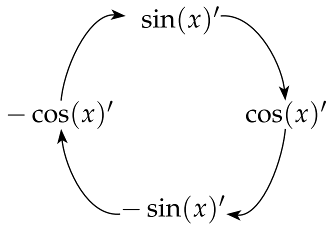
Pflichtteil

Aufgabe 1 (2 VP)

▶ Erste Ableitung von f bilden

Du sollst die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 7)^5$ bilden.

Bei der Funktion handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite sie also nach der **Kettenregel** ab.
Bezüglich der **inneren Ableitung** (sin-Funktion) kannst du dich an der Merkhilfe „Trig-Kreis" orientieren.



Aufgabe 2 (2 VP)

▶ Stammfunktion von f bestimmen

Den Funktionsterm von f kannst du zunächst umformulieren:

$f(x) = 2e^{4x} + 3 \cdot x^{-2}$

Bilde nun eine Stammfunktion von F, indem du die beiden Terme **einzeln** integrierst.

Aufgabe 3 (3 VP)

▶ Gleichung lösen

Dir ist die Gleichung gegeben mit $\sin(x) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) = 0$.

Hier kannst du den Faktor $\cos(x)$ ausklammern, da er in beiden Summanden vertreten ist. Damit ergibt sich die folgende Gleichung.

$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$

Nun gilt: Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. (Satz vom Nullprodukt). Betrachte also die beiden Faktoren einzeln und untersuche, für welche Werte von x sie den Wert Null annehmen.

Aufgabe 4 (4 VP)

▶ Gemeinsame Punkte bestimmen

Betrachte zunächst die beiden Funktionen f und g: bei f handelt es sich um eine **gebrochenrationale** Funktion, bei g um eine **ganzrationale** Funktion. Untersuche f zunächst auf **Definitionslücken**:
Gesucht sind nun die gemeinsamen Punkte der Graphen, also deren **Schnittpunkte**. Diese kannst du berechnen, indem du die Funktionsterme von f und g **gleichsetzt**.
Löse also die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x auf und berechne anschließend die y-Koordinate der Schnittpunkte.

▶ Prüfen, ob sich die Graphen senkrecht schneiden

Zwei Graphen schneiden sich dann senkrecht in einem Punkt, wenn sich die **Tangenten** an die jeweiligen Graphen in diesem Punkt senkrecht schneiden.

Zwei Tangenten wiederum stehen senkrecht aufeinander, wenn für deren Steigungen m_1 und m_2 gilt:
$m_1 \cdot m_2 = -1$.
Die Tangentensteigungen erhältst du über die **erste Ableitung**.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst die erste Ableitung von f und g.
- Berechne die Tangentensteigungen an die Graphen von f und g in den beiden Schnittpunkten.
- Untersuche, ob das Produkt der Steigungen jeweils -1 ergibt oder nicht.

Aufgabe 5 (5 VP)

a) ▶ **Zuordnung der Graphen begründen**

Versuche, die Funktion f mit Abbildung 2 über eine einfache Eigenschaft von f in Verbindung zu setzen. Eine Möglichkeit ist z.B. den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ zu berechnen und mit den Graphen zu vergleichen.

b) ▶ **Graphen zuordnen**

1. Schritt: Funktion g einem Graphen zuordnen

Betrachte zunächst den Funktionsterm von g. Durch $g(x) = f(x-a)$ wird der Graph der Funktion f **verschoben** und zwar in um a Einheiten in **positive x-Richtung**.
Betrachte also die Abbildungen und suche nach einem Schaubild, das aus dem Graphen von f durch eine solche Verschiebung hervorgeht und untersuche, um wie viele Einheiten das Schaubild von f verschoben wurde.

2. Schritt: Funktion h einem Graphen zuordnen

Das Schaubild von Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$ geht ebenfalls aus dem Schaubild von f hervor und zwar durch **Streckung** um Faktor b in **y-Richtung**. Wenn b negativ ist, wird das Schaubild zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

c) ▶ **Funktion k bestimmen**

Der Funktionsterm von k soll **ohne Rechnung** angegeben werden. Dies legt nahe, dass auch das Schaubild von k durch Verschiebung und/oder Streckung aus dem Schaubild von f hervorgeht. Betrachte das letzte übrige Schaubild zunächst und vergleiche es mit dem Schaubild von f.
Formuliere auf dieser Grundlage dann einen Funktionsterm.

Tipp:
Das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = a \cdot f(b(x-c)) + d$ geht aus dem Schaubild von f hervor durch

- Streckung/Stauchung in y-Richtung um Faktor a und Spiegelung an der x-Achse, falls a negativ ist.
- Streckung/Stauchung in x-Richtung um Faktor $\frac{1}{b}$ und Spiegelung an der y-Achse, falls a negativ ist.
- Verschiebung in x-Richtung um c Einheiten.
- Verschiebung in y-Richtung um d Einheiten.

Aufgabe 6 (3 VP)

▶ Schnittgerade der Ebenen

Die Ebenen sind in Normalen bzw. in Koordinatenform gegeben. Die Gleichung einer Schnittgerade kannst du nur bestimmen, wenn du **beide** in der gleichen Form gegeben hast. Es bietet sich daher an, die Gleichung von E so umzuformen, dass sie in Koordinatenform gegeben ist. Dann kannst du die Gleichung der Schnittgeraden über ein **lineares Gleichungssystem** bestimmen.

1. Schritt: Koordinatengleichung von *E* bestimmen

Die Koordinatengleichung der Ebene hat allgemein die Form $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Dabei sind a, b und c die Koordinaten des **Normalenvektors** der Ebene.

E ist in Normalenform gegeben. Die Koordinaten des Normalenvektors kannst du also **ablesen**.

Lies dann den Stützvektor der Ebene E ab und setze dessen Koordinaten für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung ein. Dann kannst du nach d auflösen.

2. Schritt: Gleichung der Schnittgeraden ermitteln

Fasse die beiden Koordinatengleichungen von E und F in einem linearen Gleichungssystem zusammen und löse dieses. Das Gleichungssystem ist **unterbestimmt**, weil es zwar drei Unbekannte, aber nur zwei Gleichungen enthält. Setze also z.B. $x_3 = t$ und löse dann nach x_2 und x_1 auf.

Aufgabe 7 (4 VP)

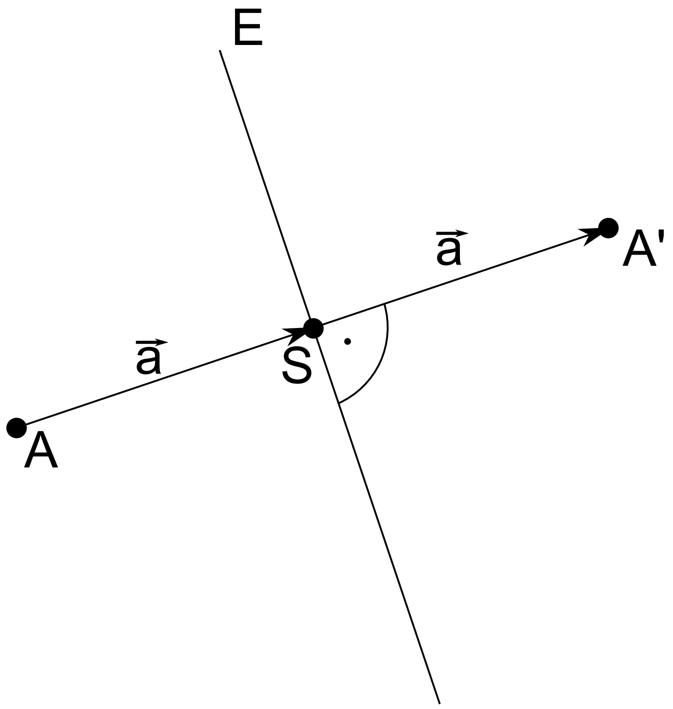
a) **▶ Besondere Lage der Ebene *E***

Die Frage nach der besonderen Lage einer Ebene im Raum fragt immer nach einer Parallelität zu einer der Koordinatenachsen oder -ebenen.

Allgemein kannst du die Regel anwenden, dass eine Ebene immer zu der Koordinatenachse parallel verläuft, deren Koordinate nicht in der Koordinatengleichung vertreten ist.

b) **▶ Spiegelpunkt von *A* an *E***

Punkt A soll an der Ebene E gespiegelt werden. Solche eine Spiegelung läuft immer **orthogonal** zur Spiegelebene ab. Zum besseren Verständnis haben wir die Situation in einer Skizze dargestellt:



Du kannst nun so vorgehen:

- Bestimme zunächst einen Vektor, der **senkrecht** zur Ebene E verläuft.
- Bestimme dann die Gleichung einer Geraden g, die diesen Vektor als Richtungsvektor hat und die durch den Punkt A verläuft. Diese Gerade ist dann auch senkrecht zur Ebene E.
- Berechne den Schnittpunkt S von g und E. Dies ist der **Lotfußpunkt** von A auf E.
- Für den Spiegelpunkt A' gilt nun: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$.

Aufgabe 8 (3 VP)

▶ Verfahren beschreiben

g liegt in E. Gesucht ist die Gleichung einer Geraden h, die ebenfalls in E liegt und senkrecht zu g steht. Wir wollen mit $\vec{n}$ den Normalenvektor der Ebene bezeichnen und nehmen an, dass für g gilt: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$.
Unsere Gerade h soll eine Gleichung der Form $h: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{v}$ bekommen.

Überlege, welche Eigenschaften die Vektoren $\vec{q}$ und besonders $\vec{v}$ erfüllen müssen, damit die Gerade h senkrecht zur Geraden g liegt und zugleich in der Ebene E enthalten ist.

Wahlteil IAufgabe I 1

a) ► **Koordinaten des nördlichsten Punktes** (6 VP)

In der rechten oberen Ecke kannst du eine Windrose erkennen, die dir die Himmelsrichtung Norden, Osten, Süden und Westen im Koordinatensystem angibt. Du kannst sehen, dass Norden in Richtung der positiven y-Richtung liegt und somit der Punkt mit dem größten y-Wert im untersuchten Bereich gesucht ist.

Der Punkt mit dem größten y-Wert im untersuchten Bereich wird lokales Maximum genannt, das du mittels deines GTR berechnen kannst.

► **Abstand von *M* und *P***

Den Abstand zweier Punkte kannst du über die folgende Formel bestimmen.

$$d(M,P) = \sqrt{(x_m - x_p)^2 + (y_m - y_p)^2}$$

Berechne auf diese Weise den Abstand von M und P.

► **Übergang von Linkskurve in Rechtskurve**

Der Übergang einer Kurve von einer Linkskurve in eine Rechtskurve zeigt sich am Wendepunkt des Graphen. Folglich musst du diesen berechnen, damit du den gesuchten Punkt erhältst.

Es müssen die notwendige und die hinreichende Bedingung für Wendepunkt erfüllt sein.
Die notwendige Bedingung lautet $f''(x) = 0$ und die hinreichende wird durch $f'''(x) \neq 0$ beschrieben.

Leite die Funktion drei mal ab, um die Bedingungen zu prüfen.

► **Übergang der Umgehungsstraße in die Ortsdurchfahrt**

Die Ortsdurchfahrt wird durch eine Gerade beschrieben. Allgemein haben Geraden die Form $g(x) = m \cdot x + c$, wobei m die Steigung und c den y-Achsenabschnitt darstellt.

Auf der Gerade sollen die Punkte M, A und B liegen. Du benötigst zwei dieser Punkte, um die Gerade eindeutig zu bestimmen.

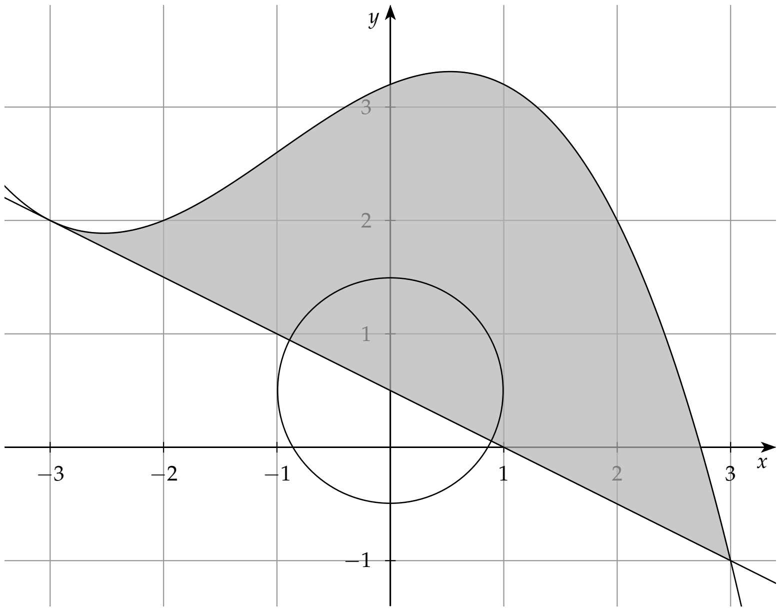
Damit dann die Umgehungsstraße ohne Knick in die Ortsdurchfahrt mündet, muss gelten $f'(-3) = g'(-3)$, wobei gilt $g'(x) = m$.
Somit ergibt sich die Bedingung $f'(-3) = m$.

m kannst du über die Formel $m = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ bestimmen.

b) ► **Größe des Gebiets bestimmen** (4 VP)

Um die Größe des Gebiets zu bestimmen, musst du die Integrale der beiden Kurven bestimmen, da die den Flächeninhalt unter der Kurve beschreiben und dann von einander abziehen.

Als Grenzen benötigst du die Schnittpunkte der Graphen von f und g, von denen dir bereits einer mit dem Punkt A gegeben ist. Die gesuchte Fläche sieht dann wie folgt aus.



Bestimme diese Fläche nach der folgenden Formel.

$$\int_{-3}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{b} g(x)\mathrm{d}x$$

Du siehst, dass du noch die 2. Schnittstelle und die Geradengleichung von g benötigst.

Für die Schnittstelle benötigst du allerdings auch die Geradengleichung, sodass du diese zuerst bestimmen musst.

1. Schritt: Geradengleichung bestimmen

Die allgemeine Geradengleichung lautet $g(x) = m \cdot x + c$. m hast du bereits im vorangehenden Aufgabenteil mit $m = -\frac{1}{2}$ bestimmt.

c wird über $g(0) = c$ beschrieben. Es gilt $M \in g$ und $M(0 \mid 0{,}5)$

2. Schritt: Integral bestimmen

Die Fläche bestimmst du nun über das Integral in den Grenzen $a = -3$ und $b = 3$.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-3}^{3} g(x)\mathrm{d}x$$

Diesen Term kannst du dir von deinem GTR berechnen lassen.

Wähle über `MATH` den Befehl `9: fnInt` aus. Setze die Grenzen des Integrals ein und suche unter `VARS→Y-VARS→Functions...` deinen Funktionen aus und subtrahiere die Integrale von einander.

▶ Prozentualen Anteil bestimmen

Den prozentualen Anteil bestimmst du über die folgende Formel, wobei A_k die Fläche des Gemeindegebiets zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße darstellt.

$$p = \frac{A_u - A_k}{A_u} \cdot 100\%$$

Da die Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises, der das Gemeindegebiet beschreibt, verläuft, hat er den Flächeninhalt eines Halbkreises, den du über folgende Formel bestimmen kannst.

$A_k = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

r beschreibt den Radius des Kreises.

c) ▶ **Punkt auf der Umgehungsstraße** (4 VP)

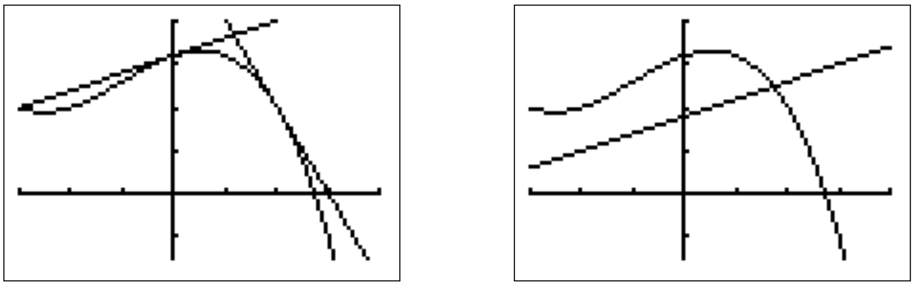
Das Fahrzeug soll von B aus auf der Umgehungsstraße fahren. Somit kannst du das Fahrzeug als Punkt Q, der auf der Kurve von f liegt, beschreiben.

Die Fahrtrichtung kannst du allgemein als Gerade betrachten, die die Kurve von f berührt und somit eine Tangente nach der Form

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$

Dies ist darin begründet, dass die Ableitung von f die Steigung von f angibt und somit die Krümmung der Kurve beschreibt. Folgt der Wagen nicht dieser Krümmung, so würde er von der Straße abkommen, wie im folgenden Bild dargestellt.

Die beiden Geraden im linken Bild stellen die Fahrtrichtungen richtig dar, während die Gerade im rechten Bild eine falsche Fahrtrichtung verdeutlicht.



Somit musst du den Punkt Q suchen, durch den und den Punkt P eine Tangente an dem Graphen von f verläuft.

Der Punkt Q hat die allgemeinen Koordinaten $Q(x_0 \mid f(x_0))$.

Für Tangenten ist nach der folgenden Tangentengleichung

$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$

die Steigung mit $m = f'(x)$ definiert. Die erste Ableitung von f hast du bereits im Aufgabenteil a) bestimmt mit

$f'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 0,4$

d) ▶ **Zeitpunkt der parallelen Fahrtrichtung bestimmen** (4 VP)

Aus der vorherigen Aufgabe haben wir die Bedingung, dass die Fahrtrichtung durch die Steigung der Tangente an der Kurve von f beschrieben wird.

Die Steigung der Tangente wird wiederum beschrieben über $m = f'(x)$.

Zwei Geraden verlaufen parallel, wenn gilt $m_1 = m_2$, wobei m_1 in diesem Fall die Steigung der Geraden, die die Ortsdurchfahrt beschreibt, darstellt, während m_2 die Steigung der Geraden beschreibt, die die Fahrtrichtung des Wagens zeigt.

Nach oben stehenden Bedingungen musst du also Prüfen für welches x_1 gilt $m_1 = m_2$ mit $m_2 = f'(x_1)$.

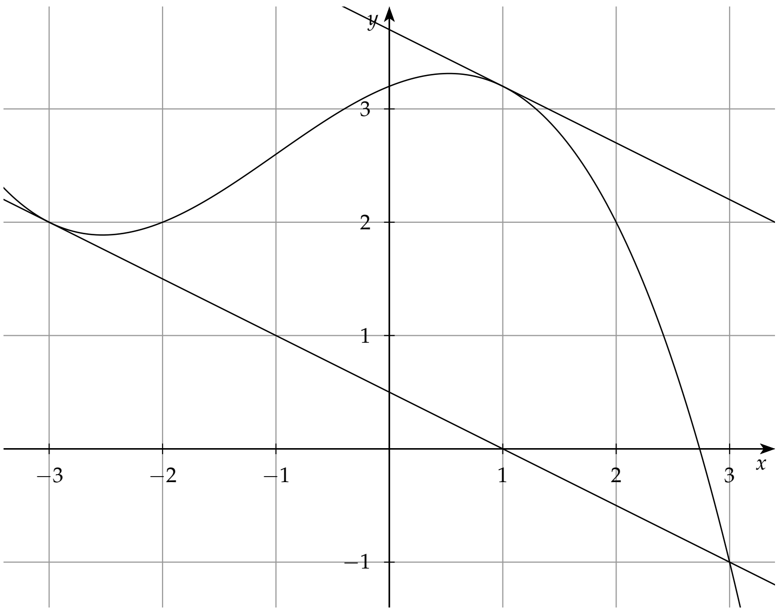
Die erste Ableitung f' der Funktion f hat den folgen Term, den du auch bereits zuvor bestimmt hast.

$f'(x) = -0,3 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 0,4$

Die Steigung m_1 beträgt $m_1 = -\frac{1}{2}$

▶ Größter Abstand der Ortsdurchfahrt von der Umgehungsstraße

Oben haben wir bestimmt, an welcher Stelle die Kurve von f eine zu g parallele Tangente besitzt. Lasse dir das Schaubild von deinem GTR zeichnen. Es ergibt sich folgendes Bild.



Du kannst erkennen, dass es sich bei dem maximalen Abstand um den Abstand des Berührpunktes zur Geraden g handeln muss, da die Kurve zwischen den Parallelen eingeschlossen ist.

1. Schritt: Berührpunkt bestimmen

Wir haben die Stelle des Berührpunktes R mit $x = 1$ bestimmt.

Nun benötigst du noch einen Punkt U auf der Geraden g, der zusammen mit R eine zu g senkrechte Gerade definiert. Die Gerade muss senkrecht zu g stehen, da sie dann den kürzesten Abstand der beiden Parallelen beschreibt.
Wie oben beschrieben beschreibt der kürzeste Abstand der Parallelen den maximalen Abstand zwischen den Grapen von f und g

2. Schritt: Eine zu g senkrechte Gerade bestimmen

Für zwei zu einander senkrechte Geraden gilt:

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$

$s(x) = m_2 \cdot x + c$

Setze die Koordinaten von R ein, um c zu bestimmen.

3. Schritt: Schnittpunkt von s und g bestimmen

Trage s und g in deinen GTR ein und bestimme den Schnittpunkt, der dann den Punkt U beschreibt.

4. Schritt: Abstand von R und U bestimmen

Bestimme nun den Abstand von R und U wie folgt.

$d(U,R) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Aufgabe I 2

b) ► **Graphen von f und g_1 skizzieren** (6 VP)

Um die Graphen zu skizzieren, lasse sie dir zunächst von deinem GTR zeichnen. Beachte besondere Punkte, wie Schnittstellen mit der x- und y-Achse. Beachte außerdem die Periodenlänge der beiden Funktionen, da es sich bei beiden um trigonometrische Funktionen handelt.

► **Periode von f angeben**

Die Periode beschreibt die Dauer, bis sich die Funktion wiederholt. Dies ist bei einer Sinusfunktion genau $2 \cdot \pi$.

Du kannst die Periode einer quadrierten Sinusfunktion über

$$p = \frac{\pi}{q}$$

bestimmen, wobei die Sinusfunktion allgemein mit $f(x) = (\sin(q \cdot x))^2$ aufgebaut ist.

► **Amplitude von f angeben**

Die Amplitude einer unveränderten Sinusfunktion, wie sie durch die Funktion g_1 dargestellt wird, hat immer die Amplitude $A = 1$.

Anhand des oben stehenden Schaubildes kannst du erkennen, dass die Funktion f Funktionswerte im Bereich $0 \leq y \leq 1$ aufweist.

Die Amplitude kannst du anhand des Schaubildes bestimmen über kleinster y-Wert subtrahiert vom größten y-Wert und dann durch 2 teilen.

Somit ergibt sich die folgende Gleichung.

$$A = \frac{y_1 - y_0}{2}$$

► **Stellen des größten Unterschiedes**

Den größten Unterschied der Funktionswerte erhältst du über die Funktion

$$d(x) = g_1(x) - f(x).$$

Vereinfacht erhältst du die Funktionsgleichung von d wie folgt.

$$d(x) = \sin(x) - (\sin(x))^2$$

Gib diese Funktion in deinen GTR ein und bestimme das Maximum im Bereich $0 \leq x \leq \pi$.

b) ► **Schnittwinkel im Ursprung** (6 VP)

Der Schnittwinkel der beiden Graphen kann über die Tangenten, die an den beiden Graphen im Ursprung anliegen, bestimmt werden.

Bestimme folglich zunächst die beiden Tangenten, die allgemein die folgende Form haben.

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + c$$

Da die Tangenten durch den Ursprung laufen, ist der y-Achsenabschnitt $c = 0$.

Der Ursprung hat die Koordinaten $O(0 \mid 0)$. Somit ergibt sich die Stelle x_0, an der die Tangente liegen soll mit $x_0 = 0$.

Leite die beiden Funktionen ab, um die Steigung der Tangenten zu bestimmen.

Den Winkel zwischen einer Geraden und der x-Achse bezeichnet man als Steigungswinkel, den du über folgende Formel bestimmen kannst.

$\tan(\alpha) = m$

Für die Steigung m gilt
$m = g'(x_0)$

► Gleichheit der Flächen bestimmen

Flächen lassen sich über das Integral der Funktionen beschreiben. Da hier die Flächen unter den Kurven identisch sein sollen, muss also gelten

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} g_t(x)\mathrm{d}x$$

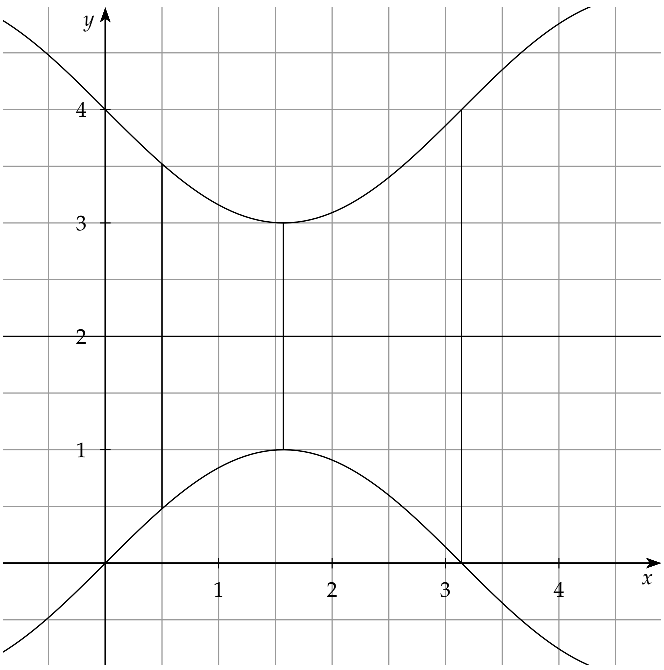
Eingesetzt ergibt sich daraus die Form

$$\int_0^{\pi} \sin(x)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} t \cdot \sin(x)\mathrm{d}x$$

Lasse dir die Integrale von deinem GTR wie folgt bestimmen.

c) **► Spiegelung der Funktion g_1** (6 VP)

Zunächst einmal solltest du dir eine Skizze anfertigen, die die neue Situation darstellt.
Diese könnte wie folgt aussehen.



Die Funktion g_1 ist eine unveränderte Sinusfunktion mit folgendem Funktionsterm.

$g_1(x) = \sin(x)$

Eine Spiegelung an einer zur x-Achse parallelen Gerade führt zur Umkehr des Vorzeichens der Funktion sowie einer Verschiebung auf der y-Achse. Dies kannst du auch anhand der oben stehenden Skizze erkennen.

Die Verschiebung des y-Achsenabschnitts entspricht dem doppelten Abstand vom y-Achsenabschnitt zur Spiegelachse, die hier durch die Gerade $h : y_1 = 2$ dargestellt wird.

► Rotation von K um h

Die Gerade h kannst du als „verschobene" x-Achse ansehen, da sie parallel zur x-Achse verläuft. Drehkörper kannst du allgemein über die folgende Formel berechnen.

$$V = \pi \cdot \int_a^b g_1(x)^2 \mathrm{d}x$$

Diese Formel bestimmt allerdings den Drehkörper bei Rotation um die x-Achse. Somit musst du die Gerade h und den Graphen der Funktion in y-Richtung so verschieben, dass gilt $h : y = 0$.

1. Schritt: Verschiebung von h und K

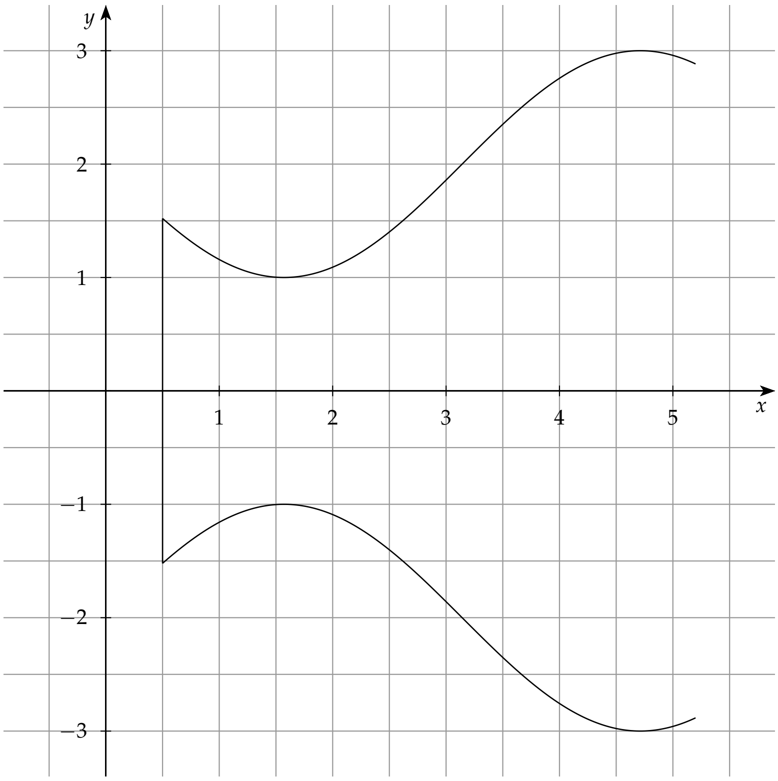
Dies ist darin begründet, dass die Gerade $h : y = 0$ die x-Achse darstellt und somit der verschobene Graph K_1 dann um h wie um die x-Achse rotieren kann.

Es muss gelten $y = 2 - d = 0$ und $g(x) = g_1(x) - d$

2. Schritt: Engste Stelle bestimmen

Du musst nun die Engste Stelle bestimmen, da sie dir neben $x = 5{,}2$ die 2. Grenze vorgibt, in der Wasser in den Pokal, der durch die Rotation entsteht, gefüllt werden kann.

Die engste Stelle wird durch den Punkt definiert, der am nächsten an der x-Achse liegt. Dies lässt sich durch folgende Skizze unterstreichen.



Lasse dir von deinem GTR den Graphen von g im Bereich $0,5 \leq x \leq 5,2$ zeichnen und suche die engste Stelle.

3. Schritt: Flüssigkeitsvolumen im Pokal

Berechne nun das Volumen des Rotationskörpers mittels deines GTR.

4. Schritt: Prüfen, ob 1 Liter Wasser in den Pokal passt

Die Aufgabenstellung gibt dir vor, dass gilt 1 LE=2,5 cm. Außerdem gilt allgemein: 1 VE=$(1\text{ LE})^3$
Rechne daher zunächst die Längeneinheiten in Volumeneinheiten um.

Berechne nun das Volumen, das der Pokal fassen, in cm^3.
Es gilt 1 cm^3=1 ml.

Rechne abschließend ml in l um.

Aufgabe I 3

a) ▶ **Graphen von f skizzieren** (7 VP)

Den Graphen einer Funktion kannst du am besten skizzieren, indem du ihn dir zunächst von deinem GTR zeichnen lässt und ihn dann überträgt.

Suche dir dazu markante Punkte, wie Extrema, Schnittpunkte mit der x- und y-Achse und einige andere Werte.

Extrema kannst du mit deinem Taschenrechner über `2nd→ TRACE (CALC)→3: minimum` bzw. `2nd→ TRACE (CALC)→4: maximum` bestimmen.

▶ **Wirkzeit des Medikaments**

Die Wirkung des Medikaments setzt dann ein, wenn die Menge im Blut die Grenze von 36 mg überschreitet und endet, wenn sie diese wieder unterschreitet.

Diese Grenze kannst du als eine zur t-Achse parallele Gerade darstellen. Die Schnittpunkte dieser Gerade mit dem Graphen von f geben dann den Zeitraum an, in dem das Medikament wirkt.

Die Skalierung der y-Achse ist in Milligramm gegeben. Folglich lautet die Gleichung der Geraden wie folgt.

$h(t) = 36$

Suche nun die Schnittpunkte, um dann das Intervall zu erhalten, in dem das Medikament wirkt.

▶ **Stärkste Ab- bzw. Zunahme bestimmen**

Die stärkste Ab- bzw. Zunahme drückt sich darin aus, dass die Steigung des Graphen in diesem Punkt maximal wird.

Einen Punkt, der dieses Merkmal besitzt, bezeichnet man als Wendepunkt. Er hat die folgenden Bedingungen:

$f''(t) = 0$

$f'''(t) \neq 0$

Folglich musst du die Funktion f dreimal ableiten und dann die Bedingungen prüfen.

Da es sich bei einem Wendepunkt um ein Extremum der Ableitung handelt, kannst du mit deinem GTR nun die 1. Ableitung auf Extrema im betrachteten Bereich untersuchen. Beachte, dass du außerdem eine Randwertbetrachtung durchführen musst, wenn für $0 \leq t \leq 24$ gilt $f'(0) > f'(t)$ oder $f'(24) < f'(t)$

▶ **Durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut**

Den durchschnittlichen Funktionswert einer Funktion kannst du über folgende Formel bestimmen.

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a und b beschreiben die Grenzen, in denen du den durchschnittlichen Funktionswert bestimmen sollst.

Diese sollen in diesem Fall die Grenzen $a = t_0 = 0$ und $b = t_1 = 12$ sein, da gefragt wird, wie groß der Durchschnitt in den ersten 12 Stunden ist, also von 0 h bis 12 h.

b) **► Langfristige Wirkstoffmenge im Blut bestimmen** (7 VP)

Die langfristige Wirkstoffmenge im Blut wird beschrieben durch den Grenzwert der Funktion g mit $x \to \infty$.
Es gilt für $e^{-a \cdot x}$ mit $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-a \cdot x} = 0$$

Dies ist im negativen Exponenten der e-Funktion begründet, der den Term mit wachsenden t-Werten Schrumpfen lässt.

Bestimme aus dieser Vorgabe den Grenzwert von g mit $t \to \infty$.

► Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge begründen

Eine ständige Zunahme der Wirkstoffmenge drückt sich durch ein dauerhaftes Anwachsen des Funktionswerts von g mit wachsenden t-Werten aus.
Als Bedingung hierfür gilt, dass die Steigung des Graphen von g dauerhaft positiv sein muss, da diese das Anwachsen der Funktionswerte bedingt.

Folglich muss gelten:

$$g'(t) > t\,; \qquad t \geq 0$$

Leite daher zunächst die Funktion g ab und prüfe die Aussage.

► Zeitpunkt bestimmen

Die momentane Änderungsrate wird wieder beschrieben durch die erste Ableitung der Funktion g, die du bereits oben bestimmt hast.
Um den Zeitpunkt zu bestimmen, an der die momentane Änderungsrate von g genau $1\,\dfrac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt, musst du prüfen, wann gilt

$$g'(t) = 1$$

Lasse dir dazu eine Gerade mit dem Term

$$s: y = 1$$

sowie den Graphen der Ableitungsfunktion g' von deinem GTR zeichnen. Der Schnittpunkt der Geraden und dem Graphen von g' beschreibt dann den gesuchten Zeitpunkt.

► Zeitraum der Änderung um 30 mg bestimmen

Die Aufgabe gibt dir vor, dass sich in einem bestimmten Zeitraum, der sich über 15 min erstreckt, die Wirkstoffmenge um 30 mg ändert.

Da die Skalierung der Zeitachse in Minuten eingeteilt ist, muss somit gelten

$$g(t + 15) - g(t) = 30$$

Durch diesen Term bestimmst du den Zeitpunkt, der zu dem Funktionsterm, der 15 Minuten später liegt eine Differenz von genau 30 aufweist.

c) ► **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums angeben** (4 VP)

Allgemein lautet die Formel zur Beschreibung der Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums wie folgt.

$g'(t) = k \cdot (S - g(t))$

Allgemein lautet die Funktionsgleichung der Funktion g, die ein beschränktes Wachstum darstellt

$g(x) = S \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$

Somit kannst du die Parameter S und k aus der Funktion g auslesen und in die Formel der Differenzialgleichung einsetzen.

► **Konstante Zufuhr bestimmen**

Die konstante Zufuhr erhältst du über die Differenzialgleichung.

Multipliziere diese aus, um die konstante Zufuhr zu erhalten.

Die konstante Zufuhr wird in diesem Fall über $k \cdot S$ beschrieben.

► **Wirkstoffmenge pro Minute bestimmen**

Nun ist dir gegeben, dass die Wirkstoffmenge im Blut sich langfristig auf 90 mg belaufen soll.

Folglich ändert sich die Grenze, der sich die Funktion g annähert. Es gilt $S_1 = 90$.

Aus dieser Bedingung kannst du die oben erstellte Differenzialgleichung anpassen und anschließend die konstante Zufuhr wie oben bestimmen.

Wahlteil II Aufgabe II 1

a) ▶ **Koordinatengleichung von E** (4P)

Eine Ebene ist durch drei Punkte, in diesem Fall A, B und P eindeutig bestimmt. Die Koordinatengleichung einer Ebene hat allgemein die Form

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$, wobei

- n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten des Normalenvektors und
- d ein konstanter Parameter der Gleichung ist.

Du kannst nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E bestimmen, indem du das Kreuzprodukt zweier Vektoren bildest, die in der Ebene E liegen, etwa $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP}$. Für $\overrightarrow{n}$ folgt daraus:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}$.

Den Parameter d kannst du anschließende durch eine Punktprobe mit einem Punkt der Ebene, etwa A, berechnen. Dazu setzt du die Koordinaten von A für x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung ein und löst nach d auf.

▶ **Darstellung der Ebene E im Koordinatensystem**

Eine Ebene stellst du im Koordinatensystem so dar, dass du die drei Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen - die so genannten Spurpunkte - zu einem Dreieck verbindest. Gibt es für bestimmte Achsen keine Schnittpunkte, so handelt es sich um Parallelen zu diesen Achsen und den Ebenen, die sie gemeinsam bilden.

Die Spurpunkte sind Punkte, für die zwei Koordinaten den Wert Null annehmen und nur die Koordinate einen Wert ungleich Null hat, auf der der Spurpunkt liegt.

Zeichne diese drei Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem und verbinde sie zu einem Dreieck. Das Dreieck stellt dann die gesuchte Ebene dar.

▶ **Schnittwinkel von E mit der x_1-Achse**

Die x_1-Achse kann als Gerade behandelt werden. Der Winkel, der zwischen Ebene und einer Geraden eingeschlossen ist, wird über den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und den Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden mit der Formel:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}.$$

Der Normalenvektor der Ebene E ist bekannt und hat die Koordinaten

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ der Geraden, die identisch mit der x_1-Achse ist, hat die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. Der Betrag der x_1-Koordinate ist dann beliebig, da sich der Vektor dann skalieren lässt. Wir können die x_1-Koordinate daher mit $x_1 = 1$ wählen. Für $\overrightarrow{v}$ folgt daraus:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

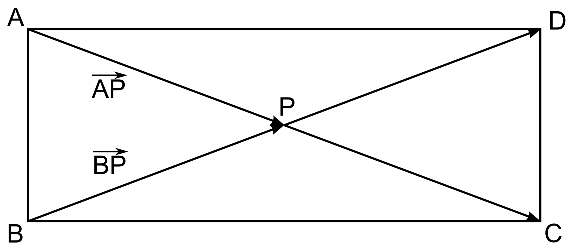
Setze die beiden Vektoren nun in die Formel für den Schnittwinkel ein und bestimme α.

b) **► Nachweis, dass das Dreieck $\triangle ABP$ gleichschenklig ist** (6P)

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei seiner Seiten gleich lang sind. Die Seitenlängen von $\triangle ABD$ kannst du über die Länge der Verbindungsvektoren, also von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ der einzelnen Seiten berechnen.

► Koordinaten von C und D

Gesucht sind die Koordinaten der Eckpunkte C und D des Rechtecks $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt in P. Um sich eine Vorstellung eines solchen Dreiecks zu machen, ist eine Skizze sinnvoll:



Du kannst erkennen, dass sich die Punkte C und D auf den Geraden durch AP und BP befinden und zwar so, dass man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ einmal an P setzen muss beziehungsweise den Vektor $\overrightarrow{BP}$ einmal an P.

Für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OD}$ und $\overrightarrow{OC}$ gilt daher:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP}$ und

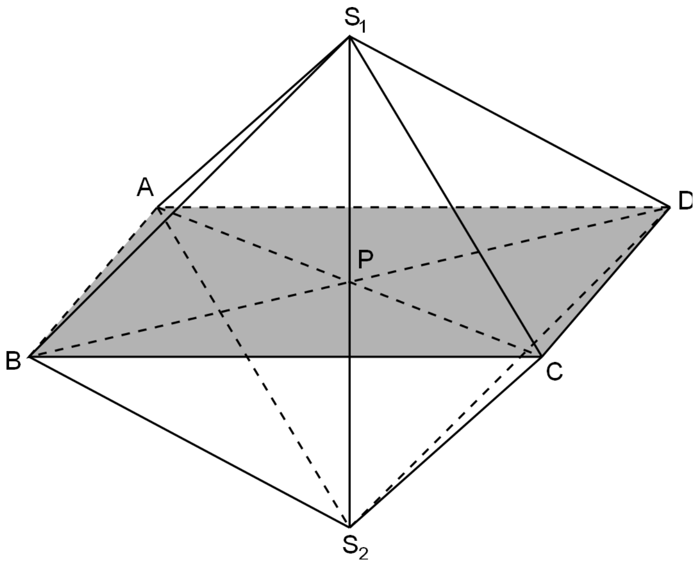
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP}$.

Setze die Koordinaten der Vektoren ein und bestimme die gesuchten Punkte.

► Koordinaten der Pyramidenspitzen

Bei einer senkrechten Pyramide befindet sich ihre Spitze senkrecht zur rechteckigen Grundfläche über dem Schnittpunkt der Diagonalen P. In unserem Fall ist der Abstand der Spitze zur Grundfläche in P gleich 12 LE. Es gibt genau zwei Punkte, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ in 12 LE Abstand über P liegen, da man von der Ebene in zwei Richtungen senkrecht gehen kann.

Eine Skizze verdeutlicht die Situation:



Um die Koordinaten der Spitzen S_1 und S_2 zu ermitteln, müssen wir einen Geraden durch P legen, die senkrecht zur Grundfläche $ABCD$ steht. Der Stützvektor dieser Geraden g ist dann $\overrightarrow{OP}$ und der Richtungsvektor ist der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene, in der $ABCD$ liegt:

$$g: \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{n}.$$

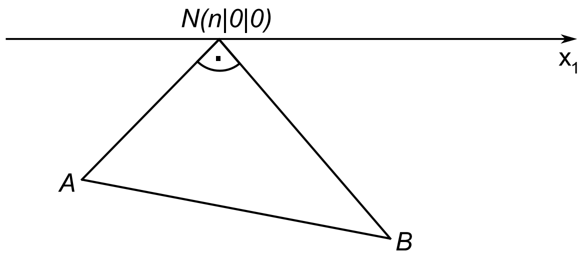
Um auf dieser Geraden zu den Spitzen zu gelangen, muss der Richtungsvektor so skaliert werden, dass er genau 1 LE lang ist. Setzt man dann $r = 12$, geht man von P aus 12 LE senkrecht zur Grundfläche zur Spitze S_1. Setzt man $r = -12$, geht man ebenso senkrecht weg, nur in umgekehrer Richtung, so gelangt man zu S_2.

Wir kommen also in zwei Schritten zum Ziel:

1. $\overrightarrow{n}$ auf 1 LE skalieren.
2. Über die Gerade g mit $r = \pm 12$ zu den Schnittpunkten gelangen.

c) **▶ Punkte auf der x_1-Achse, die ein rechtwinkliges Dreieck mit A und B bilden** (3P)

Die Punkte A und B sollen mit bestimmten Punkten auf der x_1-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB bilden. Der rechte Winkel des Dreiecks liegt daher im Punkt N auf der x_1-Achse. Wegen seiner Lage auf der Koordinatenachse hat N die x_2- und x_3-Koordinate gleich Null. An dieser Stelle ist eine Skizze sinnvoll:



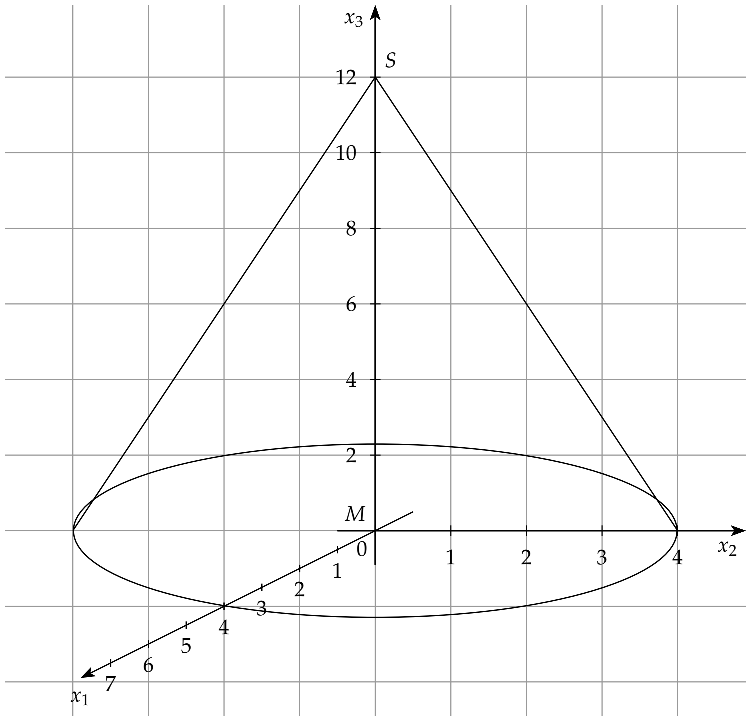
Nun wissen wir, dass wegen des rechten Winkels das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AN}$ und $\overrightarrow{BN}$ Null werden muss. Es gilt also:

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0.$

Die einzige Variable in der resultierenden Gleichung ist dann die x_1-Koordinate n von N, nach der die Gleichung aufgelöst werden kann.

d) ▶ **Prüfung, ob der Punkt R sich innerhalb des Kegels befindet** (3P)

Es soll untersucht werden, ob der Punkt R innerhalb des beschriebenen Kegels liegt. Der Kegel hat den Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0\,0)$, er liegt also im Ursprung und seine Spitze befindet sich in $S(0\,|\,0\,|\,12)$, die Höhe des Kegels liegt also auf der x_3-Achse. Zur besseren Vorstellung ist an dieser Stelle eine Skizze eines solchen Kegels mit Grundkreisradius 4 LE sinnvoll:



Es soll nun untersucht werden, ob der Punkt $R(2\,|\,2\,|\,3)$ sich innerhalb oder außerhalb des Kegels befindet. In der Grundfläche des Kegels befinden sich alle Punkte innerhalb des Kegels, die innerhalb der x_1x_2-Ebene liegen und einen Abstand zur x_3-Achse in M kleiner oder gleich 4 haben, die sich also auf einer Kreisfläche rund um den Mittelpunkt bewegen.

Ein Punkt, der oberhalb der x_1x_2-Ebene liegt, befindet sich daher dann im Kegel, wenn sein Abstand zur x_3-Achse kleiner oder gleich dem Radius ist, den der Kegelschnitt in dieser Höhe hat. R hat die x_3-Koordinate

$x_3 = 3.$

Wir müssen also den Radius r des Kegelschnitts bei $x_3 = 3$ ermitteln und dann prüfen, ob R einen Abstand zur x_3-Achse aufweist, der kleiner oder gleich r ist.

Wir kommen damit in zwei Schritten zum Ziel:

1. Radius r bestimmen.
2. Abstand d von R zur x_3-Achse berechnen und mit r vergleichen.

Aufgabe II 2

a) ▶ **Bewegung in einer Minute bestimmen** (4 VP)

Um zu bestimmen wie weit sich U_1 in einer Minute bewegt, musst du zunächst den Ort bestimmen, an dem sich U_1 nach einer Minute befindet.

Die gegebene Gerade sei die Bewegungsrichtung von U_1, in Abhängigkeit vom Zeitfaktor t, der in Minuten skaliert sein soll.
Das U-Boot bewegt sich in einer Minute genau einmal den Richtungsvektor der Geraden vorwärts.

Bestimme nun die zurückgelegte Strecke in einer Minute über die Länge des Richtungsvektors.

Die Länge eines Vektors bestimmst du über die Formel

$$d = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$$

▶ **Merkmal, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche entfernt**

Der Richtungsvektor gibt immer seinem Namen entsprechend die Richtung einer Gerade und in diesem Fall somit auch die Richtung des U-Boots U_1 an.
Die Meeresoberfläche soll laut der Aufgabenstellung durch die x_1x_2-Ebene dargestellt sein, sodass sich das U-Boot dann davon entfernt, wenn gilt $x_3 \neq 0$.

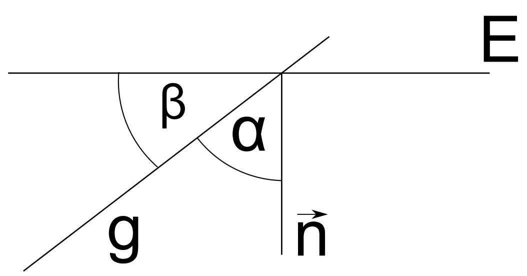
▶ **Winkel zwischen der Meeresoberfläche und der Route von U_1**

▶▶ **Lösungsweg A: Winkel zwischen Normalenvektor und Richtungsvektor**

Die Meeresoberfläche wird hier durch die x_1x_2-Ebene dargestellt.
Diese hat die Koordinatenform $x_3 = 0$ und den folgenden Normalenvektor.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene kannst du wie folgende Skizze zeigt bestimmen.



Der Winkel β ist der Winkel, der von der Meeresoberfläche und der Route von U_1 eingeschlossen wird.
Den Winkel α kannst du mittels des Normalenvektors der Ebene $x_3 = 0$ und dem Richtungsvektor der Geraden bestimmen, sodass gilt

$\beta = 90° - \alpha$

▶▶ Lösungsweg B: Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene kannst du über folgende Formel bestimmen.

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

Der Vektor $\overrightarrow{n}$ beschreibt den Normalenvektor der Ebene E und $\overrightarrow{v}$ sei der Richtungsvektor von g.

Die Meeresoberfläche hat die Koordinatenform $x_3 = 0$.

b) **▶ Geschwindigkeit von U_2 bestimmen** (4 VP)

Nun sind dir der Ausgangspunkt von U_2 sowie der Punkt, an dem sich das Boots nach 3 Minuten befindet gegeben.
Folglich beschreibt der Abstand dieser zwei Punkte die Strecke, die das U-Boot in 3 Minuten zurückgelegt hat.

Um die Geschwindigkeit des Bootes zu bestimmen, musst du den Vektor, den die 2 Punkte aufspannen, aufstellen. Berechne dann dessen Länge berechnen und teile diese durch 3, damit du die Strecke erhältst, die das Boot nach einer Minute zurückgelegt hat.

Allgemein bestimmst du Vektoren über die folgende Formel:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Setze die Punkte ein bestimme dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

Die Länge eines Vektors bestimmst du über die Formel

$$d = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$$

▶ Begründung, dass die Gerade die Bewegung von U_2 beschreibt

Um zu begründen, dass eine Gerade die Bewegung des U-Boots beschreibt, wirf zunächst einen Blick auf den Aufbau der Geraden, die dir für die Bewegung von U_1 gegeben ist.
Betrachte, was ihr Richtungsvektor beschreibt und welche Relevanz der Stützvektor besitzt.

Der Stützvektor einer Geraden beschreibt immer den Punkt, für den gilt $t = 0$. Somit ist dies der Ausgangspunkt des U-Boots zum Zeitpunkt $t = 0$.

Der Richtungsvektor der Geraden, die die Bewegung von U_1 beschreibt, stellt die Bewegung innerhalb von einer Minute dar.
Im vorherigen Aufgabenteil hast du den Vektor bestimmt, der die Bewegung von U_2 in 3 min beschreibt.

Bestimme daraus den Vektor, der die Bewegung von U_2 in einer Minute beschreibt.

▶ Zeitpunkt gleicher Tiefe feststellen

Die Tiefe, in der sich die U-Boote befinden, wird durch die x_3-Koordinate beschrieben.
Folglich muss diese gleich sein, damit sich die U-Boote zu einem Zeitpunkt t in der selben Tiefe befinden.

Setze daher die x_3-Koordinate der Geraden gleich und löse nach t auf.

Die Geradengleichung kannst du in x_1-, x_2- und x_3-Koordinaten aufspalten, die jeweils durch die einzelnen Zeilen definiert sind. Daraus ergeben sich folgende Zeilen der Gerade, die die Bewegung von U_1 beschreibt.

1. $140 - 60 \cdot t$
2. $105 - 90 \cdot t$
3. $-170 - 30 \cdot t$

Selbiges gilt für die Gerade, die die Bewegung von U_2 darstellt.

1. $68 - 90 \cdot t$
2. $135 - 180 \cdot t$
3. $-68 - 60 \cdot t$

Die 3. Zeile einer Geraden beschreibt die x_3-Koordinate eines jeden Punktes auf der Geraden und somit dessen Tiefe.
Somit müssen diese identisch sein.

c) ▶ **Abstand der U-Boote bei Beobachtungsbeginn** (4 VP)

Die beiden U-Boote werden bei Beobachtungsbeginn durch je einen Punkt dargestellt.
Den Abstand zweier Punkte kannst du über folgende Formel bestimmen.

$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$

Bei Beobachtungsbeginn gilt $t = 0$, da genau in diesem Moment die Beobachtung starten soll.

Den Ausgangspunkt von U_2 hast du bereits mit den Koordinaten $A(68 \mid 135 \mid -68)$ gegeben.

Setze nun t mit $t = 0$ in die Geradengleichung der Gerade, die die Bewegung von U_1 beschreibt ein, um die Ausgangsposition von U_1 zu bestimmen und bestimme dann deren Abstand.

▶ **Einhaltung des Mindestabstands prüfen**

Die Aufgabe gibt vor, dass sich die U-Boote niemals näher als 100 m an einander annähern dürfen.
Beachte hier, dass die Geraden zwar die Bahnen beschreiben, allerdings nicht die Position der U-Boote zu einander. Daher musst du bestimmen, ob der Minestabstand zwischen den U-Booten und nicht den Geraden eingehalten wird.

Betrachte dazu die U-Boote als variable Punkte auf den Geraden, die dann die folgenden Koordinaten haben.

$U_1(140 - 60 \cdot t \mid 105 - 90 \cdot t \mid -170 - 30 \cdot t)$

$U_2(68 - 90 \cdot t \mid 135 - 180 \cdot t \mid -68 - 60 \cdot t)$

Deren Abstand kannst du wieder über folgende Formel bestimmen.

$d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$