Pflichtteil

Aufgabe 1 (2VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=x^2\cdot\sin(3x+1)$.

Aufgabe 2 (2VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx$.

Aufgabe 3 (3VP)

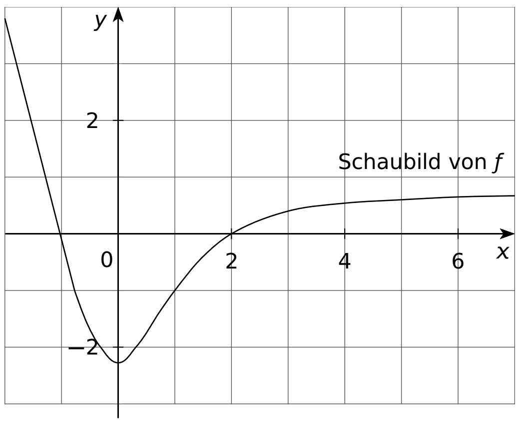
Lösen Sie die Gleichung $\left(2x^2-8\right)\cdot\left(e^{2x}-6\right)=0$.

Aufgabe 4 (4VP)

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=-x^3+3x^2-x-3$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 5 (5VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.



a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich $-2<x<7$ hinsichtlich
   - Extremstellen
   - Wendestellen
   - Nullstellen?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass $F(6)-F(2)>1$ gilt.

Aufgabe 6 (3VP)

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7

(4VP)

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 = 4$ und die Gerade

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

Aufgabe 8

(3VP)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g.
A wird an der Geraden g gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Wahlteil I

Aufgabe I 1.1

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x)=6-\frac{100}{\left(x^2-16\right)^2}$.

a) Geben Sie sämtliche Asymptoten des Schaubildes von f an. (6VP)

Geben Sie die Nullstellen von f an.

Skizzieren Sie das Schaubild von f samt Asymptoten für $-7 \leq x \leq 7$.

Weisen Sie nach, dass f genau eine Extremstelle besitzt.

Das Schaubild von f, die x-Achse und die Gerade $y=7$ begrenzen im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ eine Fläche. Diese Fläche stellt die Seitenansicht einer 14 m langen, 7 m hohen und 10 m breiten Steinbrücke dar.

b) Wie viele Kubikmeter Stein wurden für die Brücke verbaut? (4VP)

c) Unter dem Brückenbogen fährt mittig ein Zug hindurch. Sein Querschnitt kann als Rechteck der Breite 3 m und der Höhe 4 m angesehen werden. (4VP)

Wie nah kommt der Zug der gewölbten Wandfläche?

Aufgabe I 1.2

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $n \geq 1$: (4VP)

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}.$$

Aufgabe I 2.1

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$.

Ihr Schaubild sei K.

a) Skizzieren Sie K im Intervall $[0; 4]$. (5VP)

Geben Sie die Periode von f an.

Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von f auf ganz $\mathbb{R}$ an.

Für welche Werte von x nimmt f im Intervall $[0; 2]$ den Wert 1 an?

b) Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = a - \cos(bx)$ dargestellt werden. (4VP)

Bestimmen Sie a und b.

K und die x-Achse begrenzen zwischen benachbarten Nullstellen jeweils eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt einer solchen Fläche exakt.

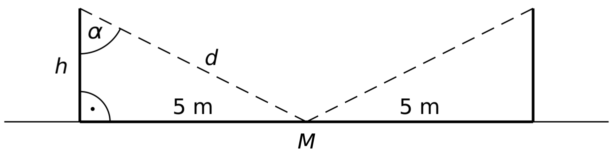
c) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades hat in $P(1 \mid 2)$ einen Hochpunkt und in $Q(2 \mid 0)$ einen Tiefpunkt. (5VP)

Bestimmen Sie einen Funktionsterm für g.

An welchen Stellen im Intervall $[1; 2]$ weichen die Funktionswerte von f und g am stärksten voneinander ab?

Aufgabe I 2.2

Zwei in gleicher Höhe h ($h \leq 5$) befestigte Lampen sollen einen 10 m langen Abschnitt eines ebenen Spazierweges beleuchten (s. Skizze). (4VP)



Für die Maßzahl H der Helligkeit in der Mitte M gilt $H = 100 \cdot \frac{\cos\alpha}{d^2}$ (d in Meter).

In welcher Höhe müssen die Lampen befestigt werden, damit der Weg bei M möglichst hell beleuchtet wird?

Aufgabe I 3

Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei 36,5°C.
Die Funktion f mit $f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t}$ beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten.
Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach dem Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in °C.

a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten? (6VP)

Geben Sie diese Temperatur an.

Skizzieren Sie die Fieberkurve innerhalb der ersten 48 Stunden in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.

Zu welchen beiden Zeitpunkten innerhalb der ersten 48 Stunden nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab?

b) Wann sinkt die Körpertemperatur unter 37°C? (7VP)

Weisen Sie nach, dass die Temperatur ab diesem Zeitpunkt dauerhaft unter 37°C bleibt.

Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur für den Zeitraum vom Krankheitsbeginn bis zu diesem Zeitpunkt.

In welchem 2-Stunden-Zeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu?

c) Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur. Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur 38,4°C. (5VP)

Bestimmen Sie eine Funktion g, welche den weiteren Temperaturverlauf beschreibt.

Zu welchem Zeitpunkt nach des Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger als sie ohne Medikament wäre?

Wahlteil II

Aufgabe II 1

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.
Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(6\,|\,3\,|\,0)$.
Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P(7\,|\,29\,|\,7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr? (6VP)
Woran erkennen Sie, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet?
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu?
Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen?

b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(17\,|\,9\,|\,0)$. (6VP)
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen.
Prüfen Sie, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab sich das Flugzeug von R_1 entfernt.
Um wie viel Uhr ist das der Fall?

c) Die Flugbahn eines zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch (4VP)

$$f_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt?
Berechnen Sie, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen.

Aufgabe II 2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P(0|-6|0)$, $Q(12|0|0)$ und $R(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfes hat die Eckpunkte $P^*(0|-2|2)$, $Q^*(2|0|2,5)$ und $R^*(0|1|2,5)$.

a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar. (6VP)
Begründen Sie, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfs nicht parallel sind.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Kante QQ^* mit der x_1-Achse bildet.
Zeigen Sie, dass $S(0|0|3)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R. (6VP)
Zeigen Sie, dass die Seitenfläche QRR^*Q^* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

Aufgabe II 2.2

Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit. (4VP)
Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.

Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.