

Zusammenfassung Abiturstoff Mathematik

T. Schneider, J. Wirtz, M. Blessing

10. März 2015

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Analysis | 2 |
| 1.1 | Monotonie | 2 |
| 1.2 | globaler Verlauf | 2 |
| 1.3 | Symmetrien bei GRF | 2 |
| 1.4 | Nullstellen | 2 |
| 1.5 | Extremstellen | 2 |
| 1.6 | Wendestellen | 2 |
| 1.7 | Anzahl *-Stellen | 2 |
| 1.8 | Extremwertaufgaben | 3 |
| 1.9 | Funktionenscharen | 3 |
| 1.10 | Lineare Gleichungssysteme | 3 |
| 1.11 | Regression | 3 |
| 1.12 | Ableiten | 3 |
| 1.13 | Tangenten | 3 |
| 1.14 | Normale | 4 |
| 1.15 | Logarithmus | 4 |
| 1.16 | e-Funktion | 4 |
| 1.17 | Wachstum | 4 |
| 1.18 | Asymptoten | 4 |
| 1.19 | Aufleiten | 5 |
| 1.20 | Integral | 5 |
| 1.21 | Mittelwert | 5 |
| 1.22 | Rotationskörper | 5 |
| 1.23 | trigonometrische Gleichungen | 5 |

1 Analysis

1.1 Monotonie

- monoton wachsend: $x_1 < x_2; f(x_1) \leq f(x_2) \quad f'(x) \geq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton wachsend: $x_1 < x_2; f(x_1) < f(x_2) \quad f'(x) > 0 \quad [x_1; x_2]$
- monoton fallend: $x_1 < x_2; f(x_1) \geq f(x_2) \quad f'(x) \leq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton fallend: $x_1 < x_2; f(x_1) > f(x_2) \quad f'(x) < 0 \quad [x_1; x_2]$

1.2 globaler Verlauf

- Grad gerade: $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow \infty$
- Grad ungerade: $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$

1.3 Symmetrien bei GRF

- Sym. zur y -Achse: $f(-x) = f(x)$, alle Exponenten gerade
- Punktsym. zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$, alle Exponenten ungerade

1.4 Nullstellen

$f(x) = 0$ schneiden der x -Achse, Schnittpunkt y -Achse $S_y = (0|f(0))$

1.5 Extremstellen

(1. notwendig, 2. hinreichend)

| | | | |
|--------------|------------------|---------------------------|--|
| Hochpunkt: | $f'(x) = 0$ | Nst. von f' | |
| | $f''(x) < 0$ | VzW von f' von + nach - | (Rechtskurve) |
| Tiefpunkt: | $f'(x) = 0$ | Nst. von f' | |
| | $f''(x) > 0$ | VzW von f' von - nach + | (Linkskurve) |
| Sattelpunkt: | $f'(x) = 0$ | Nst. von f' | (= Wendepunkt mit waagerechter Tangente) |
| | $f''(x) = 0$ | kein VzW von f' | oder |
| | $f'''(x) \neq 0$ | kein VzW von f'' | |

1.6 Wendestellen

Extremstellen von f' :

- $f''(x) = 0$
- $f'''(x) \neq 0$
(> 0 extrem fallend, < 0 extrem steigend)

1.7 Anzahl *-Stellen

| n | Nst | Est | Wst |
|----------|-----------|---------------|---------------|
| gerade | 0 bis n | 1 bis $(n-1)$ | 0 bis $(n-2)$ |
| ungerade | 1 bis n | 0 bis $(n-1)$ | 1 bis $(n-2)$ |

1.8 Extremwertaufgaben

1. Welche Größe soll max. bzw. min. werden?
2. Grundformel für ges. Größe
3. Bestimmen einer Formel für die ges. Größe mit nur einer Variablen mithilfe der Aufgaben
4. Bestimmen der ES der gefundenen Funktion
5. Antwortsatz

1.9 Funktionenscharen

- Menge aller Funktionen f_k : Funktionenschar
- Menge der zugehörigen Graphen: Kurvenschar

Funktionsuntersuchung abhängig von k : Ortskurven Bsp. $W(t|2t) \Rightarrow x = t \quad y = 2t = 2x \Rightarrow W(t|5) \rightarrow y = 5 \Rightarrow W(2|2x) \rightarrow x = 2$

1.10 Lineare Gleichungssysteme

Im GTR mit `rref()` lösen, sonst Additionsverfahren.

1.11 Regression

GTR: `STAT` → Calc (ab 4.)

1.12 Ableiten

- Produktregel:
 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
 $f'(x) = u'v + uv'$
- Quotientenregel:
 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
 $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Verkettung:
 $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$
 $f'(x) = u'v \cdot v'$
- Spezielle Ableitungen:
 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
 $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
 $f(x) = \ln x$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
 $f(x) = b^x$
 $f'(x) = \ln b \cdot b^x$
 $f(x) = e^x$
 $f'(x) = e^x = f(x)$

1.13 Tangenten

- $t : y = mx + c$
- Berührungspunkt: $B(u|f(u))$
- Punkt außerhalb: $P(x|y)$
- $m = \frac{f(u)-y}{u-x}$ (Differenzenquotient) = $f'(u)$ (Differentialquotient)
- Gleichung: $t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

1.14 Normale

$$\bullet n : y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

$$\bullet m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t}$$

1.15 Logarithmus

$$\bullet a^x = b \rightarrow x = \log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

$$\bullet a^{\log_a(b)} = b$$

$$\bullet \log_a(a^x) = x$$

$$\bullet \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\bullet \log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\bullet \log_a(b^t) = t \cdot \log_a(b)$$

$$\bullet \log_a 1 = 0$$

1.16 e-Funktion

$$\bullet f(x) = \frac{1}{2}e^{2(x-1)} + 2$$

1. Stauchung mit Faktor $\frac{1}{2}$

$$\bullet f'(x) = e^{2x-1}$$

2. Streckung mit Faktor 2

$$\bullet F(x) = \frac{1}{4}e^{2x-1} + 2x + c$$

3. Verschiebung von 1 nach rechts (x -Richtung)

4. Verschiebung von 2 nach oben (y -Richtung)

$$\bullet \log_e(x) = \ln(x)$$

$$\bullet \ln(1) = 0$$

$$\bullet \ln(e^x) = x \rightarrow \ln(e) = 1$$

$$\bullet e^x = a \rightarrow \ln(a) = x$$

$$\bullet e^{\ln(x)} = x$$

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

1.17 Wachstum

$$\bullet \text{linear: } f'(t) = k \quad f(t) = k \cdot t + c \quad c = f(0)$$

$$\bullet \text{exponentiell: } f'(t) = k \cdot f(t) \quad f(t) = c \cdot e^{kt} \quad c = f(0) \quad b = e^{\ln(b)} = e^k \quad k = \ln(b) = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad T_H = \frac{\ln(2)}{k}$$

$$\bullet \text{beschränkt: } f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \quad f(t) = S - c \cdot e^{-kt} \quad c = S - f(0)$$

1.18 Asymptoten

• senkrechte Asymptoten an Polstellen (Definitionslücken)

• waagerechte Asymptoten:

– Gebrochenrationale Funktionen:

1. Zählergrad < Nenngrad: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

2. Zählergrad = Nenngrad: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

3. Zählergrad > Nenngrad: keine Asymptote

– e-Funktion bzw. exponentielle Funktionen:

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot e^{-x} + c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot e^x + c = c$$

1.19 Aufleiten

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \sin(2x - 2) + 4x^5 + 5$ $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$
- $F(x) = 2\sqrt{x} - 3 \cos(2x - 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} x^6 + 5x + c$
- $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2} \cos(2x - 2) + \frac{2}{3} x^6 + 5x + c$ • $f(x) = \frac{1}{x}$
- $F(x) = \ln x$
- $f(x) = \sin(3x + 1)$
- $F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + c$
- $f(x) = \ln x; x > 0$
- $F(x) = x \cdot \ln x - x$
- $f(x) = ax^n$

1.20 Integral

- $I_a(b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Nst. berechnen für Fkt. über und unter x -Achse:
 $|\int_a^x f(x) dx| + |\int_x^b f(x) dx|$
- Schnittstellen für Fläche zw. zwei Fkt.
 $|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx|$

1.21 Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

1.22 Rotationskörper

- $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$ (um y -Achse: nach x umstellen, evtl. neue Schnittstellen berechnen)
- zw. 2 Fkt.: $V = \pi \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

1.23 trigonometrische Gleichungen

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d = a \cdot \sin(bx - bc) + d$$

a : Streckung in y -Richtung (Amplitude)

b : Streckung in x -Richtung (Frequenz)

c : Verschiebung in x -Richtung

d : Verschiebung in y -Richtung

p : Periode ($p = \frac{2\pi}{b}$)