Pflichtteil

Aufgabe 1 (2P)

▶ Erste Ableitung von f bilden

Du sollst die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ bilden.

Bei der Funktion handelt es sich um ein **Produkt von zwei Funktionen**. Leite sie also nach der **Produktregel** ab.

Bei der Teilfunktion e^{-2x} handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite diesen Teil also nach der **Kettenregel** ab.

Aufgabe 2 (2P)

▶ Stammfunktion von f mit $F(\pi) = 7$ bestimmen

Dir ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$ gegeben. Du sollst die Stammfunktion von f finden, für die $F(\pi) = 7$ gilt.

Du sollst also integrieren. Es handelt sich um eine **verkettete Funktion**, wende also die **lineare Substitution** an um eine Stammfunktion zu bilden. Setze anschließend $F(\pi) = 7$ in $F(X)$ ein und berechne somit c.

Aufgabe 3 (2P)

▶ Gleichung lösen

Dir ist die Gleichung gegeben mit $2\mathrm{e}^x - \frac{4}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Die Gleichung zu lösen bedeutet, sie nach x umzustellen. Sorge also dafür, dass x allein auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht.

Aufgabe 4 (4P)

▶ Flächeninhalt berechnen

Dir sind die beiden Funktionen f und g gegeben mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$. Du sollst den Flächeninhalt berechnen, der von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Das Wort **Flächeninhalt** zeigt immer, dass es um die Berechnung eines **Integrals** geht.

Hier geht es um das Integral zwischen den Graphen zweier Funktionen. Das heißt du musst die eine Funktion von der anderen abziehen. Gehe also wie folgt vor:

- Berechne die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen um die Grenzen des Integrals zu erhalten
- Überlege dir, welcher der beiden Graphen oben und welcher unten verläuft
- Ziehe die untere Funktion von der oberen ab
- Formuliere das Integral und berechne es mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

Aufgabe 5 (5P)

▶ Bedeutung der Eigenschaften für den Graphen begründen

Du hast vier Eigenschaften einer Funktion gegeben und sollst erklären, welche Bedeutung diese Eigenschaften für den Graphen haben, wenn du ihn zeichnen würdest. ß **(1)** $\boldsymbol{f(2) = 1}$

Setzt du $x = 2$ in $f(x)$ ein soll sich der Funktionswert 1 ergeben. An der Stelle $x = 2$ hat die Funktion also den y-Wert $y = 1$.

(2) $\boldsymbol{f'(2) = 0}$

f' bezeichnet die erste Ableitung der Funktion f und die erste Ableitung beschreibt die Steigung der ursprünglichen Funktion.

Die erste Ableitung der Funktion hat an der Stelle $x = 2$ den Wert 0, also eine Nullstelle.

Daraus folgt, dass der Graph der ursprünglichen Funktion an der Stelle $x = 2$ die Steigung 0 hat. Dies ist die notwendige Bedingung für Extremstellen. Dir ist hier noch nichts über die hinreichende Bedingung gegeben, also weißt du noch nicht sicher ob es auch tatsächlich eine Extremstelle ist. Es handelt sich lediglich um eine **mögliche Extremstelle** von $f(x)$.

Außerdem hat die Steigung von 0 noch eine andere Bedeutung: Die Tangente, die den Graph an dieser Stelle berührt, hat die Steigung 0.

Tangenten sind Geraden, die den Graph in einem bestimmten Punkt nur berühren, aber nicht schneiden. Die Steigung einer Tangente in einem Punkt ist immer auch die Steigung (also der y-Wert der ersten Ableitung) der ursprünglichen Funktion im Berührpunkt.

(3) $\boldsymbol{f''(4) = 0}$ **und** $\boldsymbol{f'''(4) \neq 0}$

f'' bezeichnet die zweite Ableitung von f. Sie hat an der Stelle $x = 4$ den Wert 0. Dass die zweite Ableitung einer Funktion den Wert 0 hat, ist die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt im Graphen der ursprünglichen Funktion f.

Außerdem ist dir gegeben, dass $f'''(4) \neq 0$.

f''' bezeichnet die dritte Ableitung der Funktion f. Du weißt also, dass die dritte Ableitung an der Stelle $x = 4$ nicht den Wert 0 hat.

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt im Graphen der ursprünglichen Funktion ist, dass der Wert der dritten Ableitung an der Wendestelle nicht den Wert 0 hat.

(4) **Für $\boldsymbol{x \to +\infty}$ und $\boldsymbol{x \to -\infty}$ gilt: $\boldsymbol{f(x) \to 5}$**

Lässt man den x-Wert unendlich viel größer oder kleiner werden, setzt also für x sehr große positive oder negative Zahlen ein, nähert sich der entsprechende y-Wert immer mehr der 5 an, wird aber nicht größer als 5. Der Graph nähert sich also immer weiter dem Wert 5 an, überschreitet aber diese ”Grenze”nicht. $y = 5$ ist damit eine Art „Grenze“nach oben für den Graphen, an die er sich immer weiter annähert.

▶ Einen möglichen Verlauf des Graphen skizzieren

- Um einen möglichen Verlauf des Graphen von f zu skizzieren, trage zuerst die Punkte in ein Koordinatensystem ein, die du kennst, also $P(2 \mid 1)$.
- Trage zur Hilfe die waagerechte Tangente an $P(2 \mid 1)$ ein. Das bedeutet auch, dass der Graph dort einen **möglichen Extrempunkt** besitzt.
- Zeichne die **waagerechte Asymptote** $y = 5$ ein.
- Zeichne nun einen Graph, der durch P verläuft und sich rechts und links von der y-Achse der Asymptote annähert. Beachte dabei, dass der Graph bei $x = 4$ eine **Wendestelle** haben soll.

Aufgabe 1 (4P)

▶ Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene bestimmen

Du sollst den Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene E berechnen. Allerdings hast du von der Gerade g und der Ebene E keine Gleichungen gegeben. Du hast dafür aber zwei Punkte gegeben, die auf der Geraden g liegen, genauso wie einen Punkt, der in der Ebene E liegt. Du weißt auch, dass die Gerade die Ebene orthogonal, also senkrecht schneidet.

Du kannst so vorgehen:

- Geradengleichung von g bestimmen
- Ebenengleichung von E bestimmen
- Schnittpunkt durch einsetzen von g in E berechnen

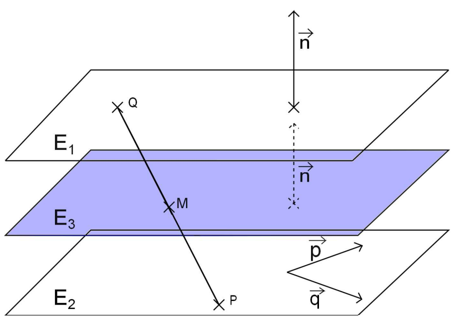
Aufgabe 2 (4P)

▶ Parallelität zeigen

Du hast die beiden Ebenen E_1 und E_2 gegeben mit:

$E_1 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und

$$E_2 : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Die beiden Ebenengleichungen liegen dir in zwei unterschiedlichen Formen vor: E_1 hast du in Koordinatenform gegeben, E_2 in Parameterform.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren, parallel sind, also in dieselbe Richtung zeigen.

In diesem Fall hast du aber nur bei einer der beiden Ebenen einen Normalenvektor gegeben, bei der anderen Ebene hast du zwei Spannvektoren vorgegeben, die innerhalb der Ebene, also parallel zu ihr liegen.

Zwei solche Ebenen sind parallel, wenn der Normalenvektor der ersten Ebene auch senkrecht zur zweiten Ebene steht. Das bedeutet, der Normalenvektor von E_1 muss ebenfalls senkrecht zu beiden Spannvektoren von E_2 stehen. Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

Das bedeutet, du hast hier zwei Möglichkeiten:

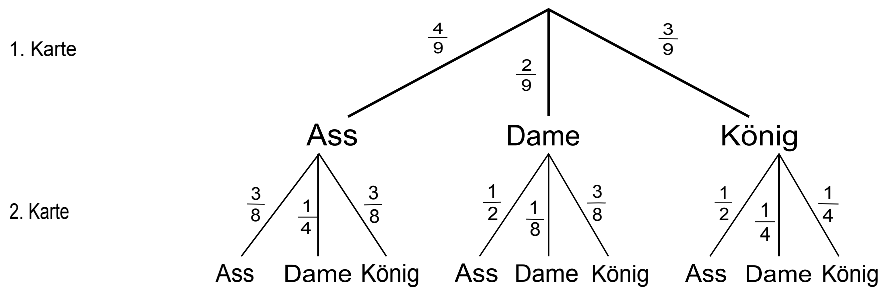
Lösungsweg A Du kannst zeigen, dass der Normalenvektor von E_1 senkrecht zu den Spannvektoren von E_2 verläuft.

Lösungsweg B Du kannst den Normalenvektor der zweiten Ebene berechnen und zeigen, dass er parallel zum Normalenvektor der ersten Ebene liegt.

Aufgabe 6 (4P)

a) ► **Wahrscheinlichkeiten berechnen** Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen.

Da Peter jede Karte nicht sofort wieder zurücklegt und alle Karten neu durchmischt, entspricht dies dem **Ziehen ohne Zurücklegen**. Wird also eine Karte aufgedeckt, fällt diese weg und kann nicht erneut aufgedeckt werden. Sind es anfangs also neun Karten und Peter deckt die erste Karte auf, sind für die zweite Karte nur noch acht Karten übrig die aufgedeckt werden können. Ist die erste Karte beispielsweise eine Dame bleibt dann nur noch eine Dame übrig, die bei der zweiten Karte aufgedeckt werden kann. Somit verändern sich die Wahrscheinlichkeiten nach dem Aufdecken der ersten Karte. Du hast die Anfangswahrscheinlichkeiten gegeben:
Ein Ass aufzudecken: $\frac{4}{9}$, Einen König aufzudecken: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, Eine Dame aufzudecken: $\frac{2}{9}$.



▶ **A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch** 0.2cm Die Wahrscheinlichkeit ein Ass aufzudecken beträgt $\frac{4}{9}$ und kein Ass aufzudecken $\frac{5}{9}$.
Die Wahrscheinlichkeit dass die erste Karte kein Ass ist liegt also bei $\frac{5}{9}$. Für die zweite Karte bleiben jetzt nur noch 8 Karten übrig, die Wahrscheinlichkeit hier kein Ass zu erwischen ändert sich, da jetzt eine Karte weniger da ist, die kein Ass ist. Dann bleiben für die zweite Karte noch die Wahrscheinlichkeiten:
Ein Ass aufzudecken: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ und Kein Ass aufzudecken: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

▶ **B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch** Hier gehst du nun ähnlich vor

wie eben: Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte eine Dame und die zweite Karte ein Ass ist, und addiere dazu die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte ein Ass und die zweite Karte eine Dame ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Dame ist liegt bei $\frac{2}{9}$, nun ist eine Dame weniger im Spiel und damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ein Ass ist $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist beträgt $\frac{4}{9}$, damit bleiben für die zweite Karte wieder nur 8 Karten mit einem Ass weniger übrig und die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte eine Dame ist beträgt $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b) ▶ **Mögliche Werte für X bestimmen**

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Spielkarten an, die aufgedeckt auf dem Tisch liegen, wenn zum ersten Mal ein Ass aufgedeckt wurde.
Da sich unter den neun Karten vier Asse befinden, muss spätestens die sechste aufgedeckte Karte ein Ass sein.

▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen**

$P(X \leq 2)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die zweite aufgedeckte Karte ein Ass ist und setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ und $P(X = 2)$ zusammen.
$P(X = 1) = \frac{4}{9}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dafür dass die erste Karte in Ass ist, die du bereits in Aufgabenteil a) öfter verwendet hast.
$P(X = 2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste aufgedeckte Karte kein Ass, und die zweite Karte ein Ass ist.

Aufgabe 1 (3P)

▶ **Antwort begründen**

Du sollst beantworten, ob es eine ganzrationale Funktion vierten Grades geben kann, deren Graph drei Wendepunkte besitzt.

Überlege dir zuerst was es bedeutet, wenn der Graph einer Funktion f einen Wendepunkt hat, und wie die Funktion grundsätzlich aussehen muss.

Für den Wendepunkt gibt es die notwendige und die hinreichende Bedingung.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt besagt, dass der Wert der zweiten Ableitung von f 0 sein muss, also $f''(x) = 0$ gelten muss. Das bedeutet, damit der Graph einer Funktion drei Wendepunkte hat, muss die zweite Ableitung an drei verschiedenen Stellen den Wert 0 haben, die zweite Ableitung muss folglich drei Nullstellen haben. Überprüfe, ob dies der Fall sein kann.

Überlege dir, wie eine ganzrationale Funktion vierten Grades aussehen muss. Dass sie den Grad 4 hat bedeutet, dass der höchste Exponent, den ein x haben kann, 4 ist. Damit sieht eine ganzrationale Funktion vierten Grades so aus: $f: a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

Schaue dir nun an, welche Gestalt die zweite Ableitung hat, da für einen Wendepunkt die zweite Ableitung von Bedeutung ist. Bilde die ersten beiden Ableitungen von f:

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot a \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot b \cdot x + c$

$f''(x)$ hat den Grad 2. Eine Funktion hat immer höchstens so viele Nullstellen, wie ihr Grad. Demnach hat die zweite Ableitung von f höchstens zwei Nullstellen. Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind gerade die möglichen Wendestellen von f.

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8;\quad -4 \leq x \leq 4$ (x und $f(x)$ in Meter).

a) ▶ **Stellen mit der steilsten Steigung finden** (6P)

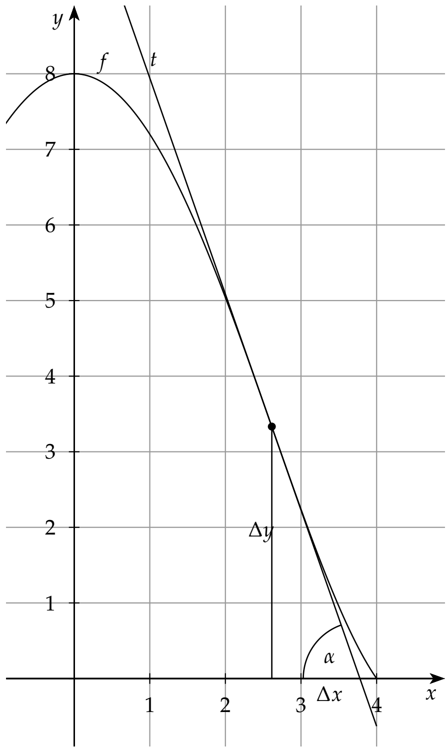
Du sollst zuerst die Stellen berechnen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

Die Wände verlaufen dort am steilsten, wo sie die größte positive bzw. die betragsmäßige größte negative Steigung haben. Da der Graph der Funktion f die Wände des Bergstollens darstellt, suchst du also die Stellen des Graphen, an denen er die steilste Steigung hat. Das sind die Stellen mit der größten bzw. kleinsten Steigung.

Die Steigung eines Graphen einer Funktion wird durch den Graphen der ersten Ableitung beschrieben. Du suchst demnach also die Maxima und Minima der ersten Ableitung f' von f.

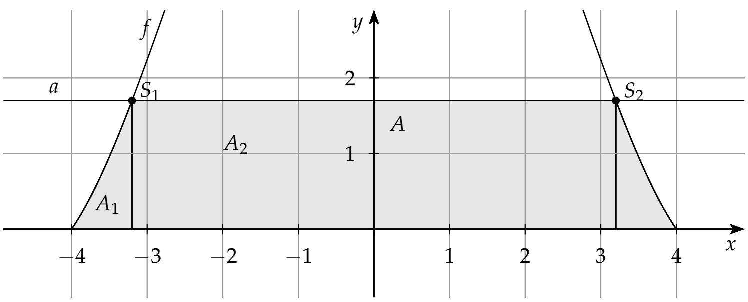
▶ **Winkel berechnen**

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Wände an den steilsten Stellen mit der Horizontalen einschließen.
α ist der Steigungswinkel der Tangente t an dem Punkt des Graphen; das ist der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Diesen Winkel kannst du in der Skizze sehen.
Die Tangente an einem Punkt ist die Gerade, die den Graphen nur in diesem einen Punkt berührt aber nicht schneidet. Sie hat dieselbe Steigung wie der Graph in dem berührten Punkt. Demnach ist der Funktionswert der ersten Ableitung des Berührpunktes die Steigung der Tangente. Der Steigungswert m im Berührpunkt ergibt sich durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. In der Skizze rechts kannst du sehen, dass Δy die Gegenkathete von α und Δx die Ankathete von α ist. Demnach sit der Steigungswert $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)$.



▶ **Volumen des Wassers berechnen**

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich in dem Stollen befindet, wenn das Wasser 1,7 Meter hoch steht In der Skizze sind die wesentlichen Teile des Graphen von f, sowie die Wasseroberfläche dargestellt.



Die Oberfläche des Wassers wird dabei durch die Gerade a mit der Gleichung $a(x) = 1{,}7$ beschrieben. Bis zu dieser Gerade steht das Wasser in dem Stollen. Der Querschnitt des Wassers wird demnach durch die gesamte graue Fläche A in der Skizze dargestellt. Das Volumen eines solchen Körpers kannst du über die Formel $V = G \cdot h$ berechnen. G steht für die Grundfläche und h für die Höhe. In diesem Fall ist die Grundfläche die Fläche, die in der Skizze grau hinterlegt ist. Die Höhe ist die Länge des Bergstollens. Deshalb kannst du das Volumen des Wassers berechnen, indem du den Flächeninhalt des Querschnitts des Wassers mit der Länge des Stollens multiplizierst.

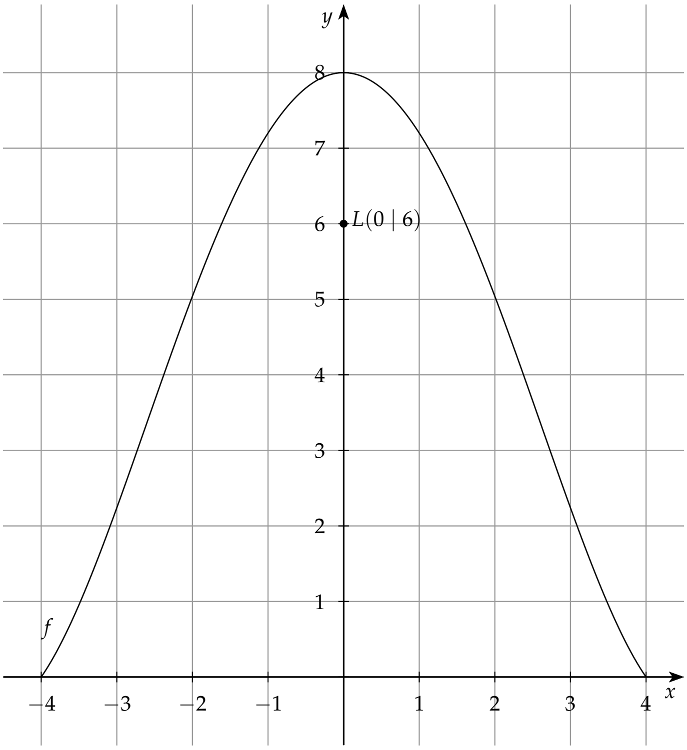
Du musst also zuerst den Inhalt der Fläche A berechnen, um diesen später mit der Länge des Stollens multiplizieren zu können. Dazu benötigst du die Schnittpunkte des Graphen mit der Gerade a.

Gehe also folgendermaßen vor:

- Schnittpunkte des Graphen von f mit der Gerade a berechnen
- Flächeninhalt berechnen
- Volumen berechnen

b) ► **Den kleinsten Abstand berechnen** (3P)

Eine Lampe soll in 6 Metern Höhe aufgehängt werden, muss dabei aber einen Sicherheitsabstand von 1,4 Metern zu den Wänden einhalten. Du sollst überprüfen, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. Weil der Stollen symmetrisch ist, ist es am sinnvollsten, die Lampe in der Mitte aufzuhängen, denn dann hat die Lampe links und rechts den gleichen Abstand zur Wand. Damit ergibt sich der Punkt $L(0 \mid 6)$, an dem sich die Lampe befindet.



Um zu überprüfen, ob der Sicherheitsabstand eingehalten werden kann, berechne den geringsten Abstand, den die Lampe zu einem Punkt der Wand hat.

Um den kleinsten Abstand der Lampe zu der Wand des Stollens zu bestimmen, stelle zuerst eine Funktion auf, die den Abstand von L zu irgendeinem Punkt $(x \mid f(x))$ des Graphen beschreibt.

Den Abstand d zwischen zwei Punkten $A(a_1 \mid a_2)$ und $B(b_1 \mid b_2)$ berechnet man mit der Formel:
$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

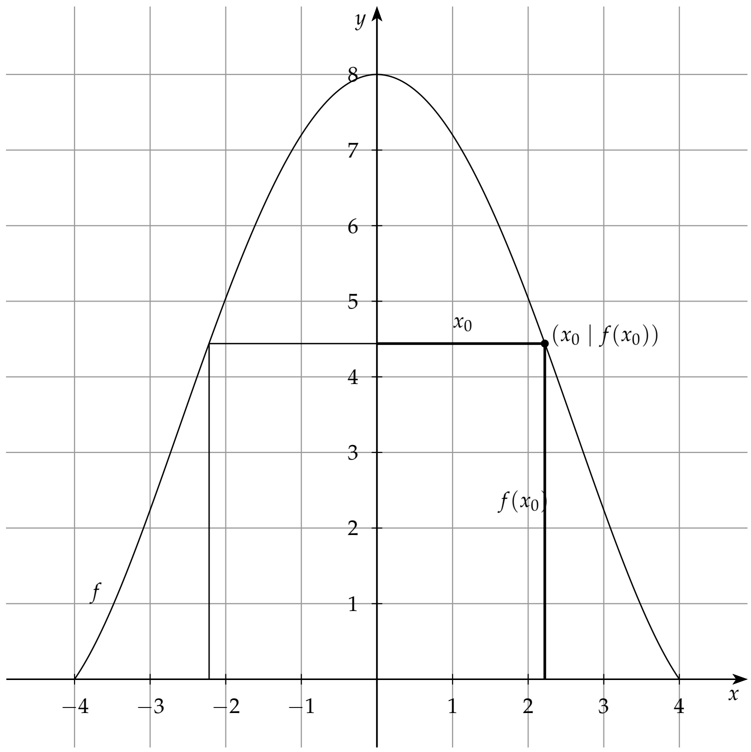
Anschließend musst du das Minimum dieser Funktion bestimmen. Der Funktionswert dieser Funktion d entspricht dem Abstand zur Lampe. Vergleiche zum Schluss also den Funktionswert des Minimums mit dem vorgegebenen Sicherheitsabstand, um herauszufinden ob er eingehalten werden kann.

Das Minimum kannst du wie folgt bestimmen:

- Die ersten beiden Ableitungen $d'(x)$ und $d''(x)$ bestimmen
- Notwendiges Kriterium anwenden: Die möglichen Extremstellen erhältst du, indem du $d'(x) = 0$ setzt und die Gleichung löst.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die möglichen Extremstellen in d'' ein. Ist das Ergebnis positiv hast du ein Minimum gegeben.
- y-Koordinaten berechnen: Setze die tatsächliche Minimalstelle in d ein und berechne so den tatsächlichen minimalen Abstand.

c) ▶ **Maximale Breite des Würfels berechnen** (3P)

Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Du sollst nun berechnen, wie breit der Behälter höchstens sein darf. Der Querschnitt eines Würfels ist ein Quadrat. Den Querschnitt des Behälters kannst du in der Skizze sehen. In einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang. In der Skizze kannst du sehen, dass die waagerechten Seiten des Würfels $x + x = 2x$ lang sind. Demnach müssen auch die senkrechten Seiten des Würfels $2x$ lang sein. Damit weißt du, dass für den rechten oberen Eckpunkt der vorderen Seitenfläche des Würfels, der an die Stollenwand stößt, gelten muss: $f(x_0) = 2 \cdot x_0$.
Löse die Gleichung nach x_0 auf und erhalte so die x-Koordinaten des oberen rechten Eckpunkts des Würfels. Der Betrag der x-Koordinate ist dann die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.



Aufgabe A 1.2 (3P)

▶ **Wert von t berechnen für den f_t mehr als nur eine Nullstelle hat**

Du hast für jedes $t \neq 0$ die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x) = (x-1) \cdot (1 - \frac{1}{t} \cdot \mathrm{e}^x)$.

Du sollst den Wert von t berechnen, für den f_t mehr als eine Nullstelle hat.
Berechne dazu die Nullstellen in Abhängigkeit von t. Falls du dort mehr als ein Ergebnis erhältst, berechne dann die Werte von t für die gegebenenfalls Nullstellen wegfallen, um auszuschließen für welche Werte von t f_t nur eine Nullstelle besitzt.

Wahlteil Aufgabe A 2

Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit
$r(t) = 10.000 \cdot (\mathrm{e}^{-0{,}5 \cdot t} - \mathrm{e}^{-t}); \quad 0 \leq t \leq 12$
beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) ► **Maximale momentane Zuflussrate bestimmen** (4P)

Du sollst die maximale momentane Zuflussrate in der Regentonne bestimmen. Das Wort „maximal"zeigt dir, dass du hier ein **Maximum** bestimmen sollst. Es geht um das Maximum der momentanen Zuflussrate. Die momentane Zuflussrate wird durch die Funktion r beschrieben. Das bedeutet, du sollst das Maximum der Funktion r berechnen.

Dazu gibt es zwei Bedingungen:

- Die **notwendige Bedingung** für ein Maximum besagt, dass die erste Ableitung der Funktion r an der Maximalstelle t_M den Wert 0 haben muss. Demnach muss $r'(t_M) = 0$ gelten. Setze also $r'(t) = 0$ und erhalte so die möglichen Extremstellen.
- Die **hinreichende Bedingung** für ein Maximum besagt, dass die zweite Ableitung der Funktion r an der Maximalstelle einen Wert kleiner 0 haben muss, damit dort ein Maximum vorliegt. Die zweite Ableitung von r, das heißt r'' muss beim Maximum einen negativen Funktionswert haben. Setze dazu die möglichen Extremstellen in $r''(t)$ ein und erhalte die tatsächlichen Maxima.

► **Zeitraum bestimmen, in dem die momentane Zuflussrate größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist**

Du sollst den Zeitraum angeben, in dem die momentane Zuflussrate größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist. Die momentane Zuflussrate wird durch die Funktion r beschrieben.

Dazu musst du die Stellen berechnen, an denen die momentane Zuflussrate 2.000 ℓ pro Stunde beträgt, und dann überprüfen, ob die momentane Zuflussrate zwischen diesen Stellen größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist. Das bedeutet, du musst die Stellen von r berechnen, an denen der Funktionswert 2.000 beträgt und anschließend überprüfen, ob r im Intervall zwischen diesen Stellen oberhalb oder unterhalb von 2.000 verläuft.

► **Zeitpunkt berechnen, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt**

Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt. Der Graph von r beschreibt die momentane Zuflussrate. Die erste Ableitung von r beschreibt die Steigung von r. Die Steigung kannst du auch als momentane Änderungsrate auffassen. r' beschreibt also die Änderung der Zuflussrate.

In der Aufgabe ist nach dem Zeitpunkt gefragt, zu dem die Zuflussrate **am stärksten abnimmt**. Du suchst also ein Minimum der ersten Ableitung r' von r.

Bilde dazu zu erst die erste Ableitung r' der Funktion r und bestimme anschließend ihr Minimum.

b) **► Volumen des Wassers berechnen**

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich drei Stunden nach Regenbeginn im Wassertank befindet.

Die Funktion r beschreibt, wie viel Wasser zu jedem Zeitpunkt zuläuft. Die Menge des Wassers ist die Summe von allen Zeitpunkten des zugelaufenen Wassers. Du müsstest also alle y-Werte bis zum gesuchten Zeitpunkt zusammenrechnen. Diese Summe der y-Werte ist zugleich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der t-Achse bis zum gegebenen t-Wert.

Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von r und der t-Achse berechnest du hier über ein Integral.

Gesucht ist hier das Integral über r in den Grenzen $t = 0$ und $t = 3$, da du das gesamte Wasser berechnen möchtest, das sich seit dem Beginn des Regens bis drei Stunden danach im Tank gesammelt hat.

► Zeitpunkt berechnen, zu dem sich 5.000 ℓ Wasser im Tank befinden

Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem sich 5.000 ℓ Wasser im Tank befinden.

Aus dem vorigen Aufgabenteil, weißt du, dass du den Inhalt des Tanks mit Hilfe des Integrals über r in den Grenzen $t = 0$ bis $t = b$ berechnen kannst, wobei b der Zeitpunkt ist, von dem du wissen möchtest, wie viel Wasser sich gerade in dem Tank befindet.

Dieses Mal suchst du nicht den Wert des Integrals sondern die obere Grenze und hast den Wert bereits vorgegeben, nämlich 5.000. Statt des $t = 3$ von eben wählst du b als obere Grenze des Integrals und setzt das Integral gleich 5.000, Damit ergibt sich eine Gleichung, die du dann lösen kannst.

c) **► Volumen des Wassers berechnen**

Du sollst berechnen, wie viel Wasser in den ersten zwölf Stunden nach Regenbeginn entnommen wird. In den ersten drei Stunden wird laut Aufgabenstellung noch kein Wasser entnommen. Du musst also nur berechnen, wie viel Wasser in den neun Stunden nach Beginn der Entnahme entnommen wird.

Die neue Funktion w besteht aus der alten Funktion r von der 400 abgezogen wird. Es gilt also $w(t) = r(t) - 400$. Das bedeutet, dass die momentane Zuflussrate, die durch den Regen zustande kommt, um 400 ℓ pro Stunde reduziert wird. Es werden also jede Stunde 400 ℓ aus dem Tank entnommen.

► Zeitpunkt berechnen, ab dem die Wassermenge im Tank abnimmt

Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem die Wassermenge im Tank beginnt abzunehmen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zuflussrate negativ wird. Die Zuflussrate wird für $t \geq 3$ durch die Funktion w beschrieben. Die Wassermenge im Tank nimmt also ab, wenn die Funktion w negative Funktionswerte hat. Also suchst du den Wert von t, für den der Graph von w vom Positiven ins Negative wechselt. Dies ist bei einer Nullstelle von w der Fall. Das bedeutet, du suchst die erste Nullstelle der Funktion w.

► Maximale Wassermenge im Tank bestimmen

Du sollst die maximale Menge Wasser berechnen, die sich im Tank befindet.

Du weißt bereits, dass du die Wassermenge im Tank über ein Integral berechnest. Für das Integral brauchst du Grenzen, nämlich den Beginn des Regens bei $t = 0$ und den Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet. Du benötigst also zuerst den Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet, um dann die Wassermenge berechnen zu können.

Der Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet, ist der Zeitpunkt, bevor die Menge des Wassers im Tank beginnt abzunehmen, weil bis zu diesem Zeitpunkt immer mehr Wasser in den Tank geflossen ist, als wieder entnommen wurde.

Aufgabe A 2.2

▶ Flächeninhalt berechnen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$.

Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.

Du sollst den Flächeninhalt A exakt berechnen, den Wert also nicht runden.

Den Flächeninhalt, den ein Graph mit der x-Achse einschließt, wird immer mit einem Integral berechnet. Dazu brauchst du die Grenzen des Integrals. Das sind die Nullstellen der Funktion f im angegebenen Intervall. Berechne also zuerst die Nullstellen, und stelle anschließend das Integral auf und berechne es.

▶ Funktionsgleichung aufstellen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.

Du sollst nun eine Funktionsgleichung von g ermitteln.

Du besitzt folgende Informationen über g:

- Du weißt, dass g den Grad 2 haben soll, der höchste Exponent im Funktionsterm ist also 2. Eine ganzrationale Form zweiten Grades hat im Allgemeinen den Funktionsterm $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- g besitzt die beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$. Das bedeutet, dass $g(0) = 0$ und $g(1) = 0$ gilt.
- Der Inhalt A_2 der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, ist halb so groß wie A.

Setzt du diese Informationen nach und nach in die allgemeine Funktionsgleichung ein, erhältst du drei Gleichungen, mit deren Hilfe du dann a, b und c berechnen kannst.

Wahlteil Aufgabe B 1

a) ► **Würfel in einem Koordinatensystem darstellen** (5P)

Du sollst den Würfel mit den gegebenen Eckpunkten, gemeinsam mit der Ebene E in einem Koordinatensystem darstellen. Beginne zuerst mit dem Würfel und zeichne anschließend die Ebene ein.

Um den Würfel in einem Koordinatensystem darzustellen, kannst du so vorgehen:

- Zeichne das Koordinatensystem
- Trage die gegebenen Eckpunkte in das Koordinatensystem ein
- Ergänze die fehlenden Eckpunkte und die Kanten des Würfels

► **Ebene im Koordinatensystem darstellen**

Es fällt auf, dass die Ebenengleichung von E kein x_1 enthält. Die Ebenengleichung lautet anders ausgedrückt: $E\ :\ 0\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3\ =\ 8$. Für x_1 können also beliebige Zahlen eingesetzt werden. Das bedeutet, die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse.

Nach dem du diese Parallelität kennst, benötigst du noch **zwei** Punkte, die in der Ebene liegen. Hierzu bieten sich die beiden **Spurpunkte** dieser Ebene an, d.h. die Punkte, in denen die x_2-Achse bzw. die x_3-Achse die Ebene durchstoßen.

Trage anschließend diese Punkte in das Koordinatensystem ein.

► **Winkel berechnen**

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. Du sollst also den **Schnittwinkel** bestimmen. Dies kannst du mit Hilfe der Formel für den Schnittwinkel zweier Ebenen tun.

Die Formel lautet: $\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$

$\overrightarrow{n_1}$ ist dabei der Normalenvektor der einen Ebene, in diesem Fall der Ebene E und $\overrightarrow{n_2}$ ist der Normalenvektor der zweiten Ebene, in diesem Fall der x_1x_2-Ebene. Der Normalenvektor einer Ebene steht immer senkrecht zur jeweiligen Ebene. In der Koordinatengleichung einer Ebene kannst du diesen Vektor einfach ablesen.

► **Abstand von E zur x_1-Achse bestimmen**

Du sollst den Abstand d zwischen der Ebene E und der x_1-Achse berechnen. Die x_1-Achse kannst du als Gerade auffassen. Das heißt, du sollst hier den Abstand zwischen einer Ebene und einer Gerade berechnen.

Von oben weißt du: Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse. Dies siehst du daran, dass in der Ebenengleichung von E die Koordinate x_1 nicht auftritt. Also hat jeder Punkt auf der x_1-Achse den **gleichen Abstand** von der Ebene E. Damit kannst du den Abstand von der Ebene E und der x_1-Achse berechnen, indem du einen **beliebigen** Punkte auf der x_1-Achse auswählst und dessen Abstand von der Ebene E berechnest.

Für den Abstand $d(P\,;\,E)$ eines Punkts P von einer Ebene E gilt allgemein nach der Hesseschen Normalenform:

$$d(P\,;\,E)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

$E_a : 3x_2 + x_3 = a \qquad a \in \mathbb{R}.$

► Lage der Ebenen zueinander untersuchen (6P)

Du sollst untersuchen, welche Lage die Ebenen der Ebenenschar E_a zueinander haben.

Du kannst sehen, dass die Ebenen sich nur um das d unterscheiden, ihre Normalenvektoren aber alle gleich sind, denn a steht nur rechts vom Gleichheitszeichen.

► Werte von a berechnen, für die $S(6 \mid 6 \mid 6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat

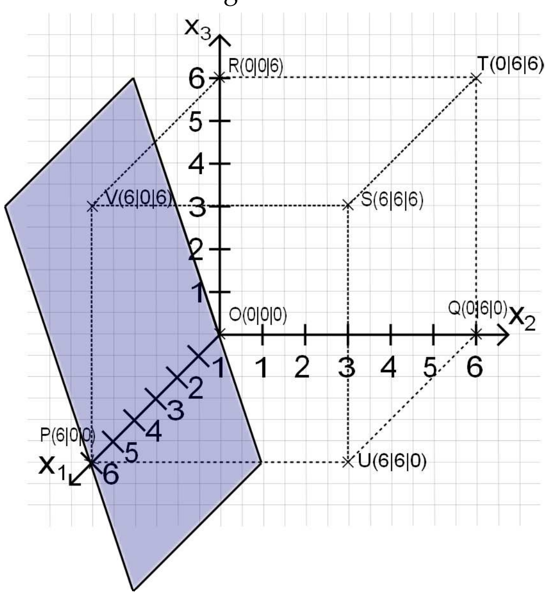
Du sollst die Werte von a berechnen, für die $S(6 \mid 6 \mid 6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat. Das bedeutet, es soll gelten: $d = \sqrt{10}$. Den Abstand eines Punkts von einer Ebene hast du bereits oben mit Hilfe der Hesseschen Normalenform berechnet. Diese Form kannst du auch hier wieder anwenden:

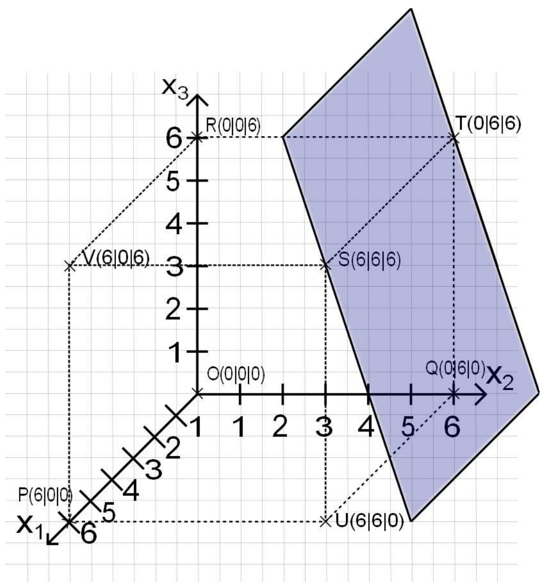
$$d(P\,;\,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Berechnet werden soll der Abstand des Punktes S mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ von der Ebene E. b ist in diesem Fall der Parameter a. Da der Abstand $\sqrt{10}$ betragen soll, ist $d(S\,;\,E) = \sqrt{10}$. Setzt du dies alles in die Abstandsformel ein.

► Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat

Du sollst die Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat. Du weißt aus den vorigen Aufgabenteilen, dass die Ebenen E_a parallel zur x_1-Achse sind. Der Würfel steht ebenfalls parallel zur x_1-Achse. Du kannst zunächst die Werte von a berechnen, für die E_a **keine** gemeinsamen Punkte mit dem Würfel hat. Dazu kannst du die Grenzfälle betrachten. Liegt die Ebene E_a so wie in dem ersten Bild unten, hat sie nur die Punkte auf der Strecke zwischen P und Q gemeinsam mit dem Würfel. Diese Punkte liegen auch nur in diesem Fall in der Ebene E_a. Genauso funktioniert das auch, wenn man die Ebene nach oben verschiebt. Dann ist der Grenzfall, der Fall, bei dem Die Ebene nur die Punkte auf Strecke zwischen S und T mit dem Würfel gemeinsam hat. Dies kannst du auf dem zweiten Bild sehen.





Du kannst also die Werte von a berechnen, für die die Punkte P und Q in der Ebene E_a liegen. Das gleiche tust du mit den Punkten S und T. Die Ebene E_a hat dann für alle Werte von a zwischen diesen beiden Werten, gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Aufgabe B 1.2 (4P)

► Wahrscheinlichkeit berechnen

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose. Jemand kauft drei Lose. Du sollst berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter diesen drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind.

Die Zufallsvariable X soll die Anzahl der Gewinnlose bezeichnen. Bekannt ist, dass 10 % der Lose Gewinnlose sind; über die Anzahl der Lose insgesamt wissen wir allerdings nichts. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass eine **große Menge** von Losen vorliegt und dass der Kauf drei dieser Lose an der Ausgangssituation nur wenig ändert. Jeder der drei Lose ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ein Gewinnlos.

Also kann hier näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** ausgegangen werden. Entsprechend kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 3$ und $p = 0,1$.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Lose Gewinnlose sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$. Nutze zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit die Formel zur Binomialverteilung oder den GTR.

► Mindestanzahl der Lose berechnen

Du sollst berechnen, wie viele Lose gezogen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Gewinnlosen darunter sind, größer als 50 % ist. Das bedeutet, in diesem Fall kennst du die Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Gewinnlosen $P(X \geq 2) \geq 50\,\%$. Du suchst die Anzahl der Lose, die gekauft werden müssen, damit diese Bedingung erfüllt ist. Du suchst also n, aus der obigen Formel für Binomialverteilungen. p kennst du bereits.

Du kannst die Anzahl der Lose mit dem GTR über **systematisches Probieren** berechnen.

Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von n und ermittle den gesuchten Wert somit.

Wahlteil Aufgabe B 2

a) ▶ **Ebenengleichung bestimmen** (6P)

Du sollst eine Ebenengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt, in Koordinatenform bestimmen.

Die Koordinatenform einer Ebenengleichung sieht im Allgemeinen folgendermaßen aus:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = b$,

- $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene.
- b ist eine Konstante.

Der Normalenvektor einer Ebene stehen immer senkrecht auf der Ebene. Um den Normalenvektor zu berechnen, benötigst du zwei Vektoren, die in der Ebene liegen. Diese kannst du mit Hilfe von drei Punten berechnen, wenn diese ebenfalls in der Ebene liegen. Hast du erst einmal einen Normalenvektor gefunden, kannst du mit diesem b berechnen, indem du die Punktprobe durchführst, setze dazu einen Punkt in die Ebenengleichung von S ein, von dem du weißt, dass dieser in der betrachteten Ebene liegt. Gehe also wie folgt vor:

- Finde drei Punkte, die in der Ebene S liegen.
- Berechne einen Normalenvektor der Ebene S.
- Führe eine Punktprobe durch um die Ebenengleichung aufzustellen.

▶ **Zeigen, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat**

Du sollst zeigen, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei Seiten, die die gleiche Länge besitzen.

Das Segeltuch wird durch das Dreieck FM_1M_2 mit den Eckpunkten F ,M_1 und M_2 dargestellt. Das Segeltuch hat demnach genau dann die Form eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn zwei der Seiten $\overline{FM_1}$,$\overline{FM_2}$ und $\overline{M_1M_2}$ die gleiche Länge besitzen.

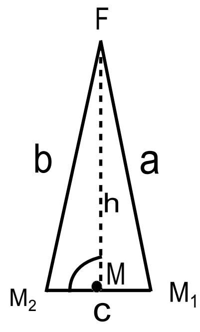
Überprüfe also die Längen der Seiten $\overline{FM_1}$, $\overline{FM_2}$ und $\overline{M_1M_2}$ des Dreiecks FM_1M_2, um zu zeigen, dass es die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Die Länge der Seiten berechnest du über die Beträge der zugehörigen Vektoren.

▶ **Flächeninhalt des Segeltuchs berechnen**

Du sollst den Flächeninhalt A des Segeltuchs berechnen. Du weißt, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.

Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks kannst du mit Hilfe folgender Formel berechnen:
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h.$

c bezeichnet die Grundseite des Dreiecks. h bezeichnet die Höhe des Dreiecks FM_1M_2, welche die Länge der Strecke von der Spitze des Dreiecks zur Seitenmitte von c ist.
Wir benennen die Seiten des Segeltuchs nun wie in der Abbildung rechts.



Um den Flächeninhalt A zu berechnen, musst du also zuerst die Höhe des Dreiecks berechnen.

1. Schritt: Höhe des Dreiecks berechnen

Um die Höhe des Dreiecks zu berechnen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Lösungsweg A: Du berechnest die Länge des Vektors von F zum Seitenmittelpunkt M von c.
- Lösungsweg B: Mit dem Satz des Pythagoras

2. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Nun hast du h berechnet, c kennst du bereits. Setze dies nun in die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ein und berechne den Flächeninhalt.

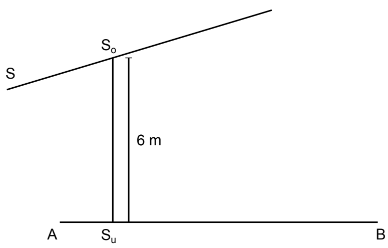
▶ Abstand zwischen dem Segeltuch und E berechnen

Du sollst den Abstand d zwischen dem Segeltuch und der Ecke E berechnen. Du weißt bereits, dass du das Segeltuch als Ebene S mit der Ebenengleichung in Koordinatenform
$S:\ 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 24$
auffassen kannst. Du sollst also den Abstand zwischen dem Punkt E und der Ebene S berechnen.
Den Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene S bestimmst du über die Hessesche Normalform.
$d(P\,;\,S) = \dfrac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Die Koordinaten des Punktes E hast du bereits berechnet.

b) **▶ Schnittpunkt der Stange mit dem Segeltuch berechnen** (3P)

Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Wir wollen das untere Ende der Stange mit S_u und das obere Ende mit S_o bezeichnen. Der Punkt S_u befindet sich auf der Geraden AC. Das obere Ende der Stange, der Punkt S_o soll das Segeltuch berühren. Also liegt S_o in der Ebene S.



Die Aufgabenstellung gibt weiter vor, dass die Stange 6 m lang sein soll. Du kannst also so vorgehen:

- Stelle eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und C auf.
- Formuliere anhand dieser Geradengleichung allgemeine Koordinaten für den Punkt S_u.
- Der Punkt S_o hat die gleiche x_1- und die gleiche x_2-Koordinate wie der Punkt S_u. Die x_3-Koordinate von S_o ist um 6 größer als die von S_u. Formuliere auf diese Weise auch die allgemeinen Koordinaten von S_o.
- Zuletzt weißt du: Der Punkt S_o soll in der Ebene S liegen. Führe eine Punktprobe durch und bestimme so die genauen Koordinaten von S_o.

a) ▶ **Fairness des Spiels nachweisen** (3P)

Du sollst nachweisen, dass das Spiel fair ist, unter der Annahme, dass das Rad ideal ist. Das bedeutet, jedes Feld hat tatsächlich die gleiche Wahrscheinlichkeit getroffen zu werden.

Ein Spiel ist fair, wenn der **zu erwartende Gewinn** des Spiels mit dem **Einsatz des Spielers** übereinstimmt. Dann nämlich liegt der Vorteil weder beim Spieleveranstalter noch beim Spieler. Erstelle zunächst eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, in der die möglichen Gewinne gemeinsam mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten aufgeführt sind. Berechne sodann den zu erwartenden Gewinn.

▶ **Neuen Auszahlungsbetrag berechnen**

Der Veranstalter möchte nun auf lange Sicht pro Spiel 5 cent Gewinn erzielen, indem er den Auszahlungsbetrag für „Diamant-Diamant“ ändert. Du sollst nun den neuen Auszahlungsbetrag für „Diamant-Diamant“ berechnen.

Um auf lange Sicht 5 cent Gewinn pro Spiel zu erzielen, muss der Veranstalter beim Einsatz von 20 cent pro Spiel einen durchschnittlichen Gewinn von 15 cent garantieren. Du kannst also ähnlich vorgehen wie oben: Berechne den zu erwartenden Gewinn. Dieses Mal ist allerdings der Auszahlungsbetrag für „Diamant - Diamant“ unbekannt. Du kannst ihn mit d bezeichnen. Der zu erwartende Gewinn soll 15 cent betragen.

b) ▶ **Entscheidungsregel formulieren** (3P)

Es besteht nun der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit für „Stern-Stern“ geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden.

Du sollst nun die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{36}$ formulieren, wobei die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll.

Diese Nullhypothese wird **abgelehnt**, wenn besonders **selten** die Kombination „Stern - Stern“ auftritt. Der **Ablehnungsbereich** liegt also **links**, es muss also ein linksseitiger Test durchgeführt werden.

Du kannst so vorgehen:

- Führe zunächst eine Zufallsvariable X ein, welche die Anzahl der Kombination „Stern - Stern"beschreibt und überlege, wie X bei wahrer Nullhypothese verteilt ist.
- Formuliere allgemein den **Ablehnungsbereich** des Tests.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gibt dir an: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird, soll höchstens 5 % betragen. Also soll die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert aus dem Ablehnungsbereich annimmt, höchstens 5 % betragen. Berechne auf dieser Grundlage die obere Grenze des Ablehnungsbereichs und formuliere dann die Entscheidungsregel.