschrieben.

Nach 2 Jahren ergibt sich demnach ein Bestand von

$$G(2) = \frac{-1}{e^2+1} + 4{,}5 \approx 4{,}38 \text{ Millionen Fischen.}$$

Berechnung des langfristig zu erwartenden Bestands

Es muss nun untersucht werden, gegen welchen Wert der Bestand $G(t)$ nach sehr langer Zeit t strebt – wir bilden den Grenzwert von G für $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{e^t+1} + 4{,}5\right] = 0 + 4{,}5 = 4{,}5.$$

Der Nenner des Bruches wächst für $t \to \infty$ über alle Grenzen, daher strebt der Bruch gegen den Wert Null.

Langfristig ist ein Bestand von 4,5 Millionen Fischen im See zu erwarten.

Aufgabe I 3.2

Angabe einer Differenzialgleichung für das beschriebene Wachstum (7VP)

Die Funktion, die den Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, sei g.

Die **Änderungsrate** des Fischbestandes wird dann durch die Ableitung g' von g beschrieben. Sie soll proportional zur noch Platz findenden Menge an Fischen sein.

Zur Zeit t befinden sich $g(t)$ Fische im Teich. Da maximal 7000 Fische in ihm Platz finden können, wäre zu diesem Zeitpunkt also noch Platz für $7000-g(t)$ Fische.

Somit ist $g'(t)$ proportional zu $7000-g(t)$. Proportional bedeutet, dass sie **Vielfache** voneinander sind, somit gilt:

$g'(t)=k\cdot(7000-g(t))$ mit $t\geq 0$.

Dies entspricht der Differenzialgleichung des **beschränkten Wachstums**.

Bestimmung der Funktionsgleichung von g

Die Funktion g mit der Schranke $S=7000$ beschreibt aufgrund ihrer Differenzialgleichung beschränktes Wachstum. Ihre allgemeine Funktionsgleichung lautet daher:

$g(t)=7000-a\cdot e^{-kt}$ mit $t\geq 0$. t wird in Monaten angegeben.

Die Parameter a und k müssen nun mit den Bedingungen aus dem Text berechnet werden.

Es ist bekannt, dass sich Anfangs, also nach $t=0$ Zeitschritten 4000 Fische im Teich befinden. Es ist daher $g(0)=4000$:

$$\begin{aligned} g(0)=7000-a\cdot e^{-k\cdot 0}&=4000 \qquad |\ e^{-k\cdot 0}=e^0=1\\ 7000-a&=4000\\ a&=3000 \end{aligned}$$

Somit ist $a=3000$ und damit $g(t)=7000-3000\cdot e^{-kt}$.

Weiterhin sollen im Teich nach einem Monat 4400 Fische vorhanden sein, somit ist $g(1)=4400$:

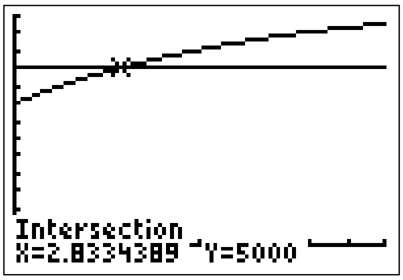
$$\begin{aligned} g(1)=7000-3000\cdot e^{-k\cdot 1}&=4400\\ 3000e^{-k}&=2600\\ e^{-k}&=\frac{2600}{3000}=\frac{13}{15}\\ -k&=\ln\frac{13}{15}\approx -0,1431\\ k&\approx 0,1431 \end{aligned}$$

Die Funktion g hat somit die Funktionsgleichung $g(t)=7000-3000\cdot e^{-0,1431t}$ mit $t\geq 0$.

Bestimmung des Zeitpunkts für 5000 Fische

Es ist nun derjenige Zeitpunkt t gesucht, zu dem $g(t)=5000$ gilt.

Dazu wird mit dem GTR das Schaubild von g mit der Geraden $y = 5000$ über den Befehl $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \text{TRACE (CALC)} \rightarrow \text{5: intersect}}$ geschnitten.
Es ergibt sich die Schnittstelle $t \approx 2,83$.
Nach etwa $2,8$ Monaten umfasst der Fischbestand 5000 Fische.
Diese Gleichung lässt sich jedoch auch von Hand ziemlich schnell lösen.



Handschriftliche Lösung

$$\begin{aligned} g(t) = 7000 - 3000 \cdot \mathrm{e}^{-0,1431t} &= 5000 \\ 3000\mathrm{e}^{-0,1431t} &= 2000 \\ \mathrm{e}^{-0,1431t} &= \tfrac{2}{3} \\ -0,1431t &= \ln \tfrac{2}{3} \\ t &= \frac{\ln \frac{2}{3}}{-0,1431} \approx 2,83 \end{aligned}$$

Nach etwa $2,8$ Monaten umfasst der Fischbestand 5000 Fische.

Berechnung des anfänglichen Fischbestandes

Das neue Wachstum wird durch eine Funktion h mit $h(t) = 7000 - a \cdot \mathrm{e}^{-0,1431t}$ beschrieben.

Dabei bleiben die Schranke $S = 7.000$ und die Wachstumskonstante $k = -0,1431$ konstant (also wie bei der Funktion g), da die Wachstumsbedingungen gleich bleiben sollen. Der Parameter a ändert sich allerdings, da er vom Anfangsbestand abhängt und der nun neu gegeben ist.

Es sollen nun nach 5 Monaten 5.000 Fische vorhanden sein, also ist $h(5) = 5.000$:

$$\begin{aligned} h(5) = 7000 - a \cdot \mathrm{e}^{-0,1431 \cdot 5} &= 5000 \\ a \cdot \mathrm{e}^{-0,7155} &= 2000 \\ a &= \frac{2000}{\mathrm{e}^{-0,7155}} \approx 4090 \end{aligned}$$

Das Wachstum wird also nun durch $h(t) = 7.000 - 4.090 \cdot \mathrm{e}^{-0,1431t}$ beschrieben.

Anfangs befanden sich nach diesem Gesetz dann $h(0) = 7.000 - 4.090 \cdot \mathrm{e}^{0} \approx 2910$ Fische im Teich.

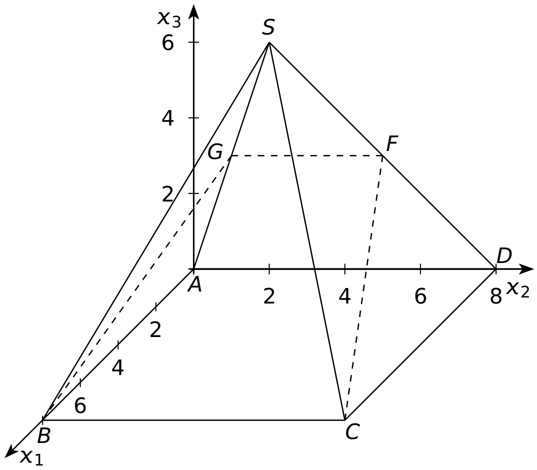
Es müssen sich demnach am Anfang etwa 2.910 Fische im Teich befinden, damit nach 5 Monaten dort 5.000 Fische vorhanden sind.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

a) **Darstellung der Pyramide in einem Koordinatensystem** (7VP)

Werden die Eckpunkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,0\,|\,0)$, $C(8\,|\,8\,|\,0)$, $D(0\,|\,8\,|\,0)$ und $S(4\,|\,4\,|\,8)$ in ein entsprechendes Koordinatensystem eingetragen und mit Linien verbunden, ergibt sich das nebenstehende Schaubild der Pyramide.



Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte F **und** G

F ist der Schnittpunkt der Scharebene E_2: $2x_1 + 3x_3 = 16$ mit der Kante DS. Diese Kante liegt in einer Geraden g_1 durch D und S, für die gilt:

$$g_1\colon \vec{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Punkt F entspricht nun genau dem Schnittpunkt dieser Geraden mit E_2. Um diesen zu berechnen, werden die Koordinaten von g_1 in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} g_1 \cap E_2\colon\ 2(0+4s) + 3(0+8s) &= 16 \\ 8s + 24s &= 16 \\ 32s &= 16 \\ s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

F liegt somit für $s = \frac{1}{2}$ auf der Geraden g_1. Für ihn ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(2\,|\,6\,|\,4)$$

Der Punkt G hingegen ist der Schnittpunkt von E_2 mit der Kante AS. Sie liegt in der Geraden g_2 durch A und S:

$$g_2\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Koordinaten in die Ebenengleichung ergibt wiederum:

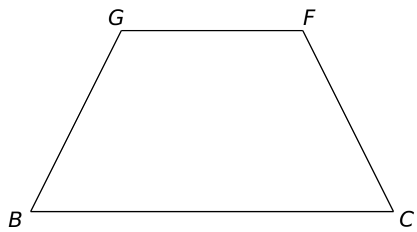
$$g_2 \cap E_2:\ 2(0+4t)+3(0+8t)=16$$
$$\begin{aligned} 8t+24t &= 16 \\ 32t &= 16 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für G ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(2\,|\,2\,|\,4)$$

Es ergibt sich insgesamt $F(2\,|\,6\,|\,4)$ und $G(2\,|\,2\,|\,4)$. Das Viereck $BCGF$ ist oben mit gestrichelten Linien eingezeichnet.

Nachweis des gleichschenkligen Trapezes



Das Viereck $BCGF$ ist genau dann ein Trapez, wenn es mindestens zwei parallele Seiten besitzt. Es ist zudem noch gleichschenklig, wenn die beiden nichtparallelen Seiten gleich lang sind.
Anhand der Skizze lässt sich vermuten, dass die Seiten BC und GF die beiden zueinander parallelen Seiten sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{GF}$ Vielfache voneinander sind.

Es gilt $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{GF}$. Die beiden Vektoren sind tatsächlich Vielfache voneinander und die Seiten BC und GF damit parallel.

Somit müssten die Seiten BG und CF nun noch gleich lang sein, damit das Viereck auch ein **gleichschenkliges** Trapez ist:

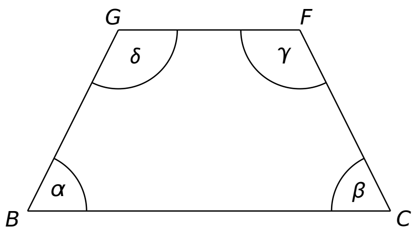
$$\overline{BG} = |\overrightarrow{BG}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+2^2+4^2} = \sqrt{56},$$

$$\overline{CF} = |\overrightarrow{CF}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{56}.$$

Somit sind auch diese beiden Seiten gleich lang. Insgesamt handelt es sich beim Viereck $BCGF$ damit tatsächlich um ein gleichschenkliges Trapez.

Berechnung der Innenwinkel des Trapezes

Wegen der Symmetrie des Trapezes und der Winkelsumme von 360° in einem Viereck muss letztlich nur einer der vier Winkel berechnet werden.



Der Winkel α wird von den Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BG}$ eingeschlossen. Für ihn gilt damit:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BG}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}}{8\cdot\sqrt{56}}$$

$$= \frac{16}{8\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{\sqrt{56}} \approx 0,2673$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 74,5^\circ$

Beachten Sie, dass die Formel für Winkel zwischen Vektoren **ohne** Betragsstriche im Zähler verwendet werden muss, da es sich hier **nicht** um einen Schnittwinkel, sondern einen ganz „normalen" eingeschlossenen Winkel handelt.

Wegen der Symmetrie des Trapezes folgt hieraus sofort $\beta = \alpha \approx 74,5^\circ$. Aufgrund der Summe von 360° in einem Viereck gilt weiterhin $\gamma = \delta = 180^\circ - \alpha \approx 105,5^\circ$.

b) **Bestimmung des Wertes r^*** (4VP)

Gesucht ist nun ein Wert r^*, sodass die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 8)$ der Pyramide von der entsprechenden Scharebene $E_{r^*}: r^*x_1 + 3x_2 = 8r^*$ den Abstand 4 besitzt.

Diese Ebene besitzt die Hesse'sche Normalenform

$$E_{r^*/\mathrm{HNF}}: \frac{r^*x_1 + 3x_3 - 8r^*}{\sqrt{r^{*2} + 3^2}} = \frac{r^*x_1 + 3x_3 - 8r^*}{\sqrt{r^{*2} + 9}} = 0.$$

Der Abstand von S zu dieser Ebene ergibt sich durch Einsetzen seiner Koordinaten in die HNF. Er soll 4 betragen:

$$d(S; E_{r^*}) = \frac{|r^*\cdot 4 + 3\cdot 8 - 8r^*|}{\sqrt{r^{*2}+9}} = \frac{|24 - 4r^*|}{\sqrt{r^{*2}+9}} = 4$$

$$|24 - 4r^*| = 4\cdot\sqrt{r^{*2}+9}$$

Diese **Betragsgleichung** wird gelöst, indem sie quadriert wird:

$$\begin{aligned}(24 - 4r^*)^2 &= 16\cdot(r^{*2}+9)\\ 576 - 192r^* + 16r^{*2} &= 16r^{*2} + 144\\ 432 &= 192r^*\\ r^* &= \frac{432}{192} = \frac{9}{4} = 2,25\end{aligned}$$

Somit hat der Punkt S von der Ebene $E_{2,25}: 2,25x_1 + 3x_3 = 18$ den Abstand 4.

Berechnung der Koordinaten des Punktes mit geringstem Abstand zu S

Der Punkt P auf der Ebene $E_{2,25}$ mit dem geringsten Abstand zu $S(4 \mid 4 \mid 8)$ entspricht dem Schnittpunkt der **Lotgeraden** zu $E_{2,25}$, die durch den Punkt S verläuft, mit eben der Ebene $E_{2,25}$.

Da die Lotgerade senkrecht zur Ebene $E_{2,25}$ verläuft, entspricht der **Normalenvektor** von $E_{2,25}$ ihrem Richtungsvektor. Eine Parametergleichung von ihr ist somit:

$$\ell\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + u \cdot \vec{n}_{2,25} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2,25 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen ihrer Koordinaten in die Ebenengleichung $E_{2,25}\colon 2,25x_1 + 3x_3 = 18$ ergibt sich der u-Wert für den gesuchten Punkt P:

$$\begin{aligned} \ell \cap E_{2,25}\colon\ 2,25(4 + 2,25u) + 3(8 + 3u) &= 18 \\ 9 + 5,0625u + 24 + 9u &= 18 \\ 14,0625u &= -15 \\ u &= \frac{-15}{14,0625} = -\frac{16}{15} \end{aligned}$$

Somit liegt P für $u = -\frac{16}{15}$ auf der Lotgeraden. Für ihn ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{16}{15}\begin{pmatrix} 2,25 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ 4 \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{8}{5} \mid dle\mid 4 \mid dle\mid \frac{24}{5}\right)$$

Der gesuchte Punkt ist $P\left(\frac{8}{5} \mid dle\mid 4 \mid dle\mid \frac{24}{5}\right)$.

c) **Nachweis, dass die Gerade durch B und C in allen Scharebenen liegt** (5VP)

Hier genügt es einfach zu zeigen, dass die beiden Punkte B und C in allen Ebenen E_r liegen, denn dann muss auch automatisch die Gerade durch beide Punkte in allen E_r liegen.

Um zu überprüfen, ob $B(8 \mid 0 \mid 0)$ in allen Scharebenen liegt, werden seine Koordinaten in die allgemeine Gleichung $E_r\colon rx_1 + 3x_3 = 8r$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} B \text{ in } E_r\colon\ r \cdot 8 + 3 \cdot 0 &= 8r \\ 8r &= 8r \end{aligned}$$

Dies ist natürlich für alle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit liegt B in allen Scharebenen.

Mit dem Punkt $C(8 \mid 8 \mid 0)$ ergibt sich genauso:

$$\begin{aligned} C \text{ in } E_r\colon\ r \cdot 8 + 3 \cdot 0 &= 8r \\ 8r &= 8r \end{aligned}$$

Somit liegen beide Punkte in allen Scharebenen und somit auch die Gerade durch diese beiden Punkte.

Bestimmung der möglichen Schnittfiguren mit der Pyramide

Die Ebene E_r dreht sich um die Gerade durch B und C wenn r alle Werte durchläuft.

Enthält die Ebene den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$, enthält sie die gesamte (quadratische) Grundfläche der Pyramide und schneidet diese in einem Quadrat. Die Ebene entspricht dann der x_1x_2-Ebene; es muss $r = 0$ sein (denn dann ergibt sich $3x_3 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ als Ebenengleichung, dies entspricht der Gleichung der x_1x_2-Ebene!).

Wenn die Ebene die Pyramidenspitze $S(4 \mid 4 \mid 8)$ enthält, ergibt sich das gleichschenklige BCS als Schnittfigur. Wird S in die Ebenengleichung eingesetzt, ergibt sich $r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8r$, also $24 = 4r$ und damit $r = 6$.

Somit schneidet E_r für $r = 6$ die Pyramide in einem gleichschenkligen Dreieck.

Nimmt r Werte zwischen diesen beiden „Randwerten“ 0 und 6 an, schneidet die Ebene E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Trapez (wie z.B. die Ebene E_2 in Teilaufgabe a).

Für alle anderen Werte, also entweder $r < 0$ oder $r > 6$ schneidet die Ebene E_r die Pyramide lediglich in der Seitenkante BC, denn diese enthalten sowieso alle Scharebenen.

Zusammengefasst ergibt sich:

- Für $r = 0$ schneidet E_r die Pyramide in einem Quadrat,
- Für $r = 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Dreieck,
- Für $0 < r < 6$ schneidet E_r die Pyramide in einem gleichschenkligen Trapez,
- Für $r < 0$ oder $r > 6$ schneidet E_r die Pyramide nur in der Seitenkante BC.

Aufgabe II 2.1

a) **Bestimmung einer Gleichung der Ebene E** (4VP)

Die Ebene E soll zum einen parallel zur Geraden g sein. Das bedeutet, dass einer ihrer Spannvektoren dem Richtungsvektor der Geraden entsprechen muss. Zum anderen sollen sowohl $A(2 \mid 1 \mid 3)$ als auch $B(2 \mid 5 \mid 3)$ auf der Ebene liegen, daher kann der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ als weiterer Spannvektor verwendet werden.

Wird der Punkt A noch als Stützpunkt verwendet, so ergibt sich für E die Parametergleichung

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u}_g + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(Beachten Sie, dass die Parametergleichung von E hier ausreicht, da keine **Koordinaten**gleichung gefordert wurde. Die Koordinatengleichung von E wäre $x_3 = 3$.)

Beschreibung der Ebenenlage

Die Lage der Ebene lässt sich an ihren Spannvektoren erkennen. Der erste Spannvektor spannt E in Richtung der x_1-Achse auf, der zweite Spannvektor spannt sie in Richtung der x_2-Achse auf. Die Ebene E ist daher **parallel** zur x_1x_2-Ebene.

Berechnung des Abstands von E und g

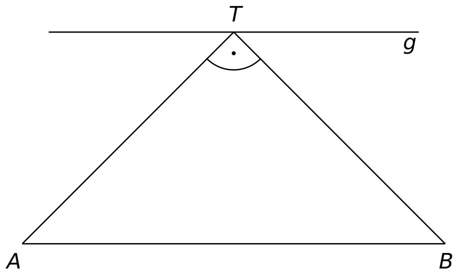
Da E parallel zur x_1x_2-Ebene ist, muss das auch g sein. Der Abstand ergibt sich damit aus der Differenz der x_3-Koordinaten der Punkte auf g bzw. E.

An den beiden Vektorgleichungen lässt sich jeweils aus der 3. Zeile ablesen: Alle Punkte auf g besitzen die x_3-Koordinate 5, alle Punkte auf E die x_3-Koordinate 3.

Der Abstand zwischen g und E beträgt somit $d(g; E) = 5 - 3 = 2$.

b) **Bestimmung der Koordinaten von *T*** (5VP)

Der Punkt T soll auf der Geraden g liegen. Er hat daher allgemein die Koordinaten $T(5+r \mid 3 \mid 5)$ für einen bestimmten r-Wert. Er bildet dann mit den Punkten A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei T. Das bedeutet, dass die Vektoren $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{BT}$ zueinander orthogonal sein müssen:



$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3+r)\cdot(3+r)+2\cdot(-2)+2\cdot 2 = 0$$
$$(3+r)^2-4+4 = 0$$

Es ergibt sich daraus $(3+r)^2 = 0$. Diese Gleichung ist dann erfüllt, wenn der Klammerinhalt $3+r=0$ ist, also für $r=-3$.

Der Punkt T liegt somit für $r=-3$ auf g und hat damit die Koordinaten $T(2 \mid 3 \mid 5)$.

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks

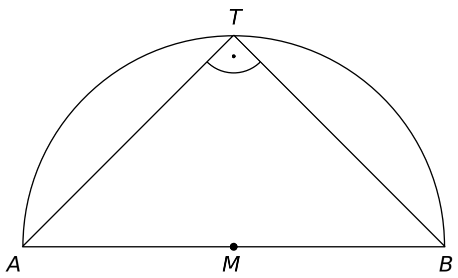
Da das Dreieck rechtwinklig ist, gilt für seinen Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AT}\cdot\overline{BT} = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AT}|\cdot|\overrightarrow{BT}|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{8} = 4$$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von 4 FE.

Bestimmung des Punktes mit gleichem Abstand von *A*, *B* und *T*

Jedes Dreieck besitzt einen **Umkreis**, auf dem alle Eckpunkte liegen. Dessen Mittelpunkt hat dabei von allen drei Eckpunkten denselben Abstand.
Da es sich hier um ein **rechtwinkliges** Dreieck handelt, entspricht dieser Umkreis dem Thaleskreis über der Strecke AB. Sein Mittelpunkt ist ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke AB.

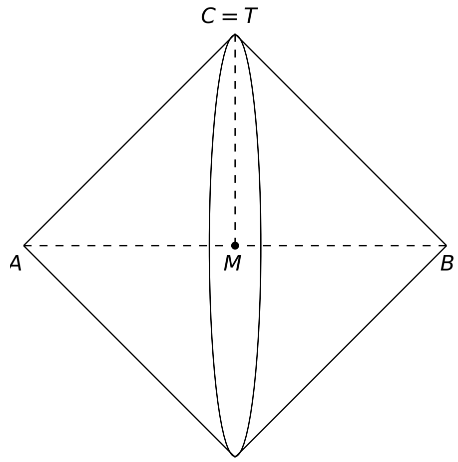


Dieser Punkt zwischen $A(2 \mid 1 \mid 3)$ und $B(2 \mid 5 \mid 3)$ hat die Koordinaten

$$M\left(\frac{2+2}{2} \mid dle| \frac{1+5}{2} \mid dle| \frac{3+3}{2}\right) = M(2 \mid 3 \mid 3).$$

c) **Berechnung des Doppelkegelvolumens** (3VP)

Wie an den Koordinaten erkennbar, entspricht der neue Punkt $C(2 \mid 3 \mid 5)$ genau dem Eckpunkt T des Dreiecks, der in Teilaufgabe b berechnet wurde.
Laut Teilaufgabe B gilt weiterhin $\overline{AT} = \overline{BT} = \sqrt{8}$, das bedeutet dass das Dreieck ABT **gleichschenklig** ist. Das bedeutet, dass der Mittelpunkt M der Grundseite auch der Lotfußpunkt des Lotes ist, dass von C auf die Seite AB gefällt wird.



Bei jedem der beiden Einzelkegel gilt damit für den Grundkreisradius:

$$r = |\overrightarrow{MT}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2.$$

Die Höhe entspricht jeweils der Länge der Strecke $\overline{MB}$:

$$h = |\overrightarrow{MB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$$

Der Doppelkegel besitzt das doppelte Volumen wie einer der Einzelkegel (Volumen: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$). Somit ergibt sich letztlich für das gesuchte Volumen:

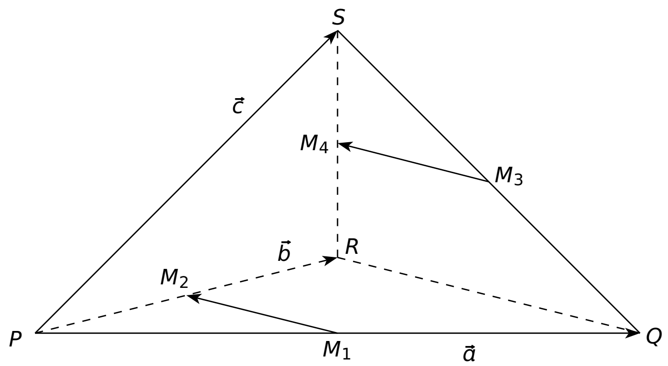
$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{2}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

Der Doppelkegel hat ein Volumen von $\frac{16}{3}$ VE.

Aufgabe II 2.2

Beweis der Beziehung $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ (4VP)

In der nebenstehend gezeichneten Pyramide sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Strecken PQ bzw. PR und M_3 und M_4 die Mittelpunkte der Strecken QS bzw. RS.
Zu beweisen ist die Behauptung, dass zwischen diesen vier Mittelpunkten die Beziehung $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.



Als Grundlage für diesen Beweis werden in der Pyramide die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PR} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{PS} = \vec{c}$ verwendet.

Aus der Figur ist erkennbar, dass zum einen $\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ gilt.

Der zweite Vektor $\overrightarrow{M_3M_4}$ ergibt sich hingegen wie folgt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{c}) - \frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}\end{aligned}$$

Damit gilt tatsächlich $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$, die Behauptung ist bewiesen.