Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ und vereinfachen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \sin(2x)$ an.

Aufgabe 3 (3VP)

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$.

Aufgabe 4 (3VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2;\ x \neq 0$.

Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1 \mid v)$ die Tangente t.

Ermitteln Sie eine Gleichung von t.

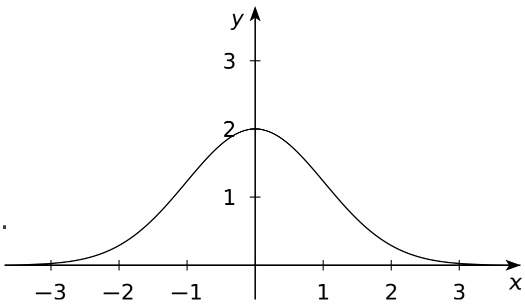
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S.

Bestimmen sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5 (6VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?
Begründen Sie Ihre Antworten.

1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3; 3]$.



Aufgabe 6 (4VP)

Gegeben sind die Geraden g und die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \text{ und } E: 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.$$

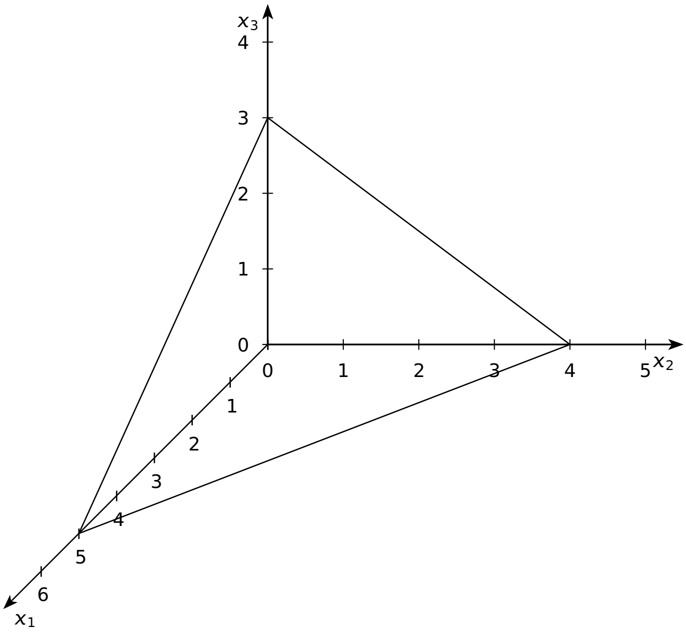
Prüfen Sie nach, ob der Punkt $A(3 \mid 0 \mid 2)$ auf der Geraden g liegt.

Zeigen Sie: die Gerade g ist orthogonal zu Ebene E.

Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 7 (3VP)

Ermitteln sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene.



Aufgabe 8 (3VP)

Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Wahlteil I

Aufgabe I 1

Gegeben ist eine Funktion f durch

$$f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16};\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Zeichnen Sie K. (7VP)

Untersuchen Sie das Verhalten von K für $|x|\to\infty$.

Weisen Sie nach, dass K genau zwei Wendepunkte besitzt.

Nun stellt K für $-6\leq x\leq 6$ den Querschnitt eines 500 m langen Kanals dar (x in Meter, $f(x)$ in Meter).
Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y=0$.
Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal $2{,}25$ m.

b) Wie viel Kubikmeter Wasser sind in dem Kanal, wenn er ganz gefüllt ist? (5VP)

Zu wie viel Prozent ist der Kanal bei einem Pegelstand von $1{,}00$ m gefüllt?

c) An Land steht eine Person. (6VP)

In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe $1{,}50$ m)?

Aufgabe I 2.1

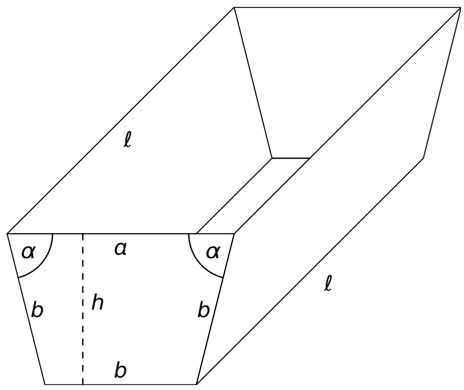
Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. (6VP)
Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v mit

$$v(t)=0{,}4\sin(12t)+1{,}5$$

beschreiben lässt (Zeit t in s, Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s).
Bestimmen Sie die Periodendauer.
Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?
Skizzieren Sie ein Schaubild von v.
Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab?
Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?

Aufgabe I 2.2

Eine Firma stellt aus Holzbrettern der Länge ℓ und der Breite b oben offene Blumentröge mit trapezförmigem Querschnitt her (siehe Abb.).



a) Wählen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für den Neigungswinkel α. (5VP)

Drücken Sie die Höhe h und die obere Breite a des Blumentrogs in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α aus.

Weisen Sie damit nach, dass sich der Flächeninhalt der Querschnittsfläche durch die Funktion A mit $A(\alpha) = b^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$ darstellen lässt.

b) Die Breite b der Bretter beträgt nun $0,5$ m. (7VP)

Für $\ell = b \cdot (1 + 2\cos\alpha)$ ist die Pflanzfläche eines vollständig gefüllten Troges quadratisch.

Für welches α hat ein derartiger Trog maximales Volumen?

Wie groß ist dieses Volumen?

Für welche Werte von α benötigt man zum vollständigen Befüllen eines Troges mit quadratischer Pflanzfläche mindestens vier Säcke Blumenerde von je 80 Liter Inhalt?

Aufgabe I 3.1

Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{3k e^x}{e^{2x} + k}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei C_k.

a) Skizzieren Sie für drei selbst gewählte Werte von k die Schaubilder C_k in ein gemeinsames Koordinatensystem. (5VP)

Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to \pm\infty$.

Stellen Sie gemeinsame Eigenschaften der skizzierten Schaubilder zusammen.

b) Jedes Schaubild C_k hat genau einen Hochpunkt. (6VP)

Berechnen Sie dessen Koordinaten.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte aller C_k.

Ergänzen Sie die Skizze aus Teilaufgabe a) um diese Ortskurve.

c) Der Term $f_4(x)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Zuwachsrate der von einer Bakterienkultur bedeckten Fläche zum Zeitpunkt x (x in min ab Beobachtungsbeginn, $f_4(x)$ in cm^2/min). (3VP)

Um wie viele Quadratzentimeter vergrößert sich die von der Kultur bedeckte Fläche in den ersten 2 Minuten?

Aufgabe I 3.2

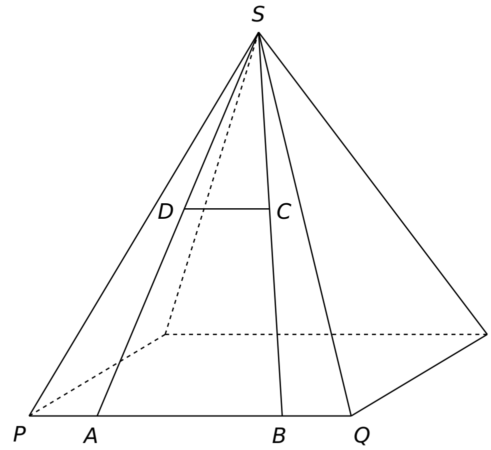
Die Ableitung der Funktion h_1 mit $h_1(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ und die Produktregel werden als bekannt vorausgesetzt. (4VP)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Funktion h_n mit $h_n(x) = \frac{1}{x^n}$; $x \neq 0$ die Ableitung $h'_n(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ hat.

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide.
Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils $2,0$ m.



a) Benachbarte Seitenflächen bilden einen stumpfen Winkel. (6VP)
Wie groß ist dieser?

b) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung $ABCD$ in Form eines symmetrischen Trapezes. C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS. Die Strecke AB hat die Länge $1,0$ m. (5VP)
Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?

c) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild $ABC'D'$ der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich“. (5VP)
Berechnen Sie die Länge der Strecke $C'D'$, wenn sich die Lampe 25 cm unter der Zeltspitze befindet.

Aufgabe II 2.1

Gegeben sind die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$ und $B(0\,|\,10\,|\,0)$ sowie für jedes $a > 0$ eine Ebene $E_a\colon ax_1 - x_3 = 0$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_3. (5VP)
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a.
Bestimmen Sie seine Koordinaten.

Teilergebnis: $D_a\left(\frac{10}{1+a^2}\ |\ dle|\,0\ |\ dle|\ \frac{10a}{1+a^2}\right)$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist. (3VP)

Aufgabe II 2.2

(8VP)

Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB.
T teilt die Strecke CM im Verhältnis 3 : 1. Die Strecke BD verläuft durch T.
In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt?