Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=(2-3x)\cdot e^{-x}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Aufgabe 2 (2VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x}+4x\right)dx$.

Aufgabe 3 (3VP)

Die Funktion f mit $f(x)=2x^3+3x^2-8x+3$ hat die Nullstelle $x_1=1$.
Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von f.

Aufgabe 4 (4VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}$. Ihr Schaubild ist K.

a) Geben Sie die Asymptoten von K an.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an K im Punkt $P(1\,|\,f(1))$ mit der x-Achse.

Aufgabe 5 (5VP)

Die vier Abbildungen zeigen Schaubilder von Funktionen einschließlich aller waagrechten Asymptoten.

Eines dieser Schaubilder gehört zur Funktion f mit $f(x)=\frac{a}{1+x^2}-1$.

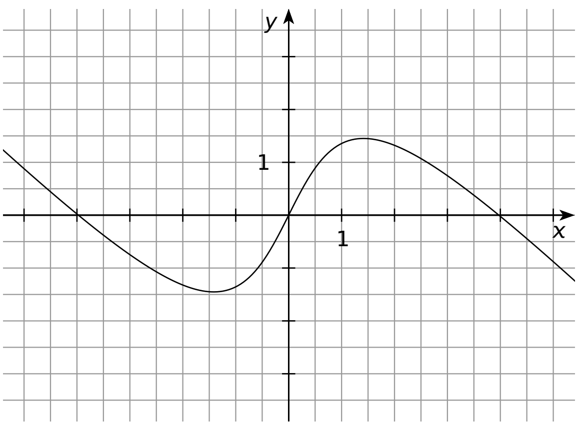


Abb.1

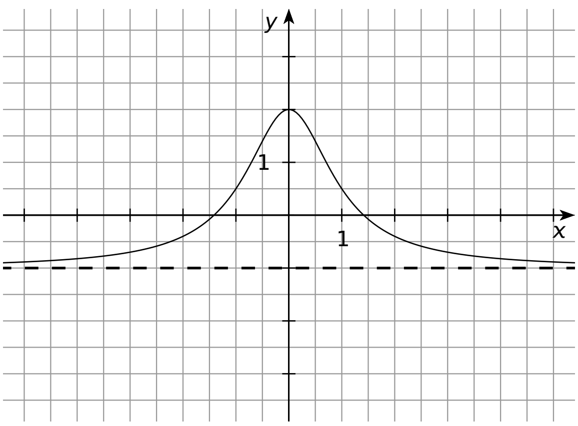


Abb.2

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

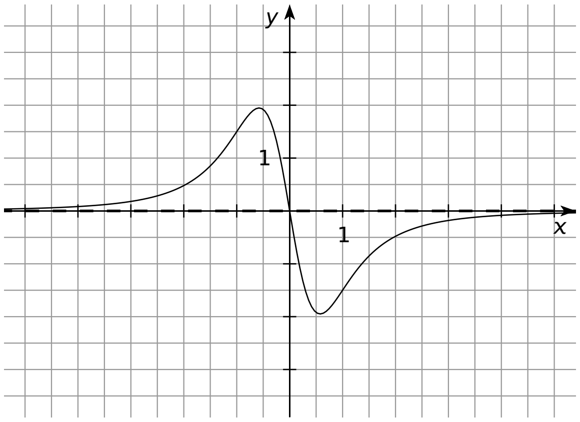


Abb.3

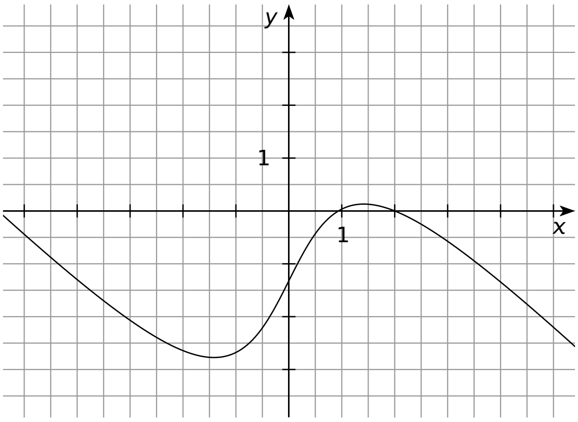


Abb.4

a) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie den Wert für a.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f' und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Aufgabe 6 (3VP)

Gegeben sind die Punkte $A(2\,|\,4\,|\,1)$, $B(0\,|\,2\,|\,-1)$, $C(4\,|\,-2\,|\,1)$ und $D(-1\,|\,9\,|\,0)$.
Überprüfen Sie, ob diese vier Punkte in einer Ebene liegen.

Aufgabe 7 (4VP)

Gegeben sind die Ebene $E: 3x_1 - 4x_3 = -7$ und der Punkt $P(9\,|\,-4\,|\,1)$.

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

b) Der Punkt $S(-1\,|\,1\,|\,1)$ liegt auf E.
Bestimmen Sie den Punkt Q auf der Geraden durch S und P, der genauso weit von E entfernt ist wie P.

Aufgabe 8 (3VP)

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S.
Die Gerade g' ist das Bild von g bei Spiegelung an der Ebene E.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um eine Gleichung der Geraden g' zu ermitteln.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

Auf einem ebenen Gelände befindet sich ein geradliniger, 500 m langer Lärmschutzwall.
Das Profil seines Querschnittes wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{120}{x^2+20} - 2 \quad \text{und} \quad f(x) \geq 0 \qquad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) Wie breit ist der Wall an seinem Fuß? (4VP)
Zeigen Sie, dass der Wall einen symmetrischen Querschnitt besitzt.
Der Wall soll begrünt werden. Um Erosion zu vermeiden, sollte das maximale Gefälle der Böschung nicht größer als 100 % sein.
Ist dies beim gegebenen Querschnittsprofil der Fall?

b) Berechnen Sie das Volumen des Lärmschutzwalls. (6VP)
Es ist geplant, den Wall auf 3 m Höhe abzutragen, um darauf einen Fahrweg anzulegen.
Welche Breite hätte dieser Fahrweg?
Das abzutragende Material soll dazu verwendet werden, den abgeflachten Wall zu verlängern.
Um wie viel Meter würde er länger?

c) Statt der Planung aus Teilaufgabe b) wird am ursprünglichen Wall die Erde so abgetragen, dass der Fahrweg seitlich geneigt ist. Sein rechter Rand liegt 0,4 m höher als sein linker Rand. Die Breite des Fahrwegs beträgt 4 m. (5VP)
Bestimmen Sie den Winkel, um den der Fahrweg gegenüber der Horizontalen geneigt ist, auf zwei Dezimalen genau.
In welcher Höhe befindet sich der linke Rand des Fahrwegs?

Aufgabe I 1.2 (3VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x \quad ; \quad n \geq 1.$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Aufgabe I 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = 1 - \cos(\pi x) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{10}(4-x)\cdot f(x) \qquad ; \; x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g.

a) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an. (5VP)
Beschreiben Sie, wie man K_f aus dem Schaubild der Kosinusfunktion erhalten kann.
Skizzieren Sie K_g für $0 \leq x \leq 4$.

Das Schaubild K_g beschreibt im Bereich $0 \leq x \leq 4$ die Seitenansicht einer Minigolfbahn, die eine Doppelwelle als Hindernis enthält (Längenangaben in Meter). Gespielt wird von links nach rechts.

b) Wie hoch liegt der höchste Punkt der Bahn? (5VP)
An welcher Stelle der Bahn muss der Ball die größte Steigung überwinden?
Die Minigolfbahn ist $1,25\,\text{m}$ breit. Nach einem schweren Regenguss steht das Wasser zwischen den beiden Wellen $5\,\text{cm}$ hoch.
Wie viele Liter Wasser haben sich dort gesammelt?

c) Ein Ball wird so fest geschlagen, dass er bei $x = 0,5$ tangential von der Bahn abhebt und im Punkt $P(7 \mid 0)$ wieder auf dem Boden auftrifft. (4VP)
Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balls auf seiner parabelförmigen Flugbahn.

d) Das Hindernis der Minigolfbahn soll im gleichen Bereich neu gestaltet werden. (4VP)
Das neue Hindernis soll drei jeweils $40\,\text{cm}$ hohe Wellen erhalten.
Am Anfang und Ende soll das Hindernis waagrecht und auf gleichen Höhe wie bisher enden.
Bestimmen Sie einen Term einer Funktion, die den neuen Bahnverlauf beschreibt.
Vergleichen Sie die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Aufgabe I 3

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit $160\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot \mathrm{e}^{-t} - 960 \cdot \mathrm{e}^{-2t} \qquad ; \quad t \geq 0.$$

beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$).

a) Skizzieren Sie das Zeit-Geschwindigkeit-Schaubild des Motorbootes für die ersten fünf Minuten. (6VP)

Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum.
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab?
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?
Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot?

b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren? (6VP)

Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück?
Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot?

c) Zum Zeitpunkt $t_0 = 2,55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein. (6VP)

Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit.
Ab dem Zeitpunkt t_0 wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_0 ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand.
Wann kommt das Segelboot zum Stillstand?

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,4\,|\,0)$, $B(0\,|\,0\,|\,2)$ und $C(4\,|\,0\,|\,0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. (5VP)

Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.
Zeigen Sie, dass die Raute in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.
(Teilergebnis: $D(4\,|\,4\,|\,-2)$)

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ der Punkt $S_t(-3+3t\,|\,-3+3t\,|\,5+t)$.
Die Pyramide P_t hat die Grundfläche $ABCD$ und die Spitze S_t.

b) Zeichnen Sie die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem. (6VP)

Die Punkte B, D und S_3 legen eine Ebene F fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
Zeigen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist.

c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche? (5VP)

Das gleichschenklige Dreieck ACS_3 wird um die Achse AC gedreht.
In welchen Punkten durchstößt dabei seine Spitze die x_1x_2-Ebene?

Aufgabe II 2.1

Gegeben sind der Punkt $A(4{,}5\,|\,6\,|\,3{,}5)$ sowie die Gerade $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_2-Ebene. (7VP)

Zeichnen Sie die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Unter welchem Winkel schneidet g die x_1x_2-Ebene?
Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand?
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung von g an A.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.
(Teilergebnis: $F(3\,|\,4\,|\,1)$)

b) Begründen Sie, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht. (5VP)

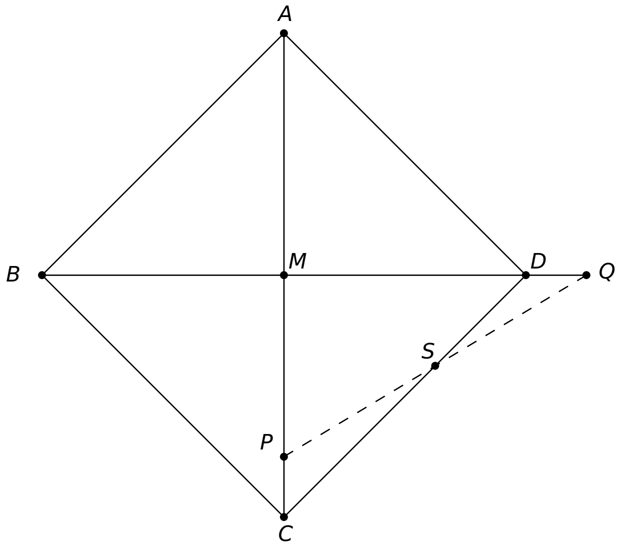
Zeigen Sie, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.
Untersuchen Sie, ob die Punkte $P(18\,|\,-9\,|\,1)$ und $Q(-2\,|\,1\,|\,-9)$ auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Aufgabe II 2.2

(4VP)

Das Quadrat $ABCD$ hat den Mittelpunkt M.
Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}$ gilt.
Die Strecken CD und PQ schneiden sich im Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke CD?



Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.