Pflichtteil

Aufgabe 1 (2P)

▶ Erste Ableitung von f bilden

Du sollst die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2+5)\cdot e^{-2x}$ bilden.

Bei der Funktion handelt es sich um ein **Produkt von zwei Funktionen**. Leite sie also nach der **Produktregel** ab.

Bei der Teilfunktion e^{-2x} handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite diesen Teil also nach der **Kettenregel** ab.

Damit erhältst du:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x)\cdot e^{-2x} + (2x^2+5)\cdot(-2)\cdot e^{-2x} \\ &= (4x)\cdot e^{-2x} - (4x^2+10)\cdot e^{-2x} && \mid e^{-2x} \text{ ausklammern} \\ &= (4x-(4x^2+10))\cdot e^{-2x} \\ &= (4x-4x^2-10)\cdot e^{-2x} \\ &= (-4x^2+4x-10)\cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung der Funktion f hat die Gleichung $f'(x) = (-4x+4x-10)\cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 2 (2P)

▶ Stammfunktion von f mit $F(\pi) = 7$ bestimmen

Dir ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$ gegeben. Du sollst die Stammfunktion von f finden, für die $F(\pi) = 7$ gilt.

Du sollst also integrieren. Es handelt sich um eine **verkettete Funktion**, wende also die **lineare Substitution** an um eine Stammfunktion zu bilden.

Eine Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$.
Daraus folgt für die Stammfunktionen von f:

$$\begin{aligned} F(x) &= 4\cdot(-\cos(2x))\cdot\tfrac{1}{2}+c \\ &= -2\cdot\cos(2x)+c \end{aligned}$$

Um dasjenige c auszurechnen, für das $F(\pi) = 7$ gilt, führe eine Punktprobe durch. Setze die Werte $x = \pi$ und $F(x) = 7$ in $F(x)$ ein und löse die Gleichung nach c auf:

$$\begin{aligned} 7 &= -2\cos(2\pi)+c && \mid +2\cos(2\pi) \\ 7+2\cos(2\pi) &= c && \cos(2\pi) = 1 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

Die Stammfunktion von f mit $F(\pi) = 7$ hat die Gleichung $F(x) = -2\cos(2x)+9$.

Aufgabe 3 (2P)

▶ Gleichung lösen

Dir ist die Gleichung gegeben mit $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$.

Die Gleichung zu lösen bedeutet, sie nach x umzustellen.

$$
\begin{aligned}
2\cdot e^x - \frac{4}{e^x} &= 0 && \mid \cdot e^x \text{ um das } x \text{ im Nenner des Bruchs zu eliminieren}\\
2\cdot(e^x)\cdot(e^x) - 4 &= 0 && \text{Rechenregel für Exponenten}\\
2\cdot e^{(x+x)} - 4 &= 0 &&\\
2\cdot(e^{2x}) - 4 &= 0 && \mid +4\\
2\cdot(e^{2x}) &= 4 && \mid :2\\
e^{2x} &= 2 && \text{ln ist die Umkehrfunktion von } e^x\\
\ln(e^{2x}) &= \ln(2) &&\\
2x &= \ln(2) && \mid :2\\
x &= \frac{1}{2}\cdot\ln(2) &&
\end{aligned}
$$

Die Lösung der Gleichung lautet $x = \frac{1}{2}\cdot\ln(2)$.

Aufgabe 4 (4P)

▶ Flächeninhalt berechnen

Dir sind die beiden Funktionen f und g gegeben mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$. Du sollst den Flächeninhalt berechnen, der von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Das Wort **Flächeninhalt** zeigt immer, dass es um die Berechnung eines **Integrals** geht.

Hier geht es um das Integral zwischen den Graphen zweier Funktionen. Das heißt du musst die eine Funktion von der anderen abziehen. Gehe also wie folgt vor:

- Berechne die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen um die Grenzen des Integrals zu erhalten
- Überlege dir, welcher der beiden Graphen oben und welcher unten verläuft
- Ziehe die untere Funktion von der oberen ab
- Formuliere das Integral und berechne es mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

1. Schritt: Schnittpunkte berechnen

Setze dazu beide Funktionsterme gleich:

$$
\begin{aligned}
-x^2 + 3 &= 2x && \mid -2x\\
-x^2 - 2x + 3 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese kannst du nun entweder mit Hilfe der *abc*-Formel (Lösungsweg A) oder der *pq*-Formel (Lösungsweg B) lösen.

▸▸ Lösungsweg A: *abc*-Formel

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(3)}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{16}}{-2} \\ &= \frac{2\pm 4}{-2} \\ x_1 &= \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \\ x_2 &= \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

▸▸ Lösungsweg B: *pq*-Formel

Zunächst musst du die Gleichung auf Normalform $x^2 + p\cdot x + q = 0$ bringen. Multipliziere dazu die Gleichung mit (-1):

$$-1\cdot x^2 - 2\cdot x + 3 = 0 \quad | \cdot(-1)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Setze dies nun in die *pq*-Formel ein.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\left(-\frac{2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + 3} \\ &= -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= -1 \pm \sqrt{4} \\ &= -1 \pm 2 \\ x_1 &= -1 + 2 = 1 \\ x_2 &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Schnittstellen der beiden Funktionen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

2. Schritt: Funktion aufstellen

Überlege jetzt, welcher der beiden Graphen in dem Intervall zwischen den beiden Schnittpunkten oberhalb des anderen Graphen verläuft.

Du kannst dazu beispielsweise einen x-Wert, der zwischen den beiden Schnittstellen liegt, in die beiden Funktionen einsetzen und vergleichen welcher der Funktionswerte größer ist.

Wähle zum Beispiel $x = 0$:

$f(0) = 3$

$g(0) = 0$

Der Funktionswert der Funktion f ist an der Stelle 0 größer als der der Funktion g, also liegt der Graph von f über dem Graphen von g. Ziehe also g von f ab um die Funktion h zu erhalten, die du in das Integral schreibst.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^2 + 3 - (2x) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

3. Schritt: Integral aufstellen und berechnen

Du hast nun die Funktion und die Grenzen für das Integral. Es ergibt sich damit das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{1} h(x)\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{d}x && \text{Stammfunktion bilden} \\ &= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} && \text{Grenzen einsetzen} \\ &= -\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - 1^2 + 3\cdot 1 - (-\tfrac{1}{3}\cdot(-3)^3 - (-3)^2 + 3\cdot(-3)) \\ &= \tfrac{32}{3} \end{aligned}$$

Die Graphen der beiden Funktionen schließen eine Fläche der Größe $\frac{32}{3}$ Flächeneinheiten ein.

Aufgabe 5 (5P)

▸ Bedeutung der Eigenschaften für den Graphen begründen

Du hast vier Eigenschaften einer Funktion gegeben und sollst erklären, welche Bedeutung diese Eigenschaften für den Graphen haben, wenn du ihn zeichnen würdest.

(1) $\boldsymbol{f(2) = 1}$

Setzt du $x = 2$ in $f(x)$ ein soll sich der Funktionswert 1 ergeben. An der Stelle $x = 2$ hat die Funktion also den y-Wert $y = 1$. Der Graph verläuft damit durch den Punkt $P(2\mid 1)$.

(2) $\boldsymbol{f'(2) = 0}$

f' bezeichnet die erste Ableitung der Funktion f und die erste Ableitung beschreibt die Steigung der ursprünglichen Funktion.

Die erste Ableitung der Funktion hat an der Stelle $x = 2$ den Wert 0, also eine Nullstelle.

Daraus folgt, dass der Graph der ursprünglichen Funktion an der Stelle $x = 2$ die Steigung 0 hat. Dies ist die notwendige Bedingung für Extremstellen. Dir ist hier noch nichts über die hinreichende Bedingung gegeben, also weißt du noch nicht sicher ob es auch tatsächlich eine Extremstelle ist. Es handelt sich lediglich um eine **mögliche Extremstelle** von $f(x)$, der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ also möglicherweise einen Hoch- oder Tiefpunkt.

Außerdem hat die Steigung von 0 noch eine andere Bedeutung: Die Tangente, die den Graph an dieser Stelle berührt, hat die Steigung 0. Sie ist somit eine waagerechte Tangente.

Tangenten sind Geraden, die den Graph in einem bestimmten Punkt nur berühren, aber nicht schneiden. Die Steigung einer Tangente in einem Punkt ist immer auch die Steigung (also der y-Wert der ersten Ableitung) der ursprünglichen Funktion im Berührpunkt.

(3) $\boldsymbol{f''(4) = 0}$ und $\boldsymbol{f'''(4) \neq 0}$

f'' bezeichnet die zweite Ableitung von f. Sie hat an der Stelle $x = 4$ den Wert 0. Dass die zweite Ableitung einer Funktion den Wert 0 hat, ist die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt im Graphen der ursprünglichen Funktion f.

Die zweite Ableitung von f erfüllt diese Bedingung an der Stelle $x = 4$. Daraus folgt, dass der Graph an der Stelle $x = 4$ möglicherweise einen Wendepunkt besitzt.

Außerdem ist dir gegeben, dass $f'''(4) \neq 0$.

f''' bezeichnet die dritte Ableitung der Funktion f. Du weißt also, dass die dritte Ableitung an der Stelle $x = 4$ nicht den Wert 0 hat.

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt im Graphen der ursprünglichen Funktion ist, dass der Wert der dritten Ableitung an der Wendestelle nicht den Wert 0 hat.

Hier ist diese Bedingung erfüllt. Die Funktion erfüllt also beide Bedingungen für einen Wendepunkt an der Stelle $x = 4$.

Der Graph von f hat einen **Wendepunkt** an der Stelle $x = 4$.

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

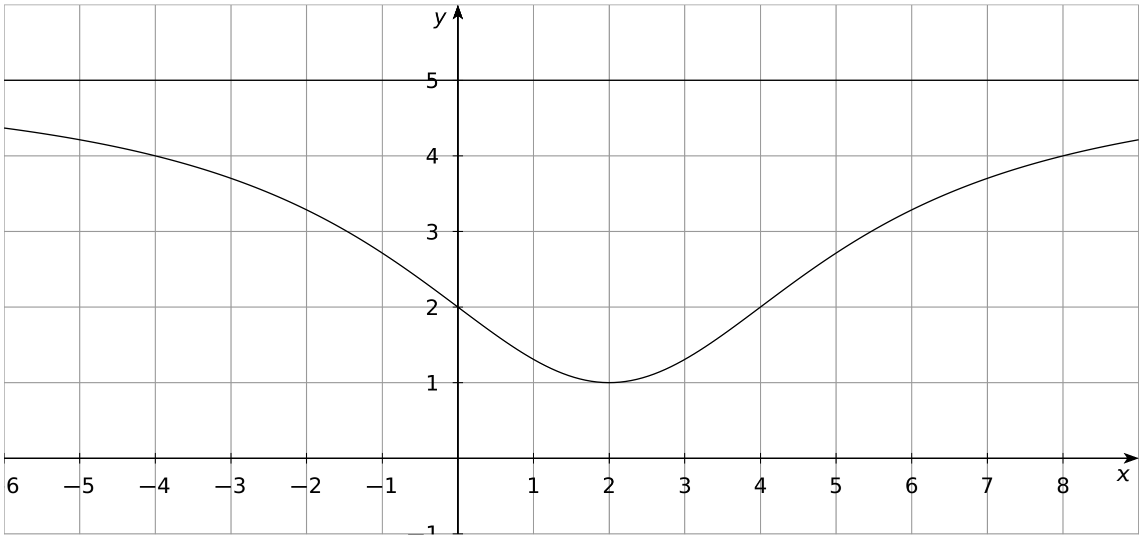
Lässt man den x-Wert unendlich viel größer oder kleiner werden, setzt also für x sehr große positive oder negative Zahlen ein, nähert sich der entsprechende y-Wert immer mehr der 5 an, wird aber nicht größer als 5. Der Graph nähert sich also immer weiter dem Wert 5 an, überschreitet aber diese "Grenze"nicht. $y = 5$ ist damit eine Art „Grenze“nach oben für den Graphen, an die er sich immer weiter annähert und damit eine Asymptote, die waagerecht verläuft.

Die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ ist eine **waagerechte Asymptote** des Graphen von f.

▶ Einen möglichen Verlauf des Graphen skizzieren

- Um einen möglichen Verlauf des Graphen von f zu skizzieren, trage zuerst die Punkte in ein Koordinatensystem ein, die du kennst, also $P(2 \mid 1)$.
- Trage zur Hilfe die waagerechte Tangente an $P(2 \mid 1)$ ein. Das bedeutet auch, dass der Graph dort einen **möglichen Extrempunkt** besitzt.
- Zeichne die **waagerechte Asymptote** $y = 5$ ein.
- Zeichne nun einen Graph, der durch P verläuft und sich rechts und links von der y-Achse der Asymptote annähert. Beachte dabei, dass der Graph bei $x = 4$ eine **Wendestelle** haben soll.

Es ergibt sich beispielsweise der Graph:



Aufgabe 6 (4P)

▶ Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene bestimmen

Du sollst den Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene E berechnen. Allerdings hast du von der Gerade G und der Ebene E keine Gleichungen gegeben. Du hast dafür aber zwei Punkte gegeben, die auf der Geraden g liegen, genauso wie einen Punkt, der in der Ebene E liegt. Du weißt auch, dass die Gerade die Ebene orthogonal, also senkrecht schneidet.

Du kannst so vorgehen:

- Geradengleichung von g bestimmen
- Ebenengleichung von E bestimmen
- Schnittpunkt durch einsetzen von g in E berechnen

1. Schritt: Geradengleichung aufstellen

Eine Geradengleichung besteht aus einem Aufpunkt P und einem Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$:
$g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{r}$.

Die beiden Punkte $A(1\,|\,-1\,|\,3)$ und $B(2\,|\,-3\,|\,0)$ sind dir gegeben. Wähle beispielsweise A als Aufpunkt, also anstelle von $\overrightarrow{OP}$ wählst du $\overrightarrow{OA}$. Alternativ könntest du auch B als Aufpunkt wählen.

Der Richtungsvektor ergibt sich durch den Vektor, der von A nach B zeigt:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Geradengleichung für g lautet also $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Du weißt, dass die Gerade g orthogonal, also senkrecht, zur Ebene E verläuft. Außerdem weißt du, dass der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ einer Ebene immer senkrecht auf dieser Ebene steht. Du kannst also den Richtungsvektor von g als Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E verwenden.

Du hast also einen Vektor gegeben, der senkrecht zur Ebene E steht und einen Punkt, der in der Ebene liegt.

Mit Hilfe dieser Informationen kannst du die Ebenengleichung in Koordinatenform aufstellen, da du dafür einen Normalenvektor und einen Punkt, der in der Ebene liegt brauchst.

Die Koordinatengleichung einer Ebene lautet allgemein $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$, wobei n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ sind. d ist eine Konstante, die du über die Punktprobe bestimmen kannst.

Setze also die Koordinaten des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ mit $n_1 = 1$, $n_2 = -2$ und $n_3 = -3$ in die allgemeine Koordinatengleichung ein:

$E: 1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = d$

Um nun noch d auszurechnen, führe die Punktprobe durch und setze den gegebenen Punkt $C(4\,|\,3\,|\,-8)$, der in der Ebene liegt, in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} 4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) &= d \\ 22 &= d \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für E die Ebenengleichung $E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$.

3. Schritt: Schnittpunkt bestimmen

Um nun den Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene zu berechnen, setze die Geradengleichung koordinatenweise, das heißt zeilenweise, in die Ebenengleichung ein:

Das bedeutet: Du kannst die Geradengleichung in 3 „Zeilen“aufteilen, da $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Du kannst daraus nun jede Zeile einzeln ablesen:

$x_1 = 1 + t \cdot 1$

$x_2 = -1 + t \cdot -2$

$x_3 = 3 + t \cdot -3$

Diese kannst du nun jeweils für x_1, x_2 und x_3 in die Ebenengleichung einsetzen und anschließend nach t auflösen.

$$\begin{aligned} 1\cdot(1+t)-2\cdot(-1-2t)-3\cdot(3-3t) &= 22 \\ -6+14t &= 22 \qquad \mid +6 \\ 14t &= 28 \qquad \mid :14 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Setze t in die Gleichung von g ein, um die Koordinaten des Schnittpunktes zu erhalten:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt $S(3\,|\,-5\,|\,-3)$.

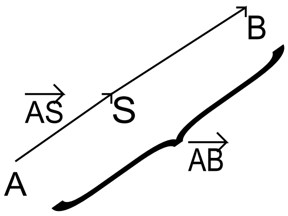
▸ Besondere Lage des Schnittpunktes überprüfen

Du wirst gefragt, ob der Schnittpunkt S zwischen den beiden gegebenen Punkten A und B liegt.

Fertige dir zur Hilfe eine kleine Skizze an. An der Skizze kannst du sehen, dass S näher an A liegen würde als B, wenn S zwischen ihnen läge. Um herauszufinden, ob S zwischen A und B liegt, berechne die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ und vergleiche ihre Längen, also die Abstände zwischen den Punkten A und B und den Punkten A und S :

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Du hast die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{AB}$ berechnet und kannst daran sehen, dass $\overrightarrow{AS}$ länger ist als $\overrightarrow{AB}$. S liegt also weiter von A entfernt als B. Damit kann S nicht zwischen A und B liegen.

Der Schnittpunkt S liegt nicht zwischen den Punkten A und B.

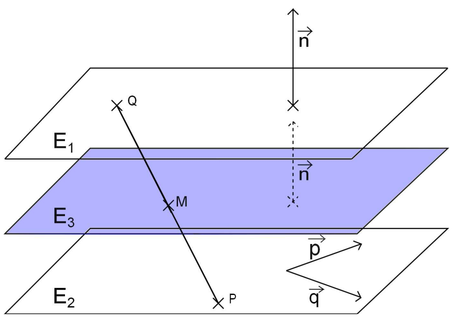
Aufgabe 7 (4P)

▸ Parallelität zeigen

Du hast die beiden Ebenen E_1 und E_2 gegeben mit:

$E_1: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und

$$E_2: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Die beiden Ebenengleichungen liegen dir in zwei unterschiedlichen Formen vor: E_1 hast du in Koordinatenform gegeben, E_2 in Parameterform.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren, parallel sind, also in dieselbe Richtung zeigen.

In diesem Fall hast du aber nur bei einer der beiden Ebenen einen Normalenvektor gegeben, bei der anderen Ebene hast du zwei Spannvektoren vorgegeben, die innerhalb der Ebene, also parallel zu ihr liegen.

Zwei solche Ebenen sind parallel, wenn der Normalenvektor der ersten Ebene auch senkrecht zur zweiten Ebene steht. Das bedeutet, der Normalenvektor von E_1 muss ebenfalls senkrecht zu beiden Spannvektoren von E_2 stehen.

Das bedeutet, du hast hier zwei Möglichkeiten:

Lösungsweg A Du kannst zeigen, dass der Normalenvektor von E_1 senkrecht zu den Spannvektoren von E_2 verläuft.

Lösungsweg B Du kannst den Normalenvektor der zweiten Ebene berechnen und zeigen, dass er parallel zum Normalenvektor der ersten Ebene liegt.

►► Lösungsweg A: Zeige, dass der Normalenvektor senkrecht zu den Spannvektoren liegt

Zwei Vektoren liegen senkrecht zueinander, wenn ihr **Skalarprodukt** 0 ergibt.

Bei E_1 kannst du einfach den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ ablesen, also einen Vektor der senkrecht zur Ebene steht:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei E_2 kannst du diesen Vektor nicht ablesen, dafür aber die beiden Spannvektoren

$\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Berechne das Skalarprodukt von $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{p}$ und von $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{q}$:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{p} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{q} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0$

Der Normalenvektor der Ebene E_1 ist senkrecht zu den Spannvektoren von E_2. Also sind die beiden Ebenen parallel.

►► Lösungsweg B: Berechne den Normalenvektor von E_2 und zeige die Parallelität der beiden Normalenvektoren

Bei Ebene E_1 kannst du einfach den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ ablesen, also einen Vektor der senkrecht zur Ebene steht:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei E_2 kannst du diesen Vektor nicht ablesen, dafür aber die beiden Spannvektoren

$\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Mit deren Hilfe kannst du den Normalenvektor der Ebene E_2 berechnen. Anschließend kannst du überprüfen, ob die beiden Normalenvektoren parallel sind.

Zum Berechnen des Normalenvektors der Ebene E_2 hast du zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit Mit Hilfe des Vektorprodukts bzw. Kreuzprodukts

2. Möglichkeit Mit Hilfe des Skalarprodukts

1. Möglichkeit: Vektorprodukt Bildest du das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren, erhältst du einen Vektor, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht, damit also auch senkrecht auf der Ebene steht, die von den beiden Vektoren aufgespannt wird.
Die Formel zur Berechnung des Vektorprodukts lautet:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Bilde also das Vektorprodukt, der beiden Spannvektoren der Ebene E_2 um den Normalenvektor von E_2 zu berechnen:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit: Skalarprodukt Du weißt, dass der Normalenvektor der Ebene E_2 senkrecht zur Ebene, und damit auch senkrecht zu den beiden Spannvektoren liegen soll. Das heißt, bildest du das Skalarprodukt des einen Spannvektors mit dem Normalenvektor muss es 0 ergeben, genauso, wenn du das Skalarprodukt des zweiten Spannvektors mit dem Normalenvektor berechnest.
Stellst du diese beiden Gleichungen auf, indem du für den Normalenvektor von E_2 $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ einsetzt, kannst du damit m_1, m_2 und m_3 ausrechnen.
Bilde also die beiden Skalarprodukte:

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3 = m_1 + m_2$$

$$\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 4 \cdot m_3 = m_1 + 3m_2 + 4m_3$$

Da diese beiden Skalarprodukte 0 ergeben sollen erhältst du die beiden Gleichungen:

(1) $m_1 + m_2 = 0$

(2) $m_1 + 3m_2 + 4m_3 = 0$

Mit diesen beiden Gleichungen kannst du jetzt m_1, m_2 und m_3 berechnen. Du hast nur zwei Gleichungen gegeben, aber 3 Variablen, normalerweise brauchst du aber immer drei Gleichungen, wenn du drei Variablen hast. Hier kannst du aber einfach eine Variable wählen wie du möchtest und danach dann die übrigen beiden Variablen berechnen.

Setze also zum Beispiel $m_3 = 2$ und setze dies in die beiden Gleichungen ein. Damit erhältst du:

(1) $m_1 + m_2 = 0$

(2) $m_1 + 3m_2 + 4 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 + 3m_2 = -8$

Nun kannst du (1) zum Beispiel nach m_1 umstellen:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 0 \qquad && \mid -m_2 \\ m_1 &= -m_2 \end{aligned}$$

und das für m_1 in (2) einsetzen, dann erhältst du:

(1) $m_1 = -m_2$

(2) $$\begin{aligned} -m_2 + 3m_2 &= -8 \qquad && \text{zusammenfassen} \\ 2m_2 &= -8 && \mid : 2 \\ m_2 &= -4 \end{aligned}$$

damit hast du jetzt einen Wert für m_2 und einen für m_3, den du eben selbst gewählt hast und kannst nun den noch fehlenden Wert für m_3 berechnen, indem du m_2 in (1) einsetzt:

(1) $m_1 = -m_2 = -(-4) = 4$

Also hast du für den Normalenvektor $\overrightarrow{m}$ der Ebene E_2 den Vektor $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnet

Du hast also den Normalenvektor der Ebene E_1 mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und den Normalenvektor der Ebene E_2 mit $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Überprüfe nun, ob sie parallel zueinander sind, also in dieselbe Richtung zeigen.
Schaust du dir die Vektoren einmal genau an, kannst du sehen, dass du $\overrightarrow{m}$ leicht in $\overrightarrow{n}$ umrechnen kannst: $2 \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{m}$.
Das bedeutet, dass beide Vektoren in dieselbe Richtung zeigen, $\overrightarrow{m}$ nur doppelt so lang wie $\overrightarrow{n}$ ist.
Da beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 in dieselbe Richtung zeigen und damit parallel sind, sind die Ebenen E_1 und E_2 parallel zueinander.

▶ Ebenengleichung bestimmen

Du sollst eine Ebenengleichung von E_3 aufstellen. Die Ebene soll parallel zu E_1 undE_2 liegen und genau in der Mitte zwischen ihnen liegen.

Du kannst die Gleichung in Koordinatenform aufstellen, also in der Form, in der du auch E_1 gegeben hast. Dazu benötigst du einen Normalenvektor, also irgendeinen Vektor der senkrecht zu E_3 steht und einen Punkt der in der Ebene E_3 liegt, damit du beides in die Standardkoordinatengleichung einsetzen kannst.

1. Schritt: Normalenvektor finden

Der Normalenvektor von E_3 muss senkrecht zu ihr verlaufen, die Länge des Vektors ist für die Ebenengleichung unwichtig. Du kennst bereits einen Vektor, der senkrecht zu E_3 liegt, nämlich den Normalenvektor der Ebene E_1, da diese beiden Ebenen parallel sein sollen, muss der Normalenvektor von E_1 auch senkrecht zu E_3 liegen.

Damit ergibt sich für den Normalenvektor von E_3: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Punkt in E_3 finden

Die Punkte, die in E_3 liegen, sind von E_1 genauso weit entfernt wie von E_2. Sie sind also alle Mittelpunkte einer Strecke zwischen einem Punkt in E_1 und einem Punkt in E_2.

Berechne also den Mittelpunkt einer Strecke zwischen einem Punkt in E_1 und einem in E_2. Einen Punkt, der in der Ebene E_2 liegt kennst du bereits, den Aufpunkt der Ebenengleichung: $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP}$

Einen Punkt, der in E_1 liegt kannst du berechnen, indem du zwei beliebige Zahlen in die Ebenengleichung von E_1 für beispielsweise x_1 und x_2 einsetzt und x_3 berechnest, indem du die Gleichung nach x_3 auflöst:

Wähle zum Beispiel $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$. Dann bekommst du die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + x_3 &= -1 && \text{zusammenfassen} \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Punkt $Q(1 \mid 1 \mid -1)$, der in der Ebene E_1 liegt.

Berechne nun den **Mittelpunkt** M zwischen P und Q mit der Formel zur Berechnung des Mittelpunkts: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Mittelpunkt $M(4 \mid 4 \mid 2)$ liegt in der Ebene E_3.

3. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Nun hast du alle Zutaten für die Ebenengleichung in Koordinatenform zur Ebene E_3 und kannst diese in die allgemeine Koordinatengleichung $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ einsetzen.

Beginne mit dem Normalenvektor; Dann ergibt sich die Gleichung:

$E_3 : 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = d$

Wenn du nun eine Punktprobe mit dem Punkt M durchführst und diesen in die Gleichung einsetzt, kannst du damit d ausrechnen:

$$\begin{aligned} E_3 : 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 2 &= d \\ d &= 2 \end{aligned}$$

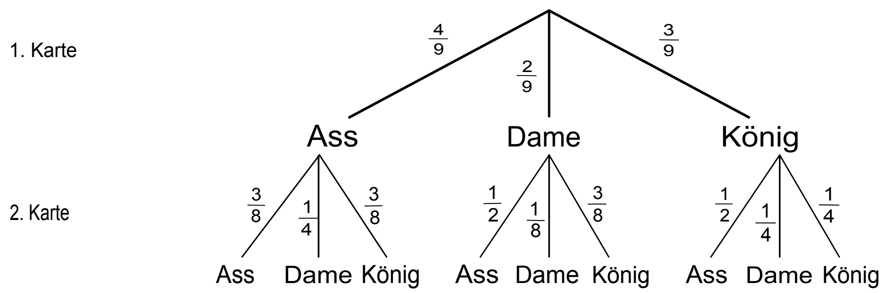
Damit hast du die vollständige Ebenengleichung der Ebene E_3: $E_3: 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 = 2$
Eine Ebenengleichung der Ebene E_3 lautet $E_3: 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 = 2$

Aufgabe 8

(4P)

a) ▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen.

Da Peter jede Karte nicht sofort wieder zurücklegt und alle Karten neu durchmischt, entspricht dies dem **Ziehen ohne Zurücklegen**. Wird also eine Karte aufgedeckt, fällt diese weg und kann nicht erneut aufgedeckt werden. Sind es anfangs also neun Karten und Peter deckt die erste Karte auf, sind für die zweite Karte nur noch acht Karten übrig die aufgedeckt werden können. Ist die erste Karte beispielsweise eine Dame bleibt dann nur noch eine Dame übrig, die bei der zweiten Karte aufgedeckt werden kann. Somit verändern sich die Wahrscheinlichkeiten nach dem Aufdecken der ersten Karte. Du hast die Anfangswahrscheinlichkeiten gegeben:
Ein Ass aufzudecken: $\frac{4}{9}$, Einen König aufzudecken: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, Eine Dame aufzudecken: $\frac{2}{9}$.



▶ **A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch** 0.2cm Die Wahrscheinlichkeit ein Ass aufzudecken beträgt $\frac{4}{9}$ und kein Ass aufzudecken $\frac{5}{9}$.
Die Wahrscheinlichkeit dass die erste Karte kein Ass ist liegt also bei $\frac{5}{9}$. Für die zweite Karte bleiben jetzt nur noch 8 Karten übrig, die Wahrscheinlichkeit hier kein Ass zu erwischen ändert sich, da jetzt eine Karte weniger da ist, die kein Ass ist. Dann bleiben für die zweite Karte noch die Wahrscheinlichkeiten:
Ein Ass aufzudecken: $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ und Kein Ass aufzudecken: $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.
Um die gesamte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, multipliziere nun beide Wahrscheinlichkeiten dafür, kein Ass zu erwischen:
$\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$

▶ **B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch** Hier gehst du

nun ähnlich vor wie eben: Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte eine Dame und die zweite Karte ein Ass ist, und addiere dazu die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte ein Ass und die zweite Karte eine Dame ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Dame ist liegt bei $\frac{2}{9}$, nun ist eine Dame weniger im Spiel und damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ein Ass ist $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist beträgt $\frac{4}{9}$, damit bleiben für die zweite Karte wieder nur 8 Karten mit einem Ass weniger übrig und die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte eine Dame ist beträgt $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
Die gesamte Wahrscheinlichkeit, dafür, dass eine Dame und ein Ass aufgedeckt auf dem Tisch liegen ergibt sich somit aus:
$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{9}$.

b) ▶ **Mögliche Werte für X bestimmen**

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Spielkarten an, die aufgedeckt auf dem Tisch liegen, wenn zum ersten Mal ein Ass aufgedeckt wurde.
Da sich unter den neun Karten vier Asse befinden, muss spätestens die sechste aufgedeckte Karte ein Ass sein.
Also kann X die Werte 1 , 2 , 3 , 4 , 5 oder 6 annehmen.

▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen**

$P(X\leq 2)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass spätestens die zweite aufgedeckte Karte ein Ass ist und setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten $P(X=1)$ und $P(X=2)$ zusammen.
$P(X=1)=\frac{4}{9}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dafür dass die erste Karte in Ass ist, die du bereits in Aufgabenteil a) öfter verwendet hast.
$P(X=2)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste aufgedeckte Karte kein Ass, und die zweite Karte ein Ass ist.
Daraus ergibt sich $P(X\leq 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

Aufgabe 9 (3P)

▶ **Antwort begründen**

Du sollst beantworten, ob es eine ganzrationale Funktion vierten Grades geben kann, deren Graph drei Wendepunkte besitzt.

Überlege dir zuerst was es bedeutet, wenn der Graph einer Funktion f einen Wendepunkt hat, und wie die Funktion grundsätzlich aussehen muss.

Für den Wendepunkt gibt es die notwendige und die hinreichende Bedingung.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt besagt, dass der Wert der zweiten Ableitung von f 0 sein muss, also $f''(x) = 0$ gelten muss. Das bedeutet, damit der Graph einer Funktion drei Wendepunkte hat, muss die zweite Ableitung an drei verschiedenen Stellen den Wert 0 haben, die zweite Ableitung muss folglich drei Nullstellen haben. Überprüfe, ob dies der Fall sein kann.

Überlege dir, wie eine ganzrationale Funktion vierten Grades aussehen muss. Dass sie den Grad 4 hat bedeutet, dass der höchste Exponent, den ein x haben kann, 4 ist. Damit sieht eine ganzrationale Funktion vierten Grades so aus: $f: a\cdot x^4 + b\cdot x^3 + c\cdot x^2 + d\cdot x + e$

Schaue dir nun an, welche Gestalt die zweite Ableitung hat, da für einen Wendepunkt die zweite Ableitung von Bedeutung ist. Bilde die ersten beiden Ableitungen von f:

$f'(x) = 4\cdot a\cdot x^3 + 3\cdot b\cdot x^2 + 2\cdot c\cdot x + d$

$f''(x) = 4\cdot 3\cdot a\cdot x^2 + 3\cdot 2\cdot b\cdot x + c$

$f''(x)$ hat den Grad 2. Eine Funktion hat immer höchstens so viele Nullstellen, wie ihr Grad. Demnach hat die zweite Ableitung von f höchstens zwei Nullstellen. Und da die Nullstellen der zweiten Ableitung gerade die Wendestellen von f sind, kann f höchstens zwei Wendestellen besitzen.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades kann nicht drei Wendepunkte besitzen, denn an jeder Wendestelle hat die zweite Ableitung der Funktion eine Nullstelle. Da die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades den Grad 2 hat, kann diese maximal zwei Nullstellen besitzen und damit hat jeder Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades maximal zwei Wendestellen.

Wahlteil Aufgabe A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8; \quad -4 \leq x \leq 4$ (x und $f(x)$ in Meter).

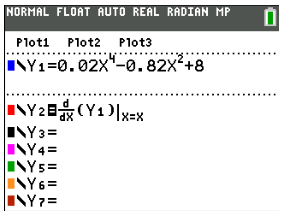
a) ▸ **Stellen mit der steilsten Steigung berechnen** (6P)

Du sollst zuerst die Stellen berechnen, an denen die Wände am steilsten verlaufen.

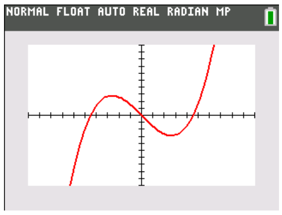
Die Wände verlaufen dort am steilsten, wo sie die größte positive bzw. die betragsmäßige größte negative Steigung haben. Da der Graph der Funktion f die Wände des Bergstollens darstellt, suchst du also die Stellen des Graphen, an denen er die steilste Steigung hat. Das sind die Stellen mit der größten bzw. kleinsten Steigung.

Die Steigung eines Graphen einer Funktion wird durch den Graphen der ersten Ableitung beschrieben.

Du suchst demnach also die Maxima und Minima der ersten Ableitung f' von f. Diese kannst du mit deinem GTR bestimmen. Bilde dazu zuerst die erste Ableitung f' von f mit deinem GTR. Anschließend kannst du die Maxima und Minima von f' bestimmen. Die erste Ableitung von f kannst du im Y=-Menü deines GTR bestimmen, indem du dort zuerst den Funktionsterm von f eingibst. Gib nun als zweite Funktion die erste Ableitung ein. Den Befehl für Ableiten findest du unter `MATH → 8: nDeriv(`. Gib in die Klammer Y1 für die erste Funktion f ein. Wähle dazu unter `VARS → Y-VARS → Function` Y1 aus.

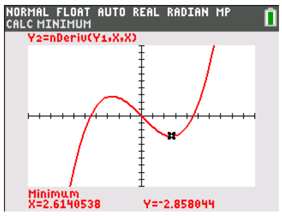


Zeichne nun den Graphen von f' mit GRAPH. Bestimme die Maxima mit `2ND → TRACE (CALC) → 4: maximum`.



Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$x \approx -2,61$, $y \approx 2,86$

Bestimme nun die Minima mit `2ND → CALC → 3: minimum`.



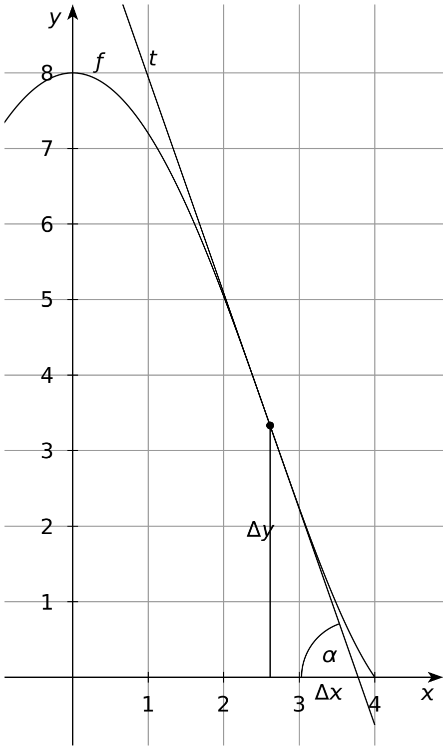
Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$x \approx 2,61$, $y \approx -2,86$.

Dies sind die Stellen von f mit der steilsten Steigung, also die Stellen, an denen die Wände des Stollens am steilsten verlaufen.

Die Wände des Stollens verlaufen ungefähr 2,61 Meter links und rechts der Stollenmitte am steilsten.

▸ Winkel berechnen

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Wände an den steilsten Stellen mit der Horizontalen einschließen.
α ist der Steigungswinkel der Tangente t an dem Punkt des Graphen; das ist der Winkel, den die Tangente mit der x-Achse bildet. Diesen Winkel kannst du in der Skizze sehen.
Die Tangente an einem Punkt ist die Gerade, die den Graphen nur in diesem einen Punkt berührt aber nicht schneidet. Sie hat dieselbe Steigung wie der Graph in dem berührten Punkt. Demnach ist der Funktionswert der ersten Ableitung des Berührpunktes die Steigung der Tangente. Der Steigungswert m im Berührpunkt ergibt sich durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. In der Skizze rechts kannst du sehen, dass Δy die Gegenkathete von α und Δx die Ankathete von α ist. Demnach ist der Steigungswert $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha)$.



Der Graph von f verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse, was du daran erkennen kannst, dass im Funktionsterm von f nur gerade Exponenten vorkommen.

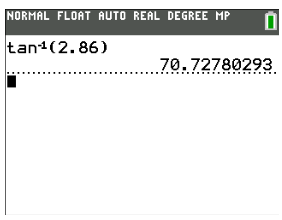
Damit verlaufen auch die Wände des Bergstollens achsensymmetrisch zur Stollenmitte. Daher sind die Winkel an den steilsten Stellen auf beiden Seiten gleich groß. Es reicht demnach, nur einen Winkel zu berechnen.

Berechne also den Steigungswinkel der Tangente am Maximum.

Du kennst bereits den Funktionswert der ersten Ableitung f' an dieser Stelle und weißt, dass dieser der Steigungswert m ist. Damit ergibt sich für α:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= m \\ &= 2,86 \qquad \mid \tan^{-1} \\ \alpha &= \tan^{-1}(2,86) \end{aligned}$$

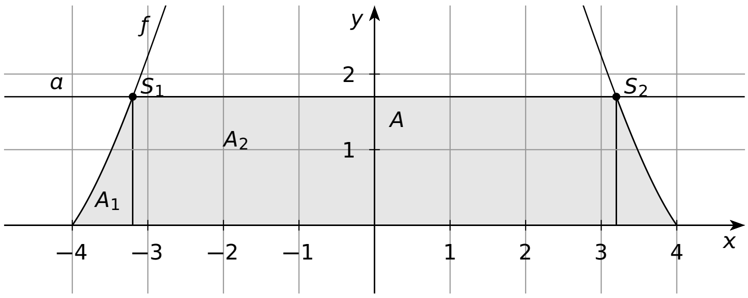
Damit kannst du nun im Rechen-Modus des GTR den Winkel α berechnen.
Du erhältst das Ergebnis: $\alpha = 70,73°$.
An den steilsten Stellen, schließen die Wände mit der Horizontalen einen Winkel α der Größe $70,73°$ ein.



▶ Volumen des Wassers berechnen

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich in dem Stollen befindet, wenn das Wasser $1,7$ Meter hoch steht

In der Skizze sind die wesentlichen Teile des Graphen von f, sowie die Wasseroberfläche dargestellt.



Die Oberfläche des Wassers wird dabei durch die Gerade a mit der Gleichung $a(x) = 1,7$ beschrieben. Bis zu dieser Gerade steht das Wasser in dem Stollen. Der Querschnitt des Wassers wird demnach durch die gesamte graue Fläche A in der Skizze dargestellt. Das Volumen eines solchen Körpers kannst du über die Formel $V = G \cdot h$ berechnen. G steht für die Grundfläche und h für die Höhe. In diesem Fall ist die Grundfläche die Fläche, die in der Skizze grau hinterlegt ist. Die Höhe ist die Länge des Bergstollens. Deshalb kannst du das Volumen des Wassers berechnen, indem du den Flächeninhalt des Querschnitts des Wassers mit der Länge des Stollens multiplizierst.

Du musst also zuerst den Inhalt der Fläche A berechnen, um diesen später mit der Länge des Stollens multiplizieren zu können. Dazu benötigst du die Schnittpunkte des Graphen mit der Gerade a.

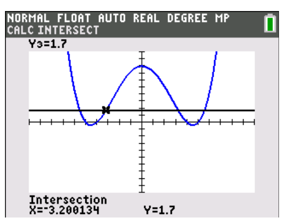
Gehe also folgendermaßen vor:

- Schnittpunkte des Graphen von f mit der Gerade a berechnen
- Flächeninhalt berechnen
- Volumen berechnen

Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der Geraden a kannst du berechnen, indem du die Graphen der beiden Funktionen in deinem GTR zeichnest.

1. Schritt: Schnittpunkte berechnen

Nun kannst du die Schnittpunkte unter `2ND → TRACE(CALC) → 5: intersect` bestimmen. Du suchst nur Schnittpunkte, die innerhalb des Intervalls $[-4\,;\,4]$ liegen, das dir in der Aufgabe vorgegeben ist. Du erhältst demnach die beiden Lösungen:
$x_1 \approx -3,2$ und $x_2 \approx 3,2$



Die Koordinaten der beiden Schnittpunkte lauten demnach $S_1(-3,2 \mid 1,7)$ und $S_2(3,2 \mid 1,7)$.

2. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Du brauchst nur den Inhalt der Fläche links oder rechts der y-Achse zu berechnen und später zu verdoppeln, da der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Berechne also den Inhalt der Fläche links der y-Achse:

Diesen Teil der Fläche kannst du ebenfalls in zwei Teile aufteilen:

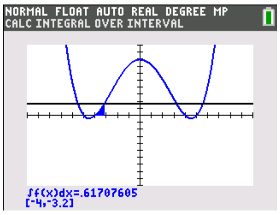
- A_1: den Teil von der Nullstelle bis zum Schnittpunkt S_1
- A_2: den Teil von S_1 bis $x = 0$

Dann ergibt sich der gesamte Flächeninhalt $A = 2 \cdot (A_1 + A_2)$
Berechne nun den Inhalt der beiden Teilflächen A_1 und A_2 getrennt:

1. Teilfläche A_1
Berechne zuerst den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bis zum Schnittpunkt. Den Inhalt einer Fläche unterhalb eines Graphen wird immer mit Hilfe eines Integrals berechnet.
Der Inhalt der Teilfläche ergibt sich aus dem Integral über f in den Grenzen $a = -4$ und $b = -3,2$, wobei die untere Grenze die in der Aufgabe linke Begrenzung für x, also das linke Ende des Bergstollens ist, und die obere Grenze der Schnittpunkt S_1.

Dieses Integral kannst du im GTR bestimmen, indem du zuerst den Graph zeichnen lässt.

Unter $\boxed{\texttt{2ND} \to \texttt{TRACE(CALC)} \to 7}$ findest du den Befehl für ein Integral. Wähle nun den Graphen von f aus und bestätige mit EXE. Dort musst du nun zuerst die untere ($a = -4$) und anschließend die obere Grenze ($b = -3,2$) des Integrals eingeben.
Du erhältst dann das Ergebnis:
$A_1 \approx 0,617$



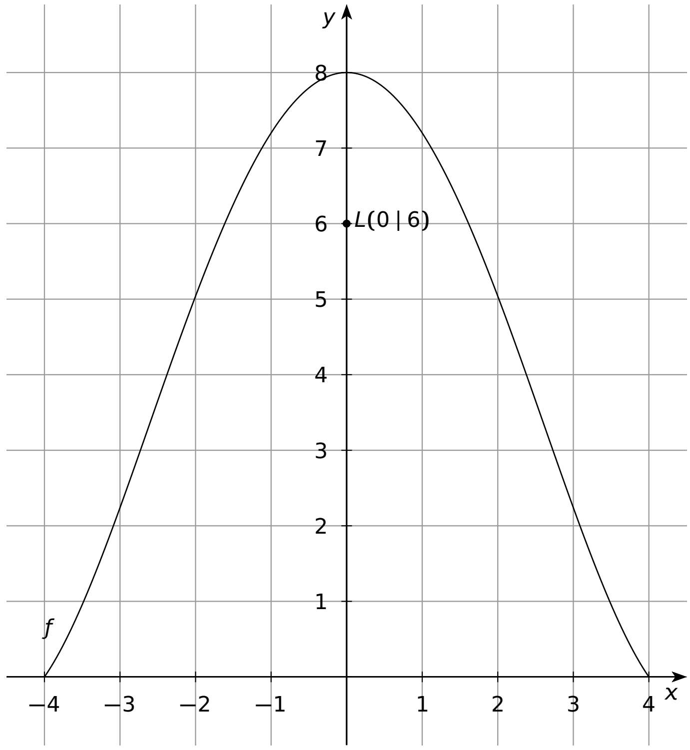
2. Teilfläche A_2
Die zweite Teilfläche ist ein Rechteck. Das heißt, du kannst deren Inhalt ohne Integral berechnen. Den Flächeninhalt eines Rechtecks kannst du mit der Formel $A = a \cdot b$ berechnen, wobei a die Länge des Rechtecks und b die Breite des Rechtecks ist.
Schaust du dir noch einmal die Skizze oben an, kannst du sehen, dass die Länge der rechteckigen Fläche A_2 der Betrag der x-Koordinate von S_1 und die Breite der rechteckigen Fläche A_2 der Betrag der y-Koordinate von S_1 ist. Damit ergibt sich:
$A_2 = |-3,2| \cdot |1,7| = 5,440$
Den gesamten Flächeninhalt A berechnest du dann, indem du die Flächeninhalte der beiden Teilflächen addierst und anschließend verdoppelst, da du ja nur den Inhalt der Fläche links der y-Achse berechnet hast:
$A = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot (0,617 + 5,440) = 2 \cdot 6,057 = 12,114$
Der Flächeninhalt der Fläche A des Querschnitts des Wassers beträgt $12,114$ FE.

3. Schritt: Volumen berechnen

Wie oben schon erwähnt, berechnet sich das Volumen durch „Grundfläche mal Höhe“. Um das Volumen des Wassers zu berechnen, musst du also nur noch den berechneten Flächeninhalt mit der Länge des Tunnels multiplizieren: $V = A \cdot 50 = 12,114 \cdot 50 = 605,7$
In dem Stollen befinden sich $605,7\ \text{m}^3$ Wasser.

b) ▶ **Den kleinsten Abstand berechnen** (3P)

Eine Lampe soll in 6 Metern Höhe aufgehängt werden, muss dabei aber einen Sicherheitsabstand von $1,4$ Metern zu den Wänden einhalten. Du sollst überprüfen, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.



Weil der Stollen symmetrisch ist, ist es am sinnvollsten, die Lampe in der Mitte aufzuhängen, denn dann hat die Lampe links und rechts den gleichen Abstand zur Wand. Damit ergibt sich der Punkt $L(0 \mid 6)$, an dem sich die Lampe befindet.

Um zu überprüfen, ob der Sicherheitsabstand eingehalten werden kann, berechne den geringsten Abstand, den die Lampe zu einem Punkt der Wand hat.

Um den kleinsten Abstand der Lampe zu der Wand des Stollens zu bestimmen, stelle zuerst eine Funktion auf, die den Abstand von L zu irgendeinem Punkt $(x \mid f(x))$ des Graphen beschreibt.

Den Abstand d zwischen zwei Punkten $A(a_1 \mid a_2)$ und $B(b_1 \mid b_2)$ berechnet man mit der Formel:
$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

Anschließend musst du das Minimum dieser Funktion bestimmen. Der Funktionswert dieser Funktion d entspricht dem Abstand zur Lampe. Vergleiche zum Schluss also den Funktionswert des Minimums mit dem vorgegebenen Sicherheitsabstand, um herauszufinden ob er eingehalten werden kann.

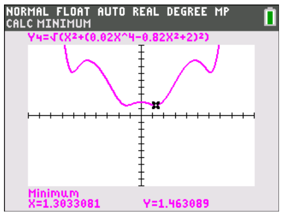
1. Schritt: Abstandsfunktion aufstellen

Setze in die Abstandsformel $(x \mid f(x))$, womit die Punkte des Graphen beschrieben werden, und die Koordinaten des Punktes L, an dem sich die Lampe befindet, ein:
$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (f(x)-6)^2} = \sqrt{x^2 + (f(x)-6)^2}$

Setze für $f(x)$ den Funktionsterm von f ein:
$d(x) = \sqrt{x^2 + (0,02x^4 - 0,82x^2 + 8 - 6)^2} = \sqrt{x^2 + (0,02x^4 - 0,82x^2 + 2)^2}$

2. Schritt: Minimum berechnen

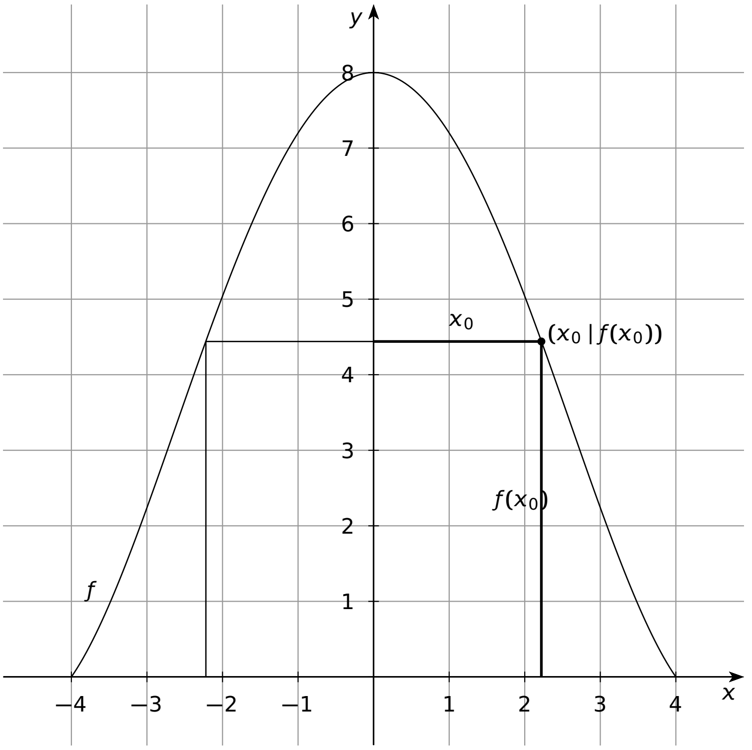
Oben hast du bereits das Minimum einer Funktion mit dem GTR bestimmt, gehe hier also wie oben vor. Du erhältst dann die beiden Ergebnisse, die innerhalb des vorgegebenen Intervalls $[-4\,;\,4]$ liegen:
$x_1 \approx -1,30$, $y_1 \approx 1,46$ und $x_2 \approx 1,30$, $y_2 \approx 1,46$.
Da die y-Koordinate den kleinsten Abstand angibt, den die Lampe von der Wand hat, kann der Sicherheitsabstand eingehalten werden.



Die Lampe hat den kleinsten Abstand zur Wand mit $1,4631$ Metern, dies ist größer als $1,4$ Meter. Also kann der Sicherheitsabstand eingehalten werden.

c) ▶ **Maximale Breite des Würfels berechnen** (3P)

Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Du sollst nun berechnen, wie breit der Behälter höchstens sein darf. Der Querschnitt eines Würfels ist ein Quadrat. Den Querschnitt des Behälters kannst du in der Skizze sehen. In einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang. In der Skizze kannst du sehen, dass die waagerechten Seiten des Würfels $x + x = 2x$ lang sind. Demnach müssen auch die senkrechten Seiten des Würfels $2x$ lang sein. Damit weißt du, dass für den rechten oberen Eckpunkt der vorderen Seitenfläche des Würfels, der an die Stollenwand stößt, gelten muss: $f(x_0) = 2 \cdot x_0$.



Löse die Gleichung nach x_0 auf und erhalte so die x-Koordinaten des oberen rechten Eckpunkts des Würfels. Der Betrag der x-Koordinate ist dann die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.

Gleichung lösen

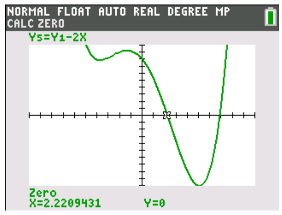
Du hast die Gleichung $f(x_0) = 2x_0$ gegeben, die für die Punkte gelten muss, an denen der Würfel die Stollenwände berührt. Berechne die Lösung der Gleichung $f(x_0) = 2x_0$, um den x-Wert des Punktes zu berechnen, an dem der Würfel gegen die Wand stößt, also dem Punkt bis zu dem der Würfel maximal reichen darf.

Du kannst die Gleichung so umformen, dass sie die Form einer Polynomgleichung hat, die du dann mit dem GTR lösen kannst:

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= 2\cdot x_0 \\
0,02\cdot x_0^4 - 0,82\cdot x_0^2 + 8 &= 2\cdot x_0 \qquad \mid -2\cdot x_0 \\
0,02\cdot x_0^4 - 0,82\cdot x_0^2 + 8 - 2\cdot x_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kannst du nun mit dem GTR lösen, indem du die Nullstellen der Funktion w mit $w(x) = 0,02\cdot x^4 - 0,82\cdot x^2 + 8 - 2\cdot x$ berechnest. Diese entsprechen dann genau den Lösungen der Gleichung $0,02\cdot x^4 - 0,82\cdot x^2 + 8 - 2\cdot x = 0$.

Gib dazu den Funktionsterm von $w(x)$ ein und zeichne den zugehörigen Graphen. Du kannst dann die Nullstellen mit `2ND → TRACE(CALC) 2: zero` bestimmen.
Der GTR liefert dir das einzige Ergebnis innerhalb des vorgegebenen Intervalls mit: $x \approx 2,22$
Dies ist nun, die Hälfte der maximalen Breite des Würfels.



Es gilt : Max. Breite des Würfels $= 2\cdot 2,22 = 4,44$

Der Behälter darf maximal $4,44$ Meter breit sein, damit er in den Stollen passt.

Aufgabe A 1.2 (3P)

▶ Wert von t berechnen für den f_t mehr als nur eine Nullstelle hat

Du hast für jedes $t \neq 0$ die Funktion f_t gegeben mit $f_t(x) = (x-1)\cdot(1-\frac{1}{t}\cdot e^x)$.

Du sollst den Wert von t berechnen, für den f_t mehr als eine Nullstelle hat.

Berechne dazu die Nullstellen in Abhängigkeit von t. Falls du dort mehr als ein Ergebnis erhältst, berechne dann die Werte von t für die gegebenenfalls Nullstellen wegfallen, um auszuschließen für welche Werte von t f_t nur eine Nullstelle besitzt.

1. Schritt: Nullstellen in Abhängigkeit von t berechnen

Du suchst die Nullstellen von f_t. Das bedeutet du suchst die Lösungen der Gleichung
$f_t(x) = (x-1)\cdot(1-\frac{1}{t}\cdot e^x) = 0$
Du kannst sehen, dass der Funktionsterm ein Produkt zweier Terme ist. Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Du hast demnach zwei Gleichungen zu lösen:

- $0 = x-1$
- $0 = (1-\frac{1}{t}\cdot e^x)$

Löse also nun die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 &= (x-1) \qquad \mid +1 \\
1 &= x
\end{aligned}
$$

Damit hat jede Funktion f_t eine Nullstelle bei $x = 1$. Berechne nun mögliche weitere Nullstellen mit Hilfe der zweiten Gleichung:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(1-\tfrac{1}{t}\cdot e^x\right) && \mid +\tfrac{1}{t}\cdot e^x \\
\tfrac{1}{t}\cdot e^x &= 1 && \mid \cdot t \\
e^x &= t && \mid \ln() \\
x &= \ln(t)
\end{aligned}
$$

Du kennst nun die beiden Nullstellen von f_t mit:

$x_1 = \ln(t)$, was allerdings nur sein kann, wenn $t > 0$ gilt, da ln nur für positive Werte definiert ist

$x_2 = 1$

Die Funktion hat genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn die erste und die zweite Nullstelle unterschiedlich voneinander sind.

Da die erste Nullstelle noch von t abhängt, könnte sie für einen Wert von t gleich der ersten Nullstelle sein. Zudem weißt du, dass die erste Nullstelle sowieso nur für positive t existiert, da in ln nur positive Werte eingesetzt werden dürfen. Überprüfe jetzt, ob es vielleicht noch Werte von t geben könnte, für die die erste Nullstelle gleich der zweiten wäre, indem du beide gleichsetzt. So untersuchst du, für welche Werte von t es nur eine Nullstelle gibt.

$$
\begin{aligned}
1 &= \ln(t) && e^x \text{ ist die Umkehrfunktion von } \ln(x) \\
e^1 &= e^{\ln(t)} \\
e &= t
\end{aligned}
$$

Damit weißt du nun, dass es nur einen positiven Wert von t gibt, für den die beiden Nullstellen zusammenfallen, nämlich $t = e$ und, dass die erste Nullstelle nur für positive t existiert.

Also hat f_t genau dann, mehr als eine Nullstelle, wenn gilt: $t \neq e$ und $t > 0$.

f_t besitzt für alle positiven $t \neq e$ mehr als nur eine Nullstelle.

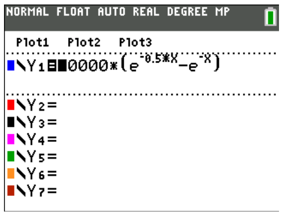
Wahlteil Aufgabe A 2

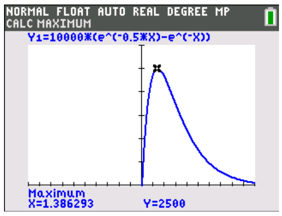
Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit
$r(t) = 10.000 \cdot (e^{-0,5 \cdot t} - e^{-t})$; $0 \leq t \leq 12$
beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) ▸ **Maximale momentane Zuflussrate bestimmen** (4P)

Du sollst die maximale momentane Zuflussrate in der Regentonne bestimmen. Das Wort „maximal“zeigt dir, dass du hier ein **Maximum** bestimmen sollst. Es geht um das Maximum der momentanen Zuflussrate. Die momentane Zuflussrate wird durch die Funktion r beschrieben.
Das bedeutet, du sollst das Maximum der Funktion r berechnen.
Dies kannst du mit deinem GTR tun. Gib dazu den Funktionsterm von r im Y=-Menü ein und zeichne den zugehörigen Graph. Das Maximum kannst du nun unter `2ND → TRACE(CALC) → 4: maximum` bestimmen.
Der GTR liefert dir das Ergebnis:
$x \approx 1,39$, $y = 2.500$
Die maximale momentane Zuflussrate beträgt 2.500 Liter pro Stunde.



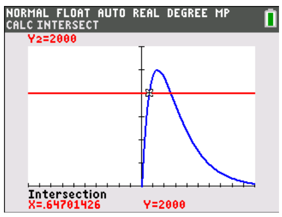


▸ **Zeitraum bestimmen, in dem die momentane Zuflussrate größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist**

Du sollst den Zeitraum angeben, in dem die momentane Zuflussrate größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist. Die momentane Zuflussrate wird durch die Funktion r beschrieben.

Dazu musst du die Stellen berechnen, an denen die momentane Zuflussrate 2.000 ℓ pro Stunde beträgt, und dann überprüfen, ob die momentane Zuflussrate zwischen diesen Stellen größer als 2.000 ℓ pro Stunde ist. Das bedeutet, du musst die Stellen von r berechnen, an denen der Funktionswert 2.000 beträgt und anschließend überprüfen, ob r im Intervall zwischen diesen Stellen oberhalb oder unterhalb von 2.000 verläuft. Berechne dazu die Schnittpunkte des Graphen von r mit dem Graphen der Geraden $y = 2.000$.

Die Stellen mit $r(t) = 2.000$ kannst du mit dem GTR berechnen. Zeichne dazu die beiden Graphen der beiden Funktionen. Anschließend kannst du unter `2ND → TRACE(CALC) → 5: intersect` die Schnittpunkte der Graphen bestimmen. Der GTR liefert dir dann die Ergebnisse, die innerhalb des vorgegebenen Intervalls liegen:
$x_1 \approx 0,65$ und $x_2 \approx 2,57$



Anhand des Graphen kannst du auch erkennen, dass in diesem Intervall der Graph über 2.000 liegt. Du hast also das richtige Intervall gefunden.

Rechne jetzt noch die t-Werte in Zeitangaben um, also in Stunden und Minuten. Die Zahl vor dem Komma gibt die Stunden an, die kannst du einfach ablesen. Für die Minuten ergeben sich:

$0,647 \cdot 60 = 38,82$; $\quad (2,572 - 2) \cdot 60 = 34,32$

Die Zuflussrate ist also von etwa 39 Minuten ($t \approx 0,647$) bis ungefähr 2 Stunden und 34 Minuten ($t \approx 2,572$) nach Regenbeginn größer als 2.000 ℓ pro Stunde.

▶ Zeitpunkt berechnen, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt

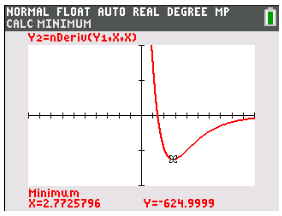
Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt. Der Graph von r beschreibt die momentane Zuflussrate. Die erste Ableitung von r beschreibt die Steigung von r. Die Steigung kannst du auch als momentane Änderungsrate auffassen. r' beschreibt also die Änderung der Zuflussrate.

In der Aufgabe ist nach dem Zeitpunkt gefragt, zu dem die Zuflussrate **am stärksten abnimmt**. Du suchst also ein Minimum der ersten Ableitung r' von r.

Bilde dazu zu erst die erste Ableitung r' der Funktion r mit dem GTR und bestimme anschließend ihr Minimum.

Die erste Ableitung r' von r kannst du im Y=-Menü bestimmen. Den Befehl für Ableitungen findest du unter `MATH → 8: nDeriv(`. Gib in die Klammer Y1 für die ursprüngliche Funktion r ein. Wähle dazu Y1 unter `VARS → Y-VARS → Function` aus. Zeichne anschließend den Graphen der ersten Ableitung r' von r.

Ein Minimum bestimmst du unter
`2ND → TRACE(CALC) → 3: minimum`.
Der GTR liefert dir das Ergebnis: $x \approx 2,773$, $y = -625$
Rechne den x-Wert nun noch in den Zeitpunkt nach Regenbeginn um, da in der Aufgabenstellung nach dem Zeitpunkt gefragt ist:



Die Zahl vor dem Komma gibt die Stunden nach Regenbeginn an, du brauchst also nur noch die Nachkommastellen in Minuten umzurechnen.

$0,77259 \cdot 60 \approx 46$ min.

Die momentane Zuflussrate nimmt ca. 2 Stunden und 46 Minuten ($t \approx 2,773$) nach Regenbeginn am stärksten ab.

b) ▶ Volumen des Wassers berechnen (3P)

Du sollst berechnen, wie viel Wasser sich drei Stunden nach Regenbeginn im Wassertank befindet.

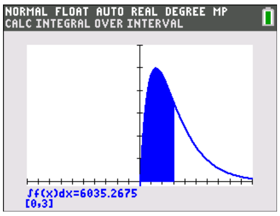
Die Funktion r beschreibt, wie viel Wasser zu jedem Zeitpunkt zuläuft. Die Menge des Wassers ist die Summe von allen Zeitpunkten des zugelaufenen Wassers. Du müsstest also alle y-Werte bis zum gesuchten Zeitpunkt zusammenrechnen. Diese Summe der y-Werte ist zugleich der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der t-Achse bis zum gegebenen t-Wert.

Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von r und der t-Achse berechnest du hier über ein Integral.

Gesucht ist hier das Integral über r in den Grenzen $a = 0$ und $b = 3$, da du das gesamte Wasser berechnen möchtest, das sich seit dem Beginn des Regens bis drei Stunden danach im Tank gesammelt hat. Es ergibt sich das Integral :

$$\int_0^3 r(t)\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral kannst du mit dem GTR berechnen.
Lass dir dazu wieder den Graphen von r anzeigen. Unter $\boxed{\text{2ND} \rightarrow \text{TRACE(CALC)} \rightarrow 7}$ kannst du den Wert des Integrals berechnen. Gib dort zuerst die untere ($a = 0$) und anschließend die obere ($b = 3$) Grenze des Integrals ein und bestätige mit ENTER.



Der GTR liefert dir dann das Ergebnis:

$$\int_0^3 r(t)\mathrm{d}t \approx 6.035,3$$

Drei Stunden nach Regenbeginn befinden sich ca. $6.035,3\,\ell$ Wasser im Tank.

▸ Zeitpunkt berechnen, zu dem sich 5.000 ℓ Wasser im Tank befinden

Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem sich $5.000\,\ell$ Wasser im Tank befinden.

Aus dem vorigen Aufgabenteil, weißt du, dass du den Inhalt des Tanks mit Hilfe des Integrals über r in den Grenzen $t = 0$ bis $t = b$ berechnen kannst, wobei b der Zeitpunkt ist, von dem du wissen möchtest, wie viel Wasser sich gerade in dem Tank befindet.

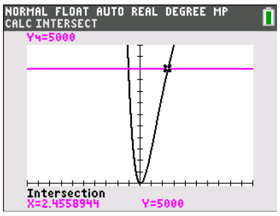
Dieses Mal suchst du nicht den Wert des Integrals sondern die obere Grenze und hast den Wert bereits vorgegeben, nämlich 5.000. Statt des $t = 3$ von eben wählst du b als obere Grenze des Integrals und setzt das Integral gleich 5.000, Damit ergibt sich die Gleichung:

$$\int_0^b r(t)\mathrm{d}t = 5.000$$

Setze dort nun den Funktionsterm von r ein und löse das Integral auf. Anschließend kannst du die Gleichung mit dem GTR lösen:

$$\begin{aligned}
5.000 &= \int_0^b r(t)\mathrm{d}t && \text{einsetzen}\\
&= \int_0^b 10.000\cdot\left(\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t && \text{Faktor vor das Integral ziehen}\\
&= 10.000\cdot\int_0^b \left(\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t && \text{Stammfunktion bilden}\\
&= 10.000\cdot\left[-2\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}+\mathrm{e}^{-t}\right]_0^b && \text{Grenzen einsetzen}\\
&= 10.000\cdot\left(-2\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+\mathrm{e}^{-b}-\left(-2\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot 0}+\mathrm{e}^{-0}\right)\right) && \text{zusammenfassen}\\
&= 10.000\cdot\left(-2\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot b}+\mathrm{e}^{-b}+1\right)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du nun mit dem GTR lösen. Gib dazu den rechten Teil der Gleichung als Funktionsterm ein und suche den x-Wert für den $y = 5.000$ gilt. Gehe dabei vor wie oben.



Der GTR liefert dir dann das Ergebnis, das im vorgegebenen Intervall liegt:
$x \approx 2,456$

Das musst du nun wieder in den Zeitpunkt nach Regenbeginn umrechnen, da in der Aufgabenstellung nach dem Zeitpunkt gefragt ist:

Die Zahl vor dem Komma gibt wieder die Stunden an. Rechne also noch die Nachkommastellen in Minuten um.

$0,45589 \cdot 60 \approx 27$

Ungefähr 2 Stunden und 27 Minuten ($t \approx 2,456$) nach Regenbeginn befinden sich $5.000\,\ell$ Wasser im Tank.

c) ▶ **Volumen des Wassers berechnen** (4P)

Du sollst berechnen, wie viel Wasser in den ersten zwölf Stunden nach Regenbeginn entnommen wird. In den ersten drei Stunden wird laut Aufgabenstellung noch kein Wasser entnommen. Du musst also nur berechnen, wie viel Wasser in den neun Stunden nach Beginn der Entnahme entnommen wird.

Die neue Funktion w besteht aus der alten Funktion r von der 400 abgezogen wird. Es gilt also $w(t) = r(t) - 400$. Das bedeutet, dass die momentane Zuflussrate, die durch den Regen zustande kommt, um $400\,\ell$ pro Stunde reduziert wird. Es werden also jede Stunde $400\,\ell$ aus dem Tank entnommen.

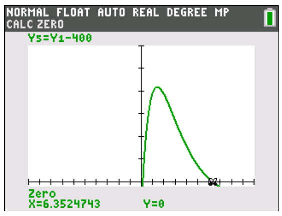
Damit ergibt sich für die 9 Stunden nach Beginn der Entnahme:

$9\text{ h} \cdot 400\frac{l}{h} = 3.600\,\ell$

In den ersten zwölf Stunden nach Regenbeginn werden $3.600\,\ell$ Wasser entnommen.

▶ **Zeitpunkt berechnen, ab dem die Wassermenge im Tank abnimmt**

Du sollst den Zeitpunkt berechnen, zu dem die Wassermenge im Tank beginnt abzunehmen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zuflussrate negativ wird. Die Zuflussrate wird für $t \geq 3$ durch die Funktion w beschrieben. Die Wassermenge im Tank nimmt also ab, wenn die Funktion w negative Funktionswerte hat. Also suchst du den Wert von t, für den der Graph von w vom Positiven ins Negative wechselt. Dies ist bei einer Nullstelle von w der Fall. Das bedeutet, du suchst die erste Nullstelle der Funktion w.



Nullstellen kannst du mit dem GTR bestimmen. Gib dazu wieder den Funktionsterm von w ein und lass dir den Graph von w anzeigen. Nullstellen kannst du nun unter `2ND → TRACE(CALC) → 2: zero` bestimmen. Du betrachtest hier nur das Intervall $3 \leq t \leq 12$.

In diesem Intervall liefert dir der GTR die Lösung:

$x \approx 6,352$.

Nun musst du den t-Wert wieder in einen Zeitpunkt nach Regenbeginn umrechnen, indem du die Zahl vor dem Komma als Anzahl der Stunden nach Regenbeginn abliest und nun noch die Nachkommastellen in Minuten umrechnest:

$0,35247 \cdot 60 \approx 21$

Ungefähr 6 Stunden und 21 Minuten ($t \approx 6,352$) nach Regenbeginn beginnt die Wassermenge im Tank abzunehmen.

▶ **Maximale Wassermenge im Tank bestimmen**

Du sollst die maximale Menge Wasser berechnen, die sich im Tank befindet.

Du weißt bereits, dass du die Wassermenge im Tank über ein Integral berechnest. Für das Integral brauchst du Grenzen, nämlich den Beginn des Regens bei $t = 0$ und den Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet. Du benötigst also zuerst den Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet, um dann die Wassermenge berechnen zu können.

1. Schritt: Zeitpunkt mit der größten Wassermenge berechnen

Der Zeitpunkt, zu dem sich am meisten Wasser im Tank befindet, ist der Zeitpunkt, bevor die Menge des Wassers im Tank beginnt abzunehmen, weil bis zu diesem Zeitpunkt immer mehr Wasser in den Tank geflossen ist, als wieder entnommen wurde.

Diesen Zeitpunkt hast du eben berechnet, er liegt bei $t = 6,35247$.

2. Schritt: Maximale Menge des Wassers berechnen

Du hast bereits berechnet, dass sich nach drei Stunden $6.035,3\,\ell$ Wasser im Tank befinden. Nun musst du noch berechnen, wie viel nach den ersten drei Stunden dazugekommen ist. Ab $t = 3$ wird die momentane Zuflussrate durch die Funktion w beschrieben.

Du brauchst also noch das Integral über w in den Grenzen $t = 3$ und $t = 6,35247$.

Dieses kannst du wieder wie zuvor mit dem GTR berechnen. Mit dem GTR ergibt sich für die gesamte maximale Wassermenge im Tank:

$$6.035,3 + \int_3^{6,35} w(t)\mathrm{d}t \approx 7.842$$

Die maximale Wassermenge im Tank beträgt $7.842\,\ell$.

Aufgabe A 2.2 (4P)

▶ Flächeninhalt berechnen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$.

Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.

Du sollst den Flächeninhalt A exakt berechnen, den Wert also nicht runden.

Den Flächeninhalt, den ein Graph mit der x-Achse einschließt, wird immer mit einem Integral berechnet. Dazu brauchst du die Grenzen des Integrals. Das sind die Nullstellen der Funktion f im angegebenen Intervall. Berechne also zuerst die Nullstellen, und stelle anschließend das Integral auf und berechne es.

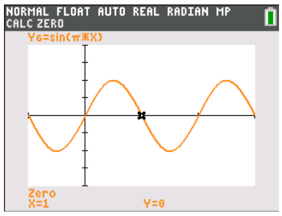
1. Schritt: Nullstellen berechnen

Du kannst die Nullstellen mit dem GTR berechnen, falls du dir nicht mehr sicher bist, wie die Nullstellen von $\sin(x)$ lauten.

▶▶ Lösungsweg A: Nullstellen erschließen

Du weißt, dass $\sin(x)$ bei $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2 \cdot \pi$ usw. den Wert 0 annimmt. Damit weißt du, dass $\sin(\pi \cdot x)$ genau bei den x-Werten Null wird, für die der Inhalt der Klammer bei $\sin(\pi \cdot x)$ Null oder ein Vielfaches von π ist. In dem vorgegebenen Intervall ist dies für $x = 0$ und $x = 1$ der Fall.

▶▶ Lösungsweg B: GTR



Du kannst die Nullstellen wie zuvor mit dem GTR berechnen. Dazu musst du das Winkelmaß des GTR auf Radian umstellen. Anschließend erhältst du die Ergebnisse : $x = 0$ und $x = 1$. Demnach hat f Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$.

2. Schritt: Integral aufstellen und berechnen

Du hast nun die Grenzen des Integrals, und die Funktion über der das Integral berechnet werden soll. Damit kannst du das Integral aufstellen:

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
A &= \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^1 \sin(\pi\cdot x)\mathrm{d}x\right| && \text{eine Stammfunktion von } \sin(x) \text{ ist } -\cos(x)\text{. Es handelt sich um eine verkettete Fun} \\
&= \left|\left[-\tfrac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi\cdot x)\right]_0^1\right| && \text{Grenzen einsetzen} \\
&= \left|-\tfrac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi) - \left(-\tfrac{1}{\pi}\cdot\cos(0)\right)\right| && \cos(\pi) = -1; \cos(0) = 1 \\
&= \left|-\tfrac{1}{\pi}\cdot(-1) + \tfrac{1}{\pi}\cdot(1)\right| \\
&= \tfrac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A beträgt exakt $\frac{2}{\pi}$ Flächeneinheiten.

▶ Funktionsgleichung aufstellen

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.

Du sollst nun eine Funktionsgleichung von g ermitteln.

Du besitzt folgende Informationen über g:

- Du weißt, dass g den Grad 2 haben soll, der höchste Exponent im Funktionsterm ist also 2. Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades hat im Allgemeinen den Funktionsterm $g(x) = ax^2 + bx + c$.
- g besitzt die beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$. Das bedeutet, dass $g(0) = 0$ und $g(1) = 0$ gilt.
- Der Inhalt A_2 der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, ist halb so groß wie A.

Setzt du diese Informationen nach und nach in die allgemeine Funktionsgleichung ein, erhältst du drei Gleichungen, mit deren Hilfe du dann a, b und c berechnen kannst.

Dies kannst du mit dem GTR oder handschriftlich tun.

▶▶ Lösungsweg A: GTR

Es gilt: $g(x) = ax^2 + bx + c$. Setzt du $g(0) = 0$, so erhältst du die Gleichung:

I) $0 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c$.

Setze ebenfalls $g(1) = 0$ ein und erhalte die Gleichung:

II) $0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$.

Du kennst bereits den Inhalt der Fläche A. Mit $A = \frac{2}{\pi}$ ergibt sich für A_2: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{\pi}$.

Den Flächeninhalt A_2 kannst du mit einem Integral über der Funktion g ausdrücken, es hat die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, da diese die Nullstellen von g sind. Den Wert des Integrals kennst du bereits, das bedeutet du erhältst die folgende Gleichung:

III) $\frac{1}{\pi} = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x$.

Löse nun noch das Integral auf, indem du eine Stammfunktionen bildest und die Grenzen einsetzt:

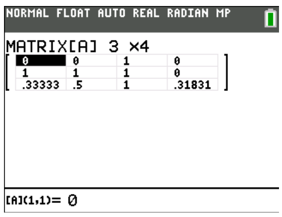
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} &= \int_0^1 (ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + c \cdot x\right]_0^1 && \text{Grenzen einsetzen} \\
&= \frac{1}{3} \cdot a \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 1^2 + c \cdot 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot a \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \cdot 0\right) && \text{vereinfachen} \\
&= \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + c
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für III) $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + c$.

Nun hast du ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Variablen gegeben:

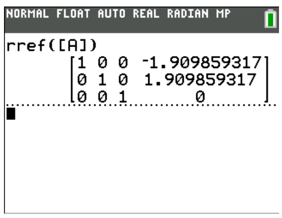
$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 0 & = & 0a + 0b + 1c \\
\text{II} & 0 & = & 1a + 1b + 1c \\
\text{III} & \frac{1}{\pi} & = & \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + 1c
\end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich als **Matrix** in den GTR eingeben:



Wechsle mit $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow x^{-1}\ \texttt{(MATRIX)} \rightarrow \texttt{EDIT}}$ ins Matrix-Menü und wähle eine 3x4-Matrix aus, in die du die Koeffizienten einsetzt.

Verlasse das Matrix-Menü und gib über $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow x^{-1}\ \texttt{(MATRIX)} \rightarrow \texttt{Math}}$ den Befehl `rref` ein. Setze die Matrix mit $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow x^{-1}\ \texttt{(MATRIX)} \rightarrow \texttt{ENTER}}$ ein.



Du erhältst dann das Ergebnis:

$a \approx -1,191$

$b \approx 1,191$

$c \approx 0$

Damit lautet die Funktionsgleichung von g: $g(x) = -1,91 \cdot x^2 + 1,91 \cdot x$

▶▶ Lösungsweg B: Handschriftlich

Setzt du $g(0) = 0$ in $g(x)$ ein, erhältst du die Gleichung:

$$\begin{aligned}
a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= 0 && \text{vereinfachen} \\
c &= 0
\end{aligned}$$

Nun weißt du, dass $c = 0$ gilt. Setzt du nun noch $g(1) = 0$ in die Funktionsgleichung ein, erhältst du die Gleichung:

$$\begin{aligned}
a \cdot 1^2 + b \cdot 1 &= 0 && \mid -a \\
b &= -a
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für g nun die Funktionsgleichung $g(x) = ax^2 - ax$.

Nun weißt du zusätzlich, dass der Inhalt A_2 der Fläche, die der Graph von g mit der x-Achse einschließt, halb so groß wie A ist. Mit $A = \frac{2}{\pi}$ ergibt sich für A_2: $A_2 = \frac{1}{\pi}$.

Die Fläche A_2 kannst du mit einem Integral über der Funktion g ausdrücken, es hat die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, da diese die Nullstellen von g sind. Den Wert des Integrals kennst du bereits, das bedeutet mit der folgenden Gleichung kannst du a berechnen:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{\pi} &= \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x && g(x) = ax^2 - ax \\
&= \int_0^1 \left(ax^2 - ax\right)\mathrm{d}x && \text{Faktor } a \text{ ausklammern und vor das Integral ziehen} \\
&= a \cdot \int_0^1 \left(x^2 - x\right)\mathrm{d}x && \text{Stammfunktion bilden} \\
&= a \cdot \left[\tfrac{1}{3} \cdot x^3 - \tfrac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^1 && \text{Einsetzen der Grenzen} \\
&= a \cdot \left[\left(\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(\tfrac{1}{3} \cdot 0^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2\right)\right] && \text{vereinfachen} \\
&= a \cdot \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= a \cdot \left(-\tfrac{1}{6}\right) \\
\tfrac{1}{\pi} &= -\tfrac{1}{6} \cdot a && \mid \cdot(-6) \\
-\tfrac{6}{\pi} &= a
\end{aligned}
$$

Nun hast du auch a berechnet und kannst es in g einsetzen.

Eine mögliche Funktionsgleichung von g lautet $g(x) = -\frac{6}{\pi} \cdot x^2 + \frac{6}{\pi} \cdot x$.

Wahlteil Aufgabe B 1

Aufgabe B 1.1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(6\,|\,0\,|\,0)$, $Q(0\,|\,6\,|\,0)$ und $R(0\,|\,0\,|\,6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$

a) ▸ **Würfel in einem Koordinatensystem darstellen** (5P)

Du sollst den Würfel mit den gegebenen Eckpunkten, gemeinsam mit der Ebene E in einem Koordinatensystem darstellen. Beginne zuerst mit dem Würfel und zeichne anschließend die Ebene ein.

Um den Würfel in einem Koordinatensystem darzustellen, kannst du so vorgehen:

- Zeichne das Koordinatensystem
- Trage die gegebenen Eckpunkte in das Koordinatensystem ein
- Ergänze die fehlenden Eckpunkte und die Kanten des Würfels

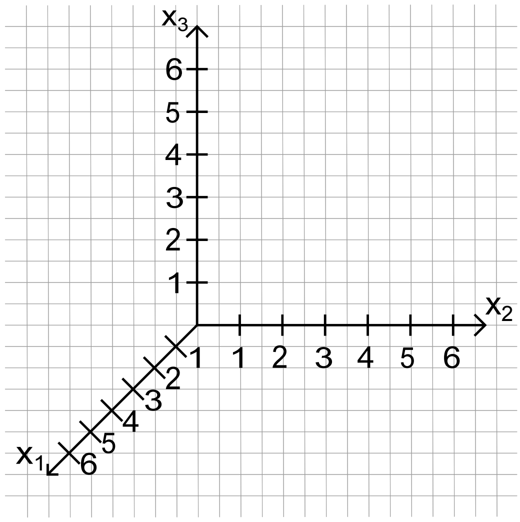
1. Schritt: Koordinatensystem zeichnen

Um den Würfel in einem Koordinatensystem darzustellen, brauchst du zuerst ein Koordinatensystem. Beginne also indem du dieses zeichnest. Du siehst, dass die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels jeweils aus drei Komponenten bestehen. Das bedeutet, es handelt sich um ein dreidimensionales Koordinatensystem.
Du brauchst also drei Achsen:

- x_1-Achse: die Achse, die nach „vorn“ bzw. „hinten“ läuft.
- x_2-Achse: die Achse, die nach „rechts“ bzw. „links“ läuft.
- x_3-Achse: die Achse, die nach „oben“ bzw. „unten“ läuft.

Nun musst du noch wissen wie lang du die Achsen zeichnen musst. An den Koordinaten der Punkte, die gegeben sind, kannst du sehen, dass es keine negativen Koordinaten gibt, du brauchst also vermutlich nicht die negativen Teile der Achsen zeichnen. Lasse trotzdem ein wenig Platz rund um das Koordinatensystem, falls du es doch noch verlängern musst.

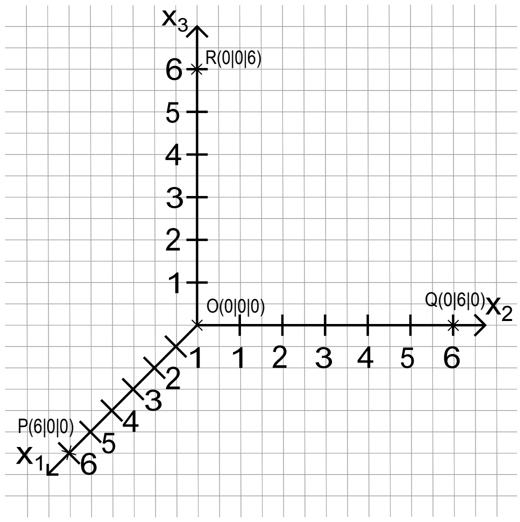
Um herauszufinden, wie lang die x_1-Achse mindestens sein muss, vergleiche die x_1-Koordinaten der Punkte miteinander, die dir gegeben sind. Die x_1-Achse muss mindestens genauso lang sein, wie die größte der x_1-Koordinaten, damit auch alle Punkte in das Koordinatesystem passen. Genauso gehst du jeweils mit der x_2-Achse und mit der x_3-Achse vor, nur eben mit den entsprechenden Koordinaten.
Vergiss nicht, die Benennung der Achsen einzutragen.
Damit ergibt sich dann zum Beispiel das Koordinatensystem, das du rechts sehen kannst.



2. Schritt: Punkte eintragen

Du hast vier Eckpunkte des Würfels gegeben: $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P(6\,|\,0\,|\,0)$, $Q(0\,|\,6\,|\,0)$ und $R(0\,|\,0\,|\,6)$.

Du hast bereits das Koordinatensystem gezeichnet. Trage dort nun die Punkte ein. Wie oben schon erwähnt, gibt die erste Koordinate an, wie viele Schritte du nach vorn, entlang der x_1-Achse, gehen musst. Demnach gibt die zweite Koordinate an, wie viele Schritte du von dort aus nach rechts gehen musst und die dritte Koordinate gibt an, wie viele Schritte du anschließend noch nach oben gehen musst. Dort trägst du dann den Punkt ein.
Es ergibt sich dann das Bild, das du rechts sehen kannst:



3. Schritt: Fehlende Punkte ergänzen

Nun hast du die Punkte im Koordinatensystem eingetragen, die gegeben sind. Da ein Würfel aber acht Eckpunkte hat, fehlen dir noch vier Punkte, um den Würfel zu zeichnen. Du musst also noch die übrigen vier Punkte ergänzen, sodass ein Würfel entsteht. In einem Würfel sind alle Kanten gleich lang, die Seitenflächen sind demnach Quadrate.

Anhand deiner bisherigen Zeichnung kannst du sehen, dass du das Dreieck, dass sich aus den Punkten R, O und Q ergibt, zu einem Quadrat ergänzen kannst, indem du den Punkt $T(0\,|\,6\,|\,6)$ ergänzt. Wenn du die Seiten des Quadrates direkt mit einzeichnest, ergibt sich Bild 1.
Genauso kannst du auch die untere Seitenfläche des Würfels finden, indem du das Dreieck, das sich aus den Punkten Q, O und P ergibt, zu einem Quadrat ergänzt. Das funktioniert nur mit dem Punkt $U(6\,|\,6\,|\,0)$. Damit ergibt sich dann Bild 2.

Bild 1

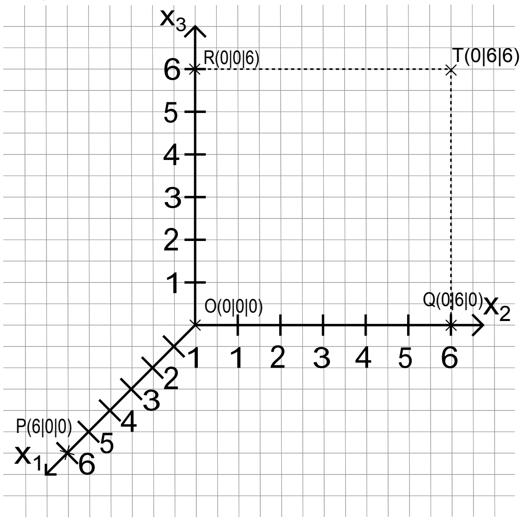
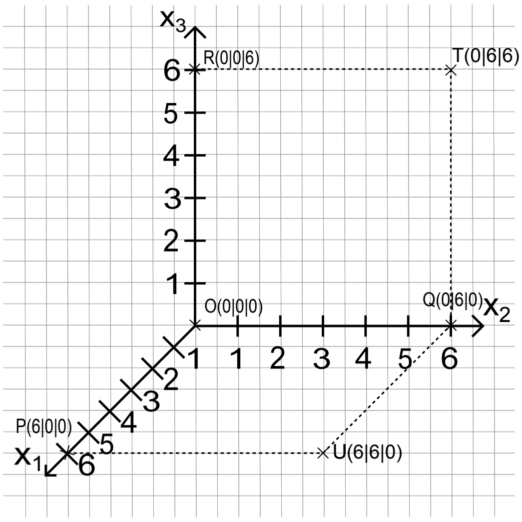


Bild 2



Genauso funktioniert das auch für die linke Seitenfläche. Du kannst das Dreieck, das sich aus den Punkten, R, O und P ergibt, zu einem Quadrat ergänzen, indem du den Punkt $V(6\,|\,0\,|\,6)$ ergänzt. Dann ergibt sich Bild 3.

Nun kannst du schon fast einen Würfel erkennen. Ein Eckpunkt fehlt dir noch: der vordere obere rechte Eckpunkt.

Diesen findest du wieder auf die gleiche Weise, wie die anderen. Du kannst hier zum Beispiel das Dreieck wählen, das sich aus den Punkten P, U und V ergibt und dieses zu einem Quadrat ergänzen. Dadurch erhältst du den Punkt $S(6\,|\,6\,|\,6)$. Die Seiten der Quadrate sind die Kanten des Würfels. Zeichnest du sie spätestens jetzt ein, hast du den Würfel in einem Koordinatensystem dargestellt (vgl. Bild 4).

Bild 3

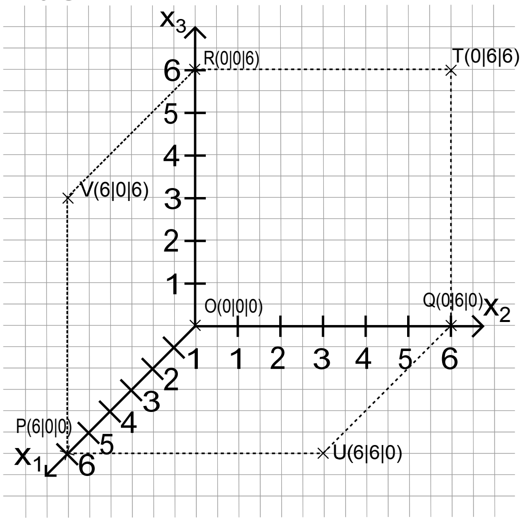
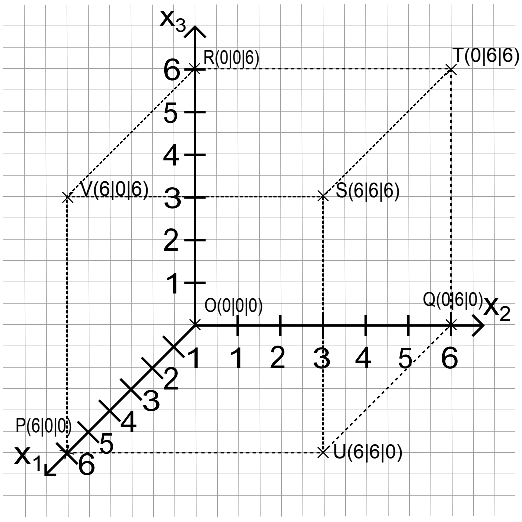


Bild 4



▶ Ebene im Koordinatensystem darstellen

Es fällt auf, dass die Ebenengleichung von E kein x_1 enthält. Die Ebenengleichung lautet anders ausgedrückt: $E: 0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 8$. Für x_1 können also beliebige Zahlen eingesetzt werden. Das bedeutet, die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse.

Nach dem du diese Parallelität kennst, benötigst du noch **zwei** Punkte, die in der Ebene liegen. Hierzu bieten sich die beiden **Spurpunkte** dieser Ebene an, d.h. die Punkte, in denen die x_2-Achse bzw. die x_3-Achse die Ebene durchstoßen.

Trage anschließend diese Punkte in das Koordinatensystem ein.

1. Schritt: Koordinaten der Punkte berechnen

Die Spurpunkte S_{x_2} und S_{x_3} haben allgemein die Koordinaten $S_{x_2}\,(0\,|\,x_2\,|\,0)$ und $S_{x_3}\,(0\,|\,0\,|\,x_3)$.

Setze die bekannten Koordinaten in die Koordinatenform der Ebenengleichung der Ebene E ein und löse nach der unbekannten Koordinate auf.

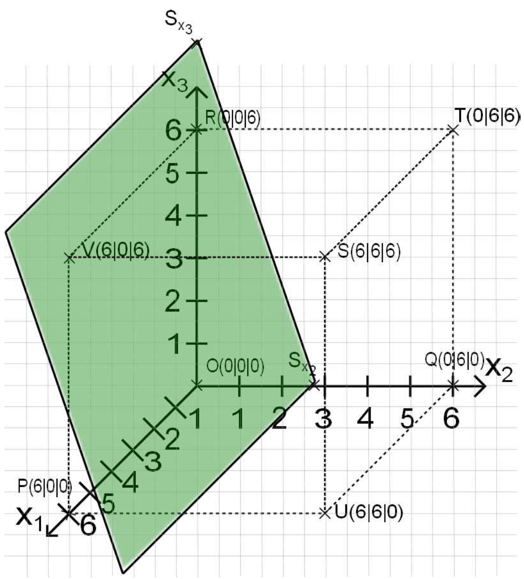
Spurpunkt S_{x_2}:
$$\begin{aligned} 3\cdot x_2+0 &= 8 \\ 3x_2 &= 8 \qquad |:3 \\ x_2 &= \tfrac{8}{3}\approx 2,67 \end{aligned}$$

Spurpunkt S_{x_3}:
$$\begin{aligned} 3\cdot 0+x_3 &= 8 \\ x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Es folgen die Spurpunkte $S_{x_2}\left(0\,|\,\frac{8}{3}\,|\,0\right)$ und $S_{x_3}\,(0\,|\,0\,|\,8)$.

2. Schritt: Punkte im Koordinatensystem eintragen

Nun kannst du die Ebene E im Koordinatensystem darstellen, indem du die beiden Spurpunkte im Koordinatensystem einträgst. Gemeinsam mit der Parallelität zur x_1-Achse kannst du die Ebene E dann zeichnen. Am besten behältst du die Übersicht, indem du die Ebene E in einer anderen Farbe zeichnest als den Würfel.
Dann ergibt sich zum Beispiel das Bild das du rechts sehen kannst.



▶ Winkel berechnen

Du sollst den Winkel α berechnen, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. Du sollst also den **Schnittwinkel** bestimmen. Dies kannst du mit Hilfe der Formel für den Schnittwinkel zweier Ebenen tun.

Die Formel lautet: $\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

$\overrightarrow{n_1}$ ist dabei der Normalenvektor der ersten Ebene, in diesem Fall der Ebene E und $\overrightarrow{n_2}$ ist der Normalenvektor der zweiten Ebene, in diesem Fall der x_1x_2-Ebene. Der Normalenvektor einer Ebene steht immer senkrecht zur jeweiligen Ebene. In der Ebenengleichung einer Ebene in Koordinatenform kannst du diesen Vektor einfach ablesen.

Die x_1x_2-Ebene ist die Ebene, die von der x_1-Achse und der x_2-Achse aufgespannt wird. Bildlich kannst du sie dir wie die Bodenfläche des Würfels, den du eben in das Koordinatensystem gezeichnet hast, vorstellen. Da jeder Punkt, der in der x_1x_2-Ebene liegt, eine x_3-Kooridnate von Null haben muss, lautet die Gleichung der x_1x_2-Ebene in Koordinatenform $E_1: x_3=0$.

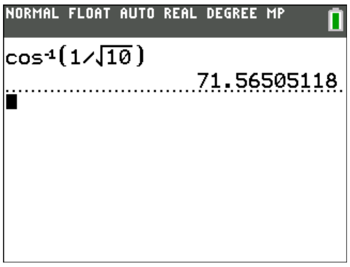
Da du nun beide Ebenengleichungen in Koordinatenform gegeben hast, kannst du die jeweiligen Normalenvektoren ablesen, um sie in die Formel einzusetzen.

Ein Normalenvektor der Ebene E lautet: $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene lautet: $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Diese kannst du nun in die Formel einsetzen:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} && \text{einsetzen} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2+3^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{10} \cdot 1} \\
\cos(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{10}} && \mid \cos^{-1} \\
\alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) && \text{GTR} \\
&= 71,6^\circ
\end{aligned}$$



Der Schnittwinkel α beträgt $71,6°$.

▶ Abstand von E zur x_1-Achse bestimmen

Du sollst den Abstand d zwischen der Ebene E und der x_1-Achse berechnen. Die x_1-Achse kannst du als Gerade auffassen. Das heißt, du sollst hier den Abstand zwischen einer Ebene und einer Gerade berechnen.

Von oben weißt du: Die Ebene E verläuft parallel zur x_1-Achse. Dies siehst du daran, dass in der Ebenengleichung von E die Koordinate x_1 nicht auftritt. Also hat jeder Punkt auf der x_1-Achse den **gleichen Abstand** von der Ebene E. Damit kannst du den Abstand von der Ebene E und der x_1-Achse berechnen, indem du einen **beliebigen** Punkte auf der x_1-Achse auswählst und dessen Abstand von der Ebene E berechnest.

Für den Abstand $d(P\,;\,E)$ eines Punkts P mit den Koordinaten $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ von einer Ebene E, deren Ebenengleichung am besten in Koordinatenform gegeben ist, gilt allgemein nach der Hesseschen Normalenform:

$$d(P\,;\,E) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Als beliebigen Punkt der x_1-Achse kannst du beispielsweise den **Ursprung** $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$ wählen:

$$\begin{aligned} d(O\,;E) &= \frac{|3\cdot 0+0-8|}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ &= \frac{|-8|}{\sqrt{9+1}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2,53 \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen der Ebene E und der x_1-Achse beträgt etwa $2,53$ LE.

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch
$E_a: 3x_2+x_3=a \qquad ; \qquad a\in\mathbb{R}$.

▸ **Lage der Ebenen zueinander untersuchen** (6P)

Du sollst untersuchen, welche Lage die Ebenen der Ebenenschar E_a zueinander haben.

Du kannst sehen, dass die Ebenen sich nur um das d unterscheiden, ihre Normalenvektoren aber alle gleich sind, denn a steht nur rechts vom Gleichheitszeichen.

Wenn zwei Ebenen den gleichen Normalenvektor haben, sind sie parallel zueinander. Damit weißt du, dass alle Ebenen der Ebenenschar parallel zueinander sind, weil alle den gleichen Normalenvektor haben.

Die Ebenen der Ebenenschar E_a sind parallel zueinander.

▸ **Werte von a berechnen, für die $S(6\,|\,6\,|\,6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat**

Du sollst die Werte von a berechnen, für die $S(6\mid 6\mid 6)$ von E_a den Abstand $\sqrt{10}$ hat. Das bedeutet, es soll gelten: $d(S\,;E)=\sqrt{10}$. Den Abstand eines Punkts von einer Ebene hast du bereits oben mit Hilfe der Hesseschen Normalenform berechnet. Diese Form kannst du auch hier wieder anwenden:

$$d(P\,;E)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Berechnet werden soll der Abstand des Punktes S mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$ von der Ebene E. b ist in diesem Fall der Parameter a. Da der Abstand $\sqrt{10}$ betragen soll, ist $d(S\,;E)=\sqrt{10}$.

Setzt du dies alles in die Abstandsformel ein erhältst du die Gleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= \frac{|3\cdot 6+6-a|}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \sqrt{10} &= \frac{|24-a|}{\sqrt{10}} && |\cdot\sqrt{10} \\ \sqrt{10}\cdot\sqrt{10} &= |24-a| && \text{vereinfachen} \\ 10 &= |24-a| \end{aligned}$$

Damit kann nun entweder gelten $10=24-a$ oder $10=-(24-a)$. Daraus ergeben sich dann die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 10 &= 24-a && |+a \\ 10+a &= 24 && |-10 \\ a &= 14 \end{aligned}$$

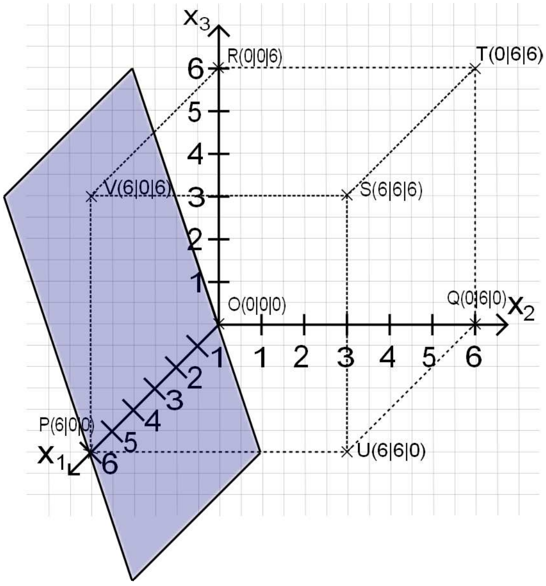
$$\begin{aligned} 10 &= -(24-a) \\ &= a-24 && |+24 \\ 34 &= a \end{aligned}$$

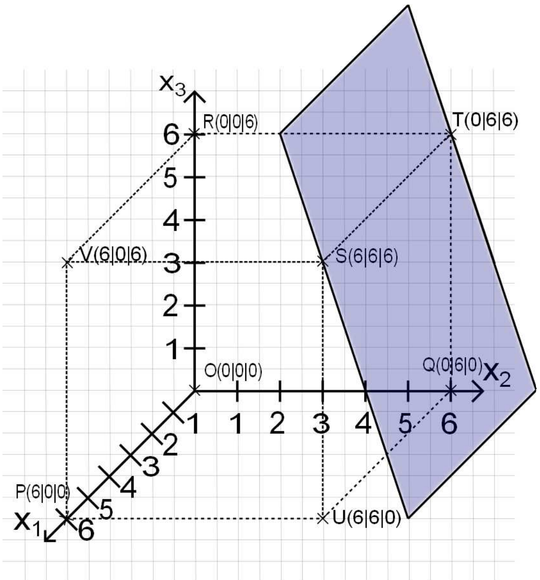
Du erhältst die Lösungen $a_1 = 14$ und $a_2 = 34$

Für $a_1 = 14$ und $a_2 = 34$ beträgt der Abstand des Punktes $S(6\,|\,6\,|\,6)$ von der Ebene E_a $\sqrt{10}$.

▸ Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat

Du sollst die Werte von a berechnen, für die die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel hat. Du weißt aus den vorigen Aufgabenteilen, dass die Ebenen E_a parallel zur x_1-Achse sind. Der Würfel steht ebenfalls parallel zur x_1-Achse. Du kannst zunächst die Werte von a berechnen, für die E_a **keine** gemeinsamen Punkte mit dem Würfel hat. Dazu kannst du die Grenzfälle betrachten. Liegt die Ebene E_a so wie in dem ersten Bild unten, hat sie nur die Punkte auf der Strecke zwischen P und Q gemeinsam mit dem Würfel. Diese Punkte liegen auch nur in diesem Fall in der Ebene E_a. Genauso funktioniert das auch, wenn man die Ebene nach oben verschiebt. Dann ist der Grenzfall, der Fall, bei dem Die Ebene nur die Punkte auf Strecke zwischen S und T mit dem Würfel gemeinsam hat. Dies kannst du auf dem zweiten Bild sehen.





Du kannst also die Werte von a berechnen, für die die Punkte P und Q in der Ebene E_a liegen. Das gleiche tust du mit den Punkten S und T. Die Ebene E_a hat dann für alle Werte von a zwischen diesen beiden Werten, gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

1. Schritt: Werte von a berechnen, für die P und Q in der Ebene E_a liegen

Um zu berechnen, wann die Punkte P und Q in der Ebene E_a liegen, brauchst du nur berechnen, wann P in der Ebene E_a liegt, da P und Q auf der x_1-Achse liegen, und E_a für alle a parallel zur x_1-Achse liegt.

Du berechnest die Werte von a, für die P in der Ebene E_a liegt, indem du eine Punktprobe durchführst. Dann hast du nur noch eine Variable in der Gleichung, nämlich a, und kannst die Gleichung nach a auflösen.

Es ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_2+x_3 &= a \qquad P(6|0|0)\\ 3\cdot 0+0 &= a\\ 0 &= a \end{aligned}$$

Damit weißt du nun, dass für $a=0$ die Punkte P und Q in der Ebene E_a liegen.

2. Schritt: Werte von a berechnen, für die S und T in der Ebene E_a liegen.

Die Werte von a, für die die Punkte S und T in der Ebene E_a liegen, berechnest du genauso, wie du es eben für P und Q getan hast. Wähle hier zum Beispiel T um dessen Koordinaten in die Ebenengleichung einzusetzen. Dann ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_2+x_3 &= a \qquad T(0|6|6)\\ 3\cdot 6+6 &= a\\ 24 &= a \end{aligned}$$

Damit weißt du nun auch, dass die Punkte S und T für $a=24$ in der Ebene E_a liegen.

Die Ebene hat genau dann gemeinsame Punkte mit dem Würfel, wenn a zwischen diesen beiden Werten liegt.

Die Ebene E_a hat für $0\leq a\leq 24$ gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

Aufgabe B 1.2 (4P)

▶ Wahrscheinlichkeit berechnen

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose. Jemand kauft drei Lose. Du sollst berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter diesen drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind.

Die Zufallsvariable X soll die Anzahl der Gewinnlose bezeichnen. Bekannt ist, dass 10 % der Lose Gewinnlose sind; über die Anzahl der Lose insgesamt wissen wir allerdings nichts. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass eine **große Menge** von Losen vorliegt und dass der Kauf drei dieser Lose an der Ausgangssituation nur wenig ändert. Jeder der drei Lose ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ein Gewinnlos.

Also kann hier näherungsweise von einem **Ziehen mit Zurücklegen** ausgegangen werden. Entsprechend kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenommen werden mit $n=3$ und $p=0,1$.

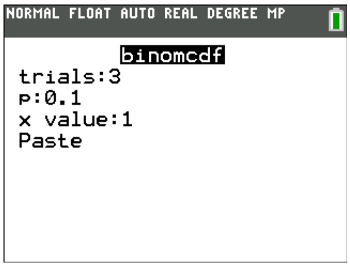
Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Lose Gewinnlose sind. Dies ist die Wahrscheinlichkeit $P(X\geq 2)$. Nutze zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit die Formel zur Binomialverteilung:

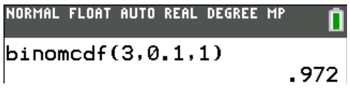
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Es gilt : $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

Das kannst du mit dem GTR berechnen. Den Befehl für die Binomialverteilung findest du unter `2ND → VARS(DISTR) → B: binomcdf` Dann erhältst du das Ergebnis: $P(X \leq 1) = 0,972$ und damit: $P(X \geq 2) = 1 - 0,972 = 0,028$.

Um das Ergebnis in Prozent umzurechnen, musst du nur das Komma um zwei Stellen nach rechts verschieben: $P(X \geq 2) = 0,028 = 2,8\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind, beträgt $2,8\,\%$.





Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind, beträgt $2,8\,\%$.

▸ Mindestanzahl der Lose berechnen

Du sollst berechnen, wie viele Lose gezogen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Gewinnlose darunter sind, größer als $50\,\%$ ist. Das bedeutet, in diesem Fall kennst du die Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Gewinnlosen $P(X \geq 2) \geq 50\,\%$. Du suchst die Anzahl der Lose, die gekauft werden müssen, damit diese Bedingung erfüllt ist. Du suchst also n, aus der obigen Formel für Binomialverteilungen. p kennst du bereits.

Du kannst die Anzahl der Lose mit dem GTR berechnen. Du weißt bereits, dass du $P(X \geq 2)$ mit dem Binomialkoeffizienten berechnest.

Es gilt: $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0))$

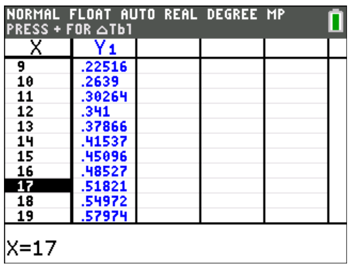
Dies kannst du nun leicht in Abhängigkeit von n mit Hilfe des Binomialkoeffizienten darstellen:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - (P(X = 1) + P(X = 0)) \\ &= 1 - \left(\binom{n}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{n-0} \right) \\ &= 1 - \left(n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1} + 0,9^n \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du nun als Funktionsterm auffassen. Gib sie im Y=-Menü deines GTR ein, und lass dir die Wertetabelle mit `2ND → GRAPH(TABLE)` anzeigen. Suche dort nun den ersten x-Wert für den $y \geq 0,5$ gilt. Damit hast du dann n, also die Mindestanzahl der Lose, gefunden.

Das Ergebnis lautet:

$n = 17$

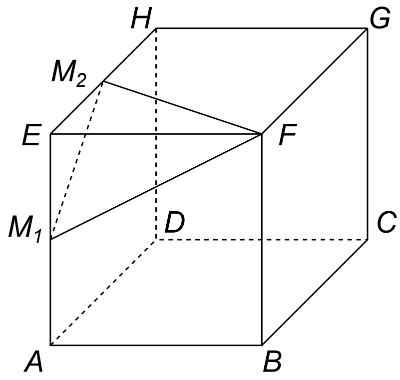


Es müssen mindestens 17 Lose gekauft werden, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Gewinnlose mindestens $50\,\%$ beträgt.

Wahlteil Aufgabe B 2

Aufgabe B 2.1

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt.
Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 8 \mid 0)$ und $H(0 \mid 0 \mid 8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



a) ▶ **Ebenengleichung bestimmen** (6P)

Du sollst eine Ebenengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt, in Koordinatenform bestimmen.

Die Koordinatenform einer Ebenengleichung sieht im Allgemeinen folgendermaßen aus:

$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = b$,

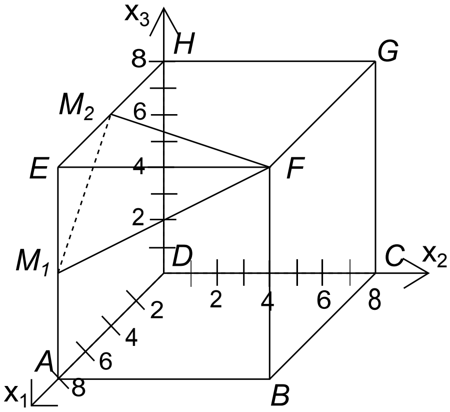
- $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene.
- b ist eine Konstante.

Der Normalenvektor einer Ebene steht immer senkrecht auf der Ebene. Um den Normalenvektor zu berechnen, benötigst du zwei Vektoren, die in der Ebene liegen. Diese kannst du mit Hilfe von drei Punkten berechnen, wenn diese ebenfalls in der Ebene liegen. Hast du erst einmal einen Normalenvektor gefunden, kannst du mit diesem b berechnen, indem du eine Punktprobe durchführst. Setze dazu einen Punkt in die Ebenengleichung von S ein, von dem du weißt, dass dieser in der betrachteten Ebene liegt. Gehe also wie folgt vor:

- Finde drei Punkte, die in der Ebene S liegen.
- Berechne einen Normalenvektor der Ebene S.
- Führe eine Punktprobe durch um die Ebenengleichung aufzustellen.

1. Schritt: Punkte bestimmen, die in der Ebene S liegen

Du kennst die Eckpunkte $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $H(0 \mid 8 \mid 0)$ und $C(0 \mid 0 \mid 8)$ des Würfels. Übertrage den Würfel zur Hilfe in ein Koordinatensystem. Wählst du den Punkt D als Ursprung des Koordinatensystems, so sollte deine Skizze wie im Schaubild rechts aussehen. Du weißt auch, dass der Eckpunkt F des Würfels, sowie die Kantenmitten M_1 und M_2 in der Ebene S liegen, da das Segeltuch in diesen Punkten befestigt ist. Berechne also die Koordinaten dieser drei Punkte, um eine Ebenengleichung von S bestimmen zu können.



Punkt F:

Du weißt, dass der Eckpunkt A des Würfels die Koordinaten $A(8 \mid 0 \mid 0)$ hat. Er liegt also auf der x_1-Achse, da jede Koordinate, abgesehen von der x_1-Koordinate, 0 ist. Der Punkt A ist demnach vom Ursprung um 8 Einheiten entlang der positiven x_1-Achse verschoben.

Du hast das Koordinatensystem so gewählt, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Eckpunkt D liegt. Du kennst damit auch dessen Koordinaten: $D(0 \mid 0 \mid 0)$.

Genauso wie der Punkt A entlang der positiven x_1-Achse verschoben ist, ist auch der Punkt $H(0 \mid 0 \mid 8)$ entlang der positiven x_3-Achse verschoben und ebenso der Punkt $C(0 \mid 8 \mid 0)$ entlang der positiven x_2-Achse.

Da in einem Würfel alle Kanten gleich lang sind, und gegenüberliegende Kanten immer parallel zueinander verlaufen, kannst du nun die Koordinaten des Punktes F berechnen.

Du weißt nun, dass die Kanten des Würfels die Länge 8 haben, weil beispielsweise A und D 8 Einheiten voneinander entfernt sind. Der Zeichnung kannst du entnehmen, dass der Punkt E mit den Punkten D,A und H ein Quadrat bilden muss, da alle Seitenflächen eines Würfels Quadrate sind. E muss von H wieder 8 Einheiten entfernt liegen, wie auch von A. Daraus folgt, wie du auch der Zeichnung entnehmen kannst, dass E vom Punkt A aus um 8 Einheiten nach oben, also entlang der positiven x_3-Achse, verschoben sein muss. Die Koordinaten für E ergeben sich damit : $E(8 \mid 0 \mid 8)$.

Anhand der Zeichnung kannst du nun erkennen, dass du vom Punkt E aus nun noch einmal 8 Einheiten entlang der positiven x_2-Achse gehen musst, um zum Punkt F zu gelangen. Du musst also den Punkt E um 8 Einheiten entlang der positiven x_2-Achse verschieben um die Koordinaten des Punktes F zu erhalten.

Die Koordinaten des Punktes F lauten also $F(8 \mid 8 \mid 8)$.

Punkt M_1

Bei Punkt M_1 gehst du ähnlich vor, wie beim Punkt E. Du weißt, dass M_1 kein Eckpunkt des Würfels ist, sondern die Kantenmitte der Kante, die die Punkte A und E verbindet. Das bedeutet insbesondere, dass M_1 auf dieser Kante liegt, und zwar genau in der Mitte zwischen den Punkten A und E. Um die Koordinaten des Punktes E zu berechnen, bist du eben von A aus 8 Einheiten entlang der x_3-Achse gegangen. Gehst du nun nur die Hälfte der Einheiten, erhältst du die Koordinaten des Punktes M_1.

Sie lauten daher $M_1(8\,|\,0\,|\,4)$.

Punkt M_2

Um die Koordinaten des Punktes M_2 zu berechnen, kannst du wieder vorgehen wie eben. Du weißt, dass M_2 die Kantenmitte der Kante $\overline{EH}$ ist. An der Zeichnung kannst du erkennen, dass du vom Punkt H aus 8 Einheiten in Richtung Ursprung gehen musst, um zum Punkt E zu gelangen. Gehst du also nur 4 Einheiten entlang der x_1-Achse in Richtung Ursprung, erhältst du die Koordinaten des Punktes M_2.

Sie lauten daher $M_2(4\,|\,0\,|\,8)$.

2. Schritt: Normalenvektor bestimmen

Du kennst nun die Koordinaten von drei Punkten, die in der Ebene liegen. Aus diesen drei Punkten kannst du nun zwei Vektoren bilden: $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$.

$$\overrightarrow{FM_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 0-8 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FM_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-8 \\ 0-8 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor kannst du über das Kreuzprodukt berechnen. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ berechnest du mit Hilfe folgender Formel:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Berechne mit Hilfe dieser Formel nun das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Diesen Vektor kannst du vereinfachen, indem du ihn durch -16 teilst. Der Vektor zeigt dann immer noch in dieselbe Richtung, es ändert sich nur die Länge.

Damit hast du einen Normalenvektor der Ebene S berechnet mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Schritt: Ebenengleichung aufstellen

Du kennst nun einen Normalenvektor der Ebene S mit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Koordinaten eines Punktes, der in der Ebene S liegt. Wähle dazu z.B. den Punkt $F(8 \mid 8 \mid 8)$. Außerdem weißt du, dass die Ebenengleichung in Koordinatenform folgende Form hat: $S: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = b$.

Setze in diese Ebenengleichung nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene S ein. Damit erhältst du dann:

$S:\; 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = b$.

Nun musst du noch b berechnen, indem du eine Punktprobe mit dem Punkt F durchführst. Setze dazu die Koordinaten des Punktes F in die Ebenengleichung ein und vereinfache so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 8 - 1 \cdot 8 + 2 \cdot 8 &= b \\ 24 &= b \end{aligned}$$

Damit kannst du nun die Ebenengleichung der Ebene S in Koordinatenform aufstellen.

Eine Gleichung der Ebene S in Koordinatenform lautet: $S:\; 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 24$.

▶ Zeigen, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat

Du sollst zeigen, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei Seiten, die die gleiche Länge besitzen.

Das Segeltuch wird durch das Dreieck FM_1M_2 mit den Eckpunkten F ,M_1 und M_2 dargestellt. Das Segeltuch hat demnach genau dann die Form eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn zwei der Seiten $\overline{FM_1}$,$\overline{FM_2}$ und $\overline{M_1M_2}$ die gleiche Länge besitzen.

Überprüfe also die Längen der Seiten $\overline{FM_1}$, $\overline{FM_2}$ und $\overline{M_1M_2}$ des Dreiecks FM_1M_2, um zu zeigen, dass es die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Die Länge der Seiten berechnest du über die Beträge der zugehörigen Vektoren.

Berechne also die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{FM_1}$, $\overrightarrow{FM_2}$ und $\overrightarrow{M_1M_2}$

Die Vektoren $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$ hast du bereits berechnet.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Beträge der Vektoren berechnest du mit Hilfe der Formel:

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Setzt du die drei Vektoren $\overrightarrow{FM_1}$, $\overrightarrow{FM_2}$ und $\overrightarrow{M_1M_2}$ nacheinander in die Formel ein, erhältst du folgendes das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}\;, \\ \left|\overrightarrow{FM_1}\right| &= \sqrt{0^2 + (-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}\;, \\ \left|\overrightarrow{FM_2}\right| &= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 0^2} = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$

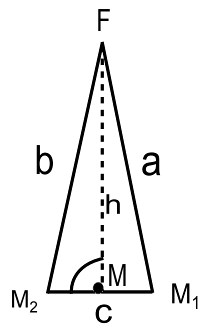
Du siehst, dass die beiden Seiten $\overline{FM_1}$ und $\overline{FM_2}$ die gleiche Länge besitzen. Somit handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

Das Segeltuch hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks.

► Flächeninhalt des Segeltuchs berechnen

Du sollst den Flächeninhalt A des Segeltuchs berechnen. Du weißt, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.

Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks kannst du mit Hilfe folgender Formel berechnen:
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$.
c bezeichnet die Grundseite des Dreiecks. h bezeichnet die Höhe des Dreiecks FM_1M_2, welche die Länge der Strecke von der Spitze des Dreiecks zur Seitenmitte von c ist.
Wir benennen die Seiten des Segeltuchs nun wie in der Abbildung rechts.



Um den Flächeninhalt A zu berechnen, musst du also zuerst die Höhe des Dreiecks berechnen.

1. Schritt: Höhe des Dreiecks berechnen

Um die Höhe des Dreiecks zu berechnen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Lösungsweg A: Du berechnest die Länge des Vektors von F zum Seitenmittelpunkt M von c.
- Lösungsweg B: Mit dem Satz des Pythagoras

►► Lösungsweg A: Mittelpunkt

Im gleichschenkligen Dreieck halbiert die Höhe die Grundfläche. Also ist der Punkt, an dem die Höhe auf die Seite c trifft, genau der Mittelpunkt dieser Seite.

Anhand der Skizze oben kannst du erkennen, dass die Höhe h des Dreiecks FM_1M_2, der Vektor $\overrightarrow{FM}$ ist. Den Punkt F kennst du bereits und über den Punkt M weißt du, dass er genau die Mitte der Seite $\overline{M_1M_2}$ ist. Den Ortsvektor des Mittelpunkts zwischen zwei Punkten P und Q berechnest du mit der Formel :
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$.
Setzt du in diese Formel M_1 und M_2 ein erhältst du:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4+8 \\ 0+0 \\ 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Mittelpunkt $M(6\,|\,0\,|\,6)$.
Berechne nun $\overrightarrow{FM}$, um über den Betrag von $\overrightarrow{FM}$ die Höhe h des Dreiecks zu berechnen:

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nun kannst du die Länge des Vektors $\overrightarrow{FM}$ und damit die Höhe h berechnen. Den Betrag des Vektors kannst du wieder mit der obigen Formel berechnen.
Du erhältst dann das Ergebnis:

$$h = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{72}$$

►► Lösungsweg B: Satz des Pythagoras

Aus dem vorherigen Teil der Aufgabe kennst du die Längen der Dreiecksseiten. Für a, b und c gilt demnach:

- $a = \left|\overline{FM_1}\right| = 4 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{80}$
- $b = \left|\overline{FM_2}\right| = 4 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{80}$
- $c = \left|\overline{M_1M_2}\right| = 4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32}$

Außerdem weißt du, dass h mit c einen rechten Winkel einschließt. Du kennst auch die Länge der Strecke von M_1 nach M, sie ist nämlich genau halb so lang wie c.
Der Satz des Pythagoras lautet in diesem Fall: $h^2 + (\frac{1}{2})^2 = a^2$.
Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (\tfrac{1}{2}c)^2 \\ \sqrt{80}^2 &= h^2 + (\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{32})^2 \\ 80 &= h^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 32 \\ &= h^2 + 8 && \mid -8 \\ 72 &= h^2 && \mid \sqrt{\ } \\ \sqrt{72} &= h \end{aligned}$$

Die Höhe beträgt demnach $h = \sqrt{72}$.

2. Schritt: Flächeninhalt berechnen

Nun hast du h berechnet, c kennst du bereits. Setze dies nun in die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks ein und berechne den Flächeninhalt:
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{72} = 24.$
Der Flächeninhalt des Segeltuchs beträgt $24\,\text{m}^2$.

► Abstand zwischen dem Segeltuch und *E* berechnen

Du sollst den Abstand d zwischen dem Segeltuch und der Ecke E berechnen. Du weißt bereits, dass das Segeltuch in der Ebene S mit der Ebenengleichung in Koordinatenform
$S: 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 24$
liegt. Du sollst also den Abstand zwischen dem Punkt E und der Ebene S berechnen.
Den Abstand zwischen einem Punkt P mit den Koordinaten $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und einer Ebene S mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ bestimmst du über die Hessesche Normalform.

$$d(P;S) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

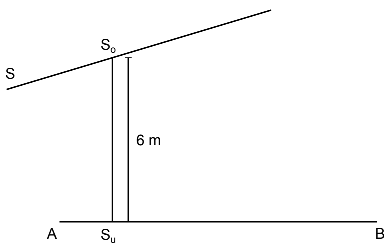
Die Koordinaten des Punktes E hast du bereits berechnet : $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} d(E\,;\,S) &= \frac{|2\cdot 8 - 1\cdot 0 + 2\cdot 8 - 24|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\ &= \frac{|16+16-24|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{|-8|}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Das Segeltuch ist $\frac{8}{3}$ Meter von der Ecke E entfernt.

b) ▶ **Schnittpunkt der Stange mit dem Segeltuch berechnen** (3P)

Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Wir wollen das untere Ende der Stange mit S_u und das obere Ende mit S_o bezeichnen. Der Punkt S_u befindet sich auf der Geraden g_{AC}. Das obere Ende der Stange, der Punkt S_o soll das Segeltuch berühren. Also liegt S_o in der Ebene S.



Die Aufgabenstellung gibt weiter vor, dass die Stange 6 m lang sein soll. Du kannst also so vorgehen:

- Stelle eine Gleichung der Geraden g_{AC} durch die Punkte A und C auf.
- Formuliere anhand dieser Geradengleichung allgemeine Koordinaten für den Punkt S_u.
- Der Punkt S_o hat die gleiche x_1- und die gleiche x_2-Koordinate wie der Punkt S_u. Die x_3-Koordinate von S_o ist um 6 größer als die von S_u. Formuliere auf diese Weise auch die allgemeinen Koordinaten von S_o.
- Zuletzt weißt du: Der Punkt S_o soll in der Ebene S liegen. Führe eine Punktprobe durch und bestimme so die genauen Koordinaten von S_o.

1. Schritt: Gleichung der Geraden durch A und C aufstellen

Wähle z.B. den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor und den Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} g_{AC}: \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 - 8 \\ 8 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Schritt: Allgemeine Koordinaten von S_u und S_o bestimmen

Der Punkt S_u, also das untere Ende der Stange, liegt auf der Geraden g_{AC}. Somit lauten seine Koordinaten allgemein:

$S_u(8+r\cdot(-8)\,|\,0+r\cdot 8\,|\,0+r\cdot 0)=S_u(8-8r\,|\,8r\,|\,0)$

Das obere Ende der Stange S_o liegt 6 m oberhalb von S_u. Also hat S_o allgemein die Koordinaten
$S_o(8-8r\,|\,8r\,|\,6)$.

3. Schritt: Punktprobe durchführen

Das obere Ende der Stange soll das Segeltuch berühren, d.h. der Punkt S_o soll in der Ebene S liegen. Setze also die Koordinaten von S_o ein in die Ebenengleichung von S und löse nach r auf.

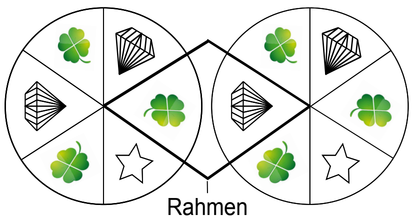
$$\begin{aligned} 2\cdot(8-8r)-(8r)+2\cdot 6 &= 24 \\ 16-16r-8r+12 &= 24 \\ 28-24r &= 24 && \mid -28 \\ -24r &= -4 && \mid :(-24) \\ r &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Damit folgen die Koordinaten der Punkte S_u und S_o mit
$S_o\left(8-8\cdot\frac{1}{6}\,|\,8\cdot\frac{1}{6}\,|\,6\right)=S_o\left(\frac{20}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,6\right)$.
Analog ergibt sich der Punkt
$S_u\left(8-8\cdot\frac{1}{6}\,|\,8\cdot\frac{1}{6}\,|\,0\right)=S_u\left(\frac{20}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,0\right)$.

Der obere Eckpunkt der Stange liegt also im Punkt $S_o\left(\frac{20}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,6\right)$ und der untere Eckpunkt im Punkt $S_u\left(\frac{20}{3}\,|\,\frac{4}{3}\,|\,0\right)$.

Aufgabe B 2.2

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.



a) ▸ **Fairness des Spiels nachweisen** (3P)

Du sollst nachweisen, dass das Spiel fair ist, unter der Annahme, dass das Rad ideal ist. Das bedeutet, jedes Feld hat tatsächlich die gleiche Wahrscheinlichkeit getroffen zu werden.

Ein Spiel ist fair, wenn der **zu erwartende Gewinn** des Spiels mit dem **Einsatz des Spielers** übereinstimmt. Dann nämlich liegt der Vorteil weder beim Spieleveranstalter noch beim Spieler. Erstelle zunächst eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, in der die möglichen Gewinne gemeinsam mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten aufgeführt sind. Berechne sodann den zu erwartenden Gewinn.

1. Schritt: Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen

Aus der Abbildung kannst du folgende Wahrscheinlichkeiten ablesen:
$P(Stern-Stern)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$
$P(Diamant-Diamant)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
$P(Kleeblatt-Kleeblatt)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

Stern-Stern	2,00 €
Diamant-Diamant	0,85 €
Kleeblatt-Kleeblatt	0,20 €

Dies kannst du nun so festhalten:

Gewinn	2,00 €	0,85 €	0,20€
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$

2. Schritt: Zu erwartenden Gewinn berechnen

Den zu erwartenden Gewinn E pro Spiel berechnest du, indem du die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem dazugehörigen Gewinn multiplizierst, und die Ergebnisse für alle Ereignisse addierst:
$E = 2 \cdot \frac{1}{36} + 0,85 \cdot \frac{1}{9} + 0,2 \cdot \frac{1}{4} = 0,2$

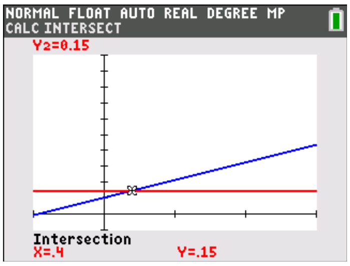
Du erkennst, dass der zu erwartende Gewinn genau 20 ct beträgt. Dies stimmt mit dem Einsatz des Spielers überein.
Demnach ist das Spiel fair.

▶ Neuen Auszahlungsbetrag berechnen

Der Veranstalter möchte nun auf lange Sicht pro Spiel 5 cent Gewinn erzielen, indem er den Auszahlungsbetrag für „Diamant-Diamant“ ändert. Du sollst nun den neuen Auszahlungsbetrag für „Diamant-Diamant“ berechnen.
Um auf lange Sicht 5 cent Gewinn pro Spiel zu erzielen, muss der Veranstalter beim Einsatz von 20 cent pro Spiel einen durchschnittlichen Gewinn von 15 cent garantieren. Du kannst also ähnlich vorgehen wie oben: Berechne den zu erwartenden Gewinn. Dieses Mal ist allerdings der Auszahlungsbetrag für „Diamant - Diamant“ unbekannt. Du kannst ihn mit d bezeichnen. Der zu erwartende Gewinn soll 15 cent betragen:

$0,15 = 2 \cdot \frac{1}{36} + x \cdot \frac{1}{9} + 0,2 \cdot \frac{1}{4}$

Diese Gleichung kannst du mit dem GTR lösen, indem du den rechten und linken Teil jeweils als eigenständigen Funktionsterm auffasst, und diese im Y=-Menü des GTR eingibst. Lässt du dir die zugrhörigen Graphen anzeigen, kannst du unter `2ND → 5: intersect` den Schnittpunkt berechnen. Das Ergebnis ist dann genau die Lösung der obigen Gleichung.
Du erhältst das Ergebnis: $x = 0,4$.



Der Auszahlungsbetrag für „Diamant-Diamant “muss auf 0,40 € geändert werden, damit der Veranstalter auf lange Sicht 5 cent Gewinn pro Spiel macht.

b) **▶ Entscheidungsregel formulieren** (3P)

Es besteht nun der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit für „Stern-Stern“geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden.

Du sollst nun die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{36}$ formulieren, wobei die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll.

Diese Nullhypothese wird **abgelehnt**, wenn besonders **selten** die Kombination „Stern - Stern“ auftritt. Der **Ablehnungsbereich** liegt also **links**, es muss also ein linksseitiger Test durchgeführt werden.

Du kannst so vorgehen:

- Führe zunächst eine Zufallsvariable X ein, welche die Anzahl der Kombination „Stern - Stern"beschreibt und überlege, wie X bei wahrer Nullhypothese verteilt ist.
- Formuliere allgemein den **Ablehnungsbereich** des Tests.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % gibt dir an: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt wird, soll höchstens 5 % betragen. Also soll die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert aus dem Ablehnungsbereich annimmt, höchstens 5 % betragen. Berechne auf dieser Grundlage die obere Grenze des Ablehnungsbereichs und formuliere dann die Entscheidungsregel.

1. Schritt: Zufallsvariable und Ablehnungsbereich definieren

Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Kombinationen „Stern - Stern“ beschreibt. Bei wahrer Nullhypothese ist X binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = \frac{1}{36}$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Kombination „Stern - Stern“ besonders selten vorkommt. Für den Ablehnungsbereich ergibt sich damit:

$A = \{0\,;1\,;\ldots\,;k\}$.

2. Schritt: k bestimmen und Entscheidungsregel formulieren

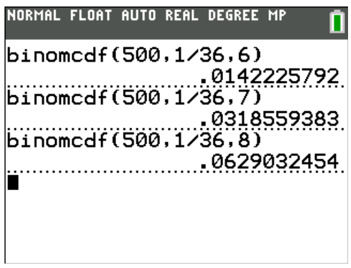
Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert aus dem Ablehnungsbereich annimmt, soll höchstens 5 % betragen. All die Werte im Ablehnungsbereich sind **kleiner oder gleich** k. Also muss gelten:

$P(X \leq k) \leq 0,05$.

Du kannst die Zahl k in deinem GTR durch **systematisches Probieren** ermitteln.

Den Befehl für „kumulierte Binomialverteilung“ findest du unter $\boxed{\texttt{2ND} \rightarrow \texttt{VARS(DISTR)} \rightarrow \texttt{B: binomcdf}}$.
Gib bei $n = 500$, $p = \frac{1}{36}$ ein. Probiere dann mit verschiedenen Werten für x aus: Du findest:

$P(X \leq 6) \approx 0,014 < 0,05$
$P(X \leq 7) \approx 0,032 < 0,05$
$P(X \leq 8) \approx 0,063 > 0,05$



Für $k = 7$ ergibt sich zuletzt eine Wahrscheinlichkeit, die höchstens 5 % ist. Also ergibt sich für den Ablehnungsbereich:

$A = \{0\,;\ldots\,;7\}$.

Für die Entscheidungsregel folgt dann:

Wenn **höchstens 7** Mal die Kombination „Stern - Stern" auftritt, so wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten wird sie nicht abgelehnt.