Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=(\sin(x)+7)^5$.

Aufgabe 2 (2VP)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=2e^{4x}+\dfrac{3}{x^2}$.

Aufgabe 3 (3VP)

Lösen Sie für $0\leq x\leq 2\pi$ die Gleichung $\sin(x)\cdot\cos(x)-2\cos(x)=0$.

Aufgabe 4 (4VP)

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\dfrac{2}{x}$ und g mit $g(x)=2x-3$.

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden zugehörigen Graphen.
Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Aufgabe 5 (5VP)

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=x^3-3x-2$.

Abb.1

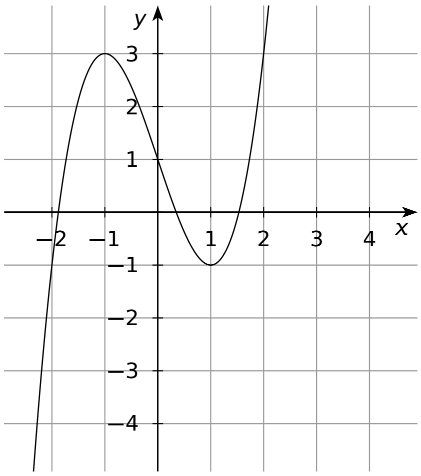


Abb.2

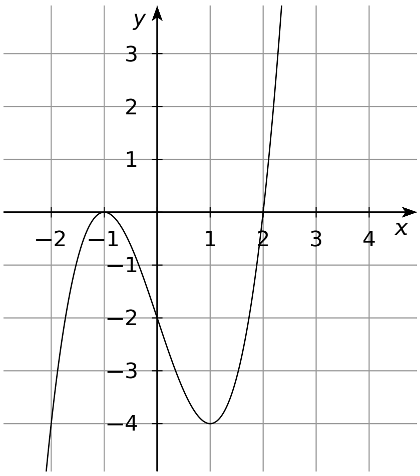


Abb.3

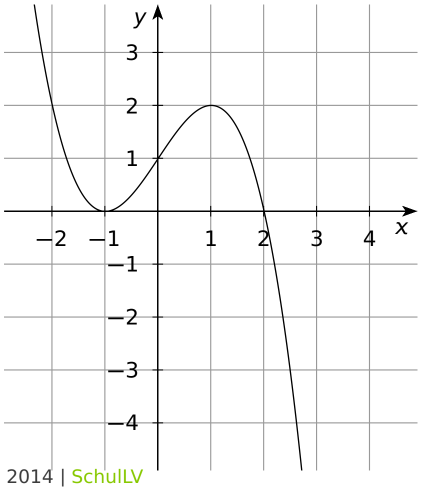
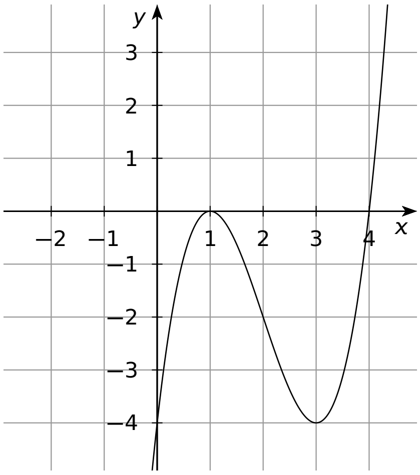


Abb.4



a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion g mit $g(x) = f(x - a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Geben Sie die Werte für a und b an.

c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k.
Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

Aufgabe 6 (3VP)

Gegeben sind die Ebenen $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $F: x_2 + 2x_3 = 8$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Aufgabe 7 (4VP)

Gegeben sind der Punkt $A(1\,|\,1\,|\,3)$ und die Ebene $E: x_1 - x_3 - 4 = 0$.

a) Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem?

b) Der Punkt A wird an der Ebene E gespiegelt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

Aufgabe 8 (3VP)

Gegeben sind die Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

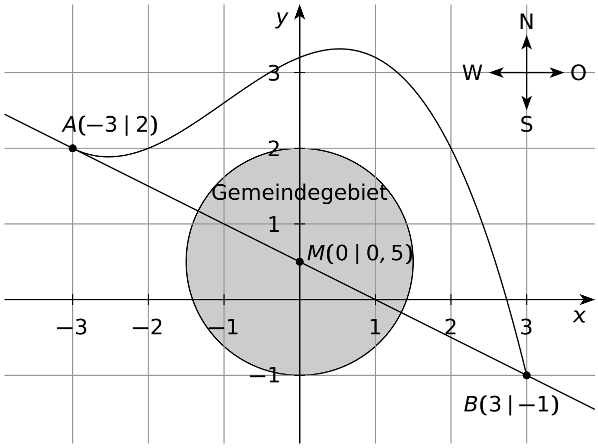
Wahlteil I

Aufgabe I 1

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2.$

1 LE entspricht 1 km.



a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße? (6VP)
Wie weit ist der Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt?
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.
Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.
Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.

b) Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen den Ortsdurchfahrten und der Umgehungsstraße vermessen. (4VP)
Wie viel Prozent dieser Fläche liegen außerhalb des Gemeindegebiets?

c) Im Punkt $P(1,5 \mid 3)$ befindet sich eine Windkraftanlage. (4VP)
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.
Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich.

d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB? (4VP)
Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens vor der Ortsdurchfahrt?

Aufgabe I 2

Gegeben sind die Funktion f und für jedes $t>0$ die Funktion g_t durch

$f(x)=(\sin(x))^2$ bzw. $g_t(x)=t\cdot\sin(x)$; $x\in\mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g_1 für $0\leq x\leq\pi$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. (6VP)
Geben Sie die Periode und die Amplitude der Funktion f an.
An welchen Stellen unterscheiden sich die Funktionswerte von f und g_1 im skizzierten Bereich am stärksten?
Wie groß ist der Unterschied?

b) Für den Wert von t schneiden sich die Graphen von f und g_t im Ursprung unter einem Winkel von 45°? (6VP)

Der Graph der Funktion f schließt im Bereich $0\leq x\leq\pi$ mit der x-Achse eine Fläche ein.
Für den Wert von t hat die Fläche, die der Graph g_t im gleichen Bereich der x-Achse einschließt, den gleichen Inhalt?

c) K ist der Graph von der Funktion g_1. (6VP)
Durch Spiegelung von K an der Geraden $h:\ y=2$ entsteht der Graph $\overline{K}$.
Geben Sie eine zu $\overline{K}$ gehörende Gleichung an.

K rotiert um die Gerade h.
Dadurch entsteht im Bereich $0,5\leq x\leq 5,2$ das Modell eines Pokals, dessen Standfläche den Mittelpunkt $M(0,5\mid 2)$ hat.
Der massive Boden des Pokals reicht von der Standfläche bis zur engsten Stelle.
Untersuchen Sie, ob ein Liter Flüssigkeit in den Pokal passt. (1 LE entspricht 2,5 cm.)

Aufgabe I 3

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei einer Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit (7VP)

$f(t) = 130 \cdot (e^{-0,2\cdot t} - e^{-0,8\cdot t}$; $0 \leq t \leq 24$ (t in Stunden nach der Injektion, $f(t)$ in mg).

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.
Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab?
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden.

Wenn das Medikament stattdessen durch die Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05\cdot t})$; $t \geq 0$ (t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).

b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden? (7VP)
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?
In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg?

c) Geben Sie eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion g erfüllt wird. (4VP)
Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut.
Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute?

Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden?

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Die Ebene E enthält die Punkte $A(6\,|\,1\,|\,0)$, $B(2\,|\,3\,|\,0)$ und $P(3\,|\,0\,|\,2,5)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E. (4VP)
Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1-Achse?

(Teilergebnis: $E:\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABP gleichschenklig ist. (6VP)

Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck mit Diagonalenschnittpunkt P.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D.

Es gibt senkrechte Pyramiden mit Grundfläche $ABCD$ und Höhe 12.
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitzen dieser Pyramiden.

c) Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB? (3VP)

d) Gegeben ist ein senkrechter Kegel mit Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0\,|\,0)$, Grundradius 4 und Spitze $S(0\,|\,0\,|\,12)$. (3VP)
Untersuchen Sie, ob der Punkt $R(2\,|\,2\,|\,3)$ innerhalb des Kegels liegt.

Aufgabe II 2

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Meeresoberfläche (1 LE entspricht 1 m).
Zwei U-Boote U_1 und U_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Die Position von U_1 zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten seit Beginn der Beobachtung}).$$

U_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $A(68 \mid 135 \mid -68)$ und erreicht nach drei Minuten den Punkt $B(-202 \mid -405 \mid -248)$.

a) Wie weit bewegt sich U_1 in einer Minute? (4VP)
Woran erkennen Sie, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche weg bewegt?
Welchen Winkel bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche?

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von U_2 in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$. (4VP)
Begründen Sie, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe?

c) Welchen Abstand haben die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn? (4VP)
Aus Sicherheitsgründen dürfen sich die beiden U-Boote zu keinem Zeitpunkt näher als 100 m kommen.
Wird dieser Sicherheitsabstand eingehalten?

d) Die Routen der beiden U-Boote werden von einem Satelliten ohne Berücksichtigung der Tiefe als Strecken aufgezeichnet. Diese beiden Strecken schneiden sich. (4VP)
Wie groß ist der Höhenunterschied der zwei Routen an dieser Stelle?