

Zusammenfassung Abiturstoff Mathematik

T. Schneider, J. Wirtz, M. Blessing

2015

Inhaltsverzeichnis

1. Analysis	1	1.19. Aufleiten	5
1.1. Monotonie	1	1.20. Integral	5
1.2. Globaler Verlauf	1	1.21. Mittelwert	5
1.3. Symmetrien bei GRF	2	1.22. Rotationskörper	5
1.4. Nullstellen	2	1.23. Trigonometrische Gleichungen	5
1.5. Extremstellen	2	2. Geometrie	6
1.6. Wendestellen	2	2.1. Umformung Ebenen	6
1.7. Anzahl *-Stellen	2	2.2. Lagebeziehungen	6
1.8. Extremwertaufgaben	2	2.3. Abstände	7
1.9. Funktionenscharen	3	3. Stochastik	7
1.10. Lineare Gleichungssysteme	3	3.1. P, n, r, p	7
1.11. Regression	3	3.1.1. P gesucht	7
1.12. Ableiten	3	3.1.2. n gesucht	7
1.13. Tangenten	3	3.1.3. p gesucht	8
1.14. Normale	3	3.2. Signifikanztest	8
1.15. Logarithmus	4	3.2.1. rechtsseitig	8
1.16. e -Funktion	4	3.2.2. linksseitig	8
1.17. Wachstum	4	A. Lizenz	8
1.18. Asymptoten	4		

1. Analysis

1.1. Monotonie

- monoton wachsend: $x_1 < x_2; f(x_1) \leq f(x_2) \quad f'(x) \geq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton wachsend: $x_1 < x_2; f(x_1) < f(x_2) \quad f'(x) > 0 \quad [x_1; x_2]$
- monoton fallend: $x_1 < x_2; f(x_1) \geq f(x_2) \quad f'(x) \leq 0 \quad [x_1; x_2]$
- streng monoton fallend: $x_1 < x_2; f(x_1) > f(x_2) \quad f'(x) < 0 \quad [x_1; x_2]$

1.2. Globaler Verlauf

- Grad gerade: $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow \infty$
- Grad ungerade: $x \rightarrow \infty; f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$

1.3. Symmetrien bei GRF

- Sym. zur y -Achse: $f(-x) = f(x)$, alle Exponenten gerade
- Punktsym. zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$, alle Exponenten ungerade

1.4. Nullstellen

$f(x) = 0$ schneiden der x -Achse, Schnittpunkt y -Achse $S_y = (0|f(0))$

1.5. Extremstellen

(1. notwendig, 2. hinreichend)

Hochpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von f'	
	$f''(x) < 0$	VzW von f' von + nach -	(Rechtskurve)
Tiefpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von f'	
	$f''(x) > 0$	VzW von f' von - nach +	(Linkskurve)
Sattelpunkt:	$f'(x) = 0$	Nst. von f'	(= Wendepunkt mit waagerechter Tangente)
	$f''(x) = 0$	kein VzW von f'	oder
	$f'''(x) \neq 0$	kein VzW von f''	

1.6. Wendestellen

Extremstellen von f' :

- $f''(x) = 0$
- $f'''(x) \neq 0$
(> 0 extrem fallend, < 0 extrem steigend)

1.7. Anzahl *-Stellen

n	Nst	Est	Wst
gerade	0 bis n	1 bis $(n-1)$	0 bis $(n-2)$
ungerade	1 bis n	0 bis $(n-1)$	1 bis $(n-2)$

1.8. Extremwertaufgaben

1. Welche Größe soll max. bzw. min. werden?
2. Grundformel für ges. Größe
3. Bestimmen einer Formel für die ges. Größe mit nur einer Variablen mithilfe der Aufgaben
4. Bestimmen der ES der gefundenen Funktion
5. Antwortsatz

1.9. Funktionenscharen

- Menge aller Funktionen f_k : Funktionenschar
- Menge der zugehörigen Graphen: Kurvenschar

Funktionsuntersuchung abhängig von k : Ortskurven Bsp. $W(t|2t) \Rightarrow x = t \quad y = 2t = 2x \Rightarrow W(t|5) \rightarrow y = 5 \Rightarrow W(2|2x) \rightarrow x = 2$

1.10. Lineare Gleichungssysteme

Im GTR mit `rref()` lösen, sonst Additionsverfahren.

1.11. Regression

GTR: STAT \rightarrow CALC (ab 4.)

1.12. Ableiten

- Produktregel:
 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
 $f'(x) = u'v + uv'$
- Quotientenregel:
 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
 $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Verkettung:
 $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$
 $f'(x) = u'v \cdot v'$
- Spezielle Ableitungen:
 - $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 - $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
 $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
 - $f(x) = \ln x$
 $f'(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = b^x$
 $f'(x) = \ln b \cdot b^x$
 - $f(x) = e^x$
 $f'(x) = e^x = f(x)$

1.13. Tangenten

- $t: y = mx + c$
- Berührungspunkt: $B(u|f(u))$
- Punkt außerhalb: $P(x|y)$
- $m = \frac{f(u)-y}{u-x}$ (Differenzenquotient) $= f'(u)$ (Differentialquotient)
- Gleichung: $t: y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

1.14. Normale

- $n : y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

- $m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t}$

1.15. Logarithmus

- $a^x = b \rightarrow x = \log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$

- $\log_a(b^t) = t \cdot \log_a(b)$

- $\log_a(a^x) = x$

- $a^{\log_a(b)} = b$

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

- $\log_a 1 = 0$

1.16. e-Funktion

- $f(x) = \frac{1}{2}e^{2(x-1)} + 2$

1. Stauchung mit Faktor $\frac{1}{2}$

- $f'(x) = e^{2x-1}$

2. Streckung mit Faktor 2

- $F(x) = \frac{1}{4}e^{2x-1} + 2x + c$

3. Verschiebung von 1 nach rechts (x -Richtung)

4. Verschiebung von 2 nach oben (y -Richtung)

- $\log_e(x) = \ln(x)$

- $\ln(1) = 0$

- $\ln(e^x) = x \rightarrow \ln(e) = 1$

- $e^x = a \rightarrow \ln(a) = x$

- $e^{\ln(x)} = x$

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

1.17. Wachstum

- linear: $f'(t) = k \quad f(t) = k \cdot t + c \quad c = f(0)$

- exponentiell: $f'(t) = k \cdot f(t) \quad f(t) = c \cdot e^{kt} \quad c = f(0) \quad b = e^{\ln(b)} = e^k \quad k = \ln(b) = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad T_H = \frac{\ln(2)}{k}$

- beschränkt: $f'(t) = k \cdot (S - f(t)) \quad f(t) = S - c \cdot e^{-kb} \quad c = S - f(0)$

1.18. Asymptoten

- senkrechte Asymptoten an Polstellen (Definitionslücken)

- waagerechte Asymptoten:

- Gebrochenrationale Funktionen:

1. Zählergrad < Nennergrad: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

2. Zählergrad = Nennergrad: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

3. Zählergrad > Nennergrad: keine Asymptote

- e-Funktion bzw. exponentielle Funktionen:

- * $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot e^{-x} + c = c; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot e^x + c = c$$

1.19. Aufleiten

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3 \sin(2x - 2) + 4x^5 + 5$
 $F(x) = 2\sqrt{x} - 3 \cos(2x - 2) \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x^6 + 5x + c$
 $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2} \cos(2x - 2) + \frac{2}{3}x^6 + 5x + c$
- $f(x) = \sin(3x + 1)$
 $F(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + c$
- $f(x) = ax^n$
 $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
 $F(x) = \ln x$
- $f(x) = \ln x; x > 0$
 $F(x) = x \cdot \ln x - x$

1.20. Integral

- $I_a(b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Nst. berechnen für Fkt. über und unter x -Achse:
 $|\int_a^x f(x) dx| + |\int_x^b f(x) dx|$
- Schnittstellen für Fläche zw. zwei Fkt.
 $|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx|$

1.21. Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

1.22. Rotationskörper

- $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$ (um y -Achse: nach x umstellen, evtl. neue Schnittstellen berechnen)
- zw. 2 Fkt.: $V = \pi \cdot \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$

1.23. Trigonometrische Gleichungen

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d = a \cdot \sin(bx - bc) + d$$

a : Streckung in y -Richtung (Amplitude)

b : Streckung in x -Richtung (Frequenz) (Streckfaktor $\frac{1}{b}$, d.h. eine Dehnung erhält man mit $|b| < 1$, oder anders gesagt ist b proportional zur Frequenz)

p : Periode ($p = \frac{2\pi}{b}$)

c : Verschiebung in x -Richtung

d : Verschiebung in y -Richtung

2. Geometrie

- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$\begin{array}{c} \cancel{a_1} \quad \cancel{b_1} \\ a_2 \quad b_2 \\ \quad \times \\ a_3 \quad b_3 \\ \quad \times \\ a_1 \quad b_1 \\ \quad \times \\ a_2 \quad b_2 \\ \cancel{a_3} \quad \cancel{b_3} \end{array} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- Kreuzprodukt:

2.1. Umformung Ebenen

- Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_{s1} \\ r_{s2} \\ r_{s3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_{t1} \\ r_{t2} \\ r_{t3} \end{pmatrix}$

→ Normalvektor: $\vec{n} = \vec{r}_s \times \vec{r}_t$

- Normalform: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ (Koordinatenform)
Hesse'sche Normalform: $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 = d; \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$
- Koordinatenform: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3$
- Spurpunkte: KF nach 1 auflösen: $\frac{x_1}{x_{10}} + \frac{x_2}{x_{20}} + \frac{x_3}{x_{30}} \Rightarrow$ Spurpunkte sind $(x_{10}|0|0)$, $(0|x_{20}|0)$ und $(0|0|x_{30})$.
Parameterform: Einen Punkt als Aufpunkt wählen, Richtungsvektoren zu den anderen bilden

2.2. Lagebeziehungen

- Gerade–Gerade: $\vec{u} = s \cdot \vec{v}$? Richtungsvektoren vielfache?
✓: Liegt Aufpunkt auf der Gerade? $\vec{a} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$? ✓: identisch, ✗: parallel
✗: $\vec{a} + r \cdot \vec{u} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ – Gleichung geht auf $\rightarrow r$ einsetzen und Schnittpunkt *oder* Gleichung unlösbar \rightarrow windschief
- Ebene–Ebene: $\vec{n}_1 = s \cdot \vec{n}_2$? Normalenvek. Vielfache?
✓: gleiche Normalform? ✓: identisch, ✗: parallel
✗: in Koordinatenform umwandeln, ein Parameter in Abhängigkeit von anderen, in PF der anderen einsetzen \rightarrow Schnittgerade
- Gerade–Ebene: g in KF von E einsetzen, auflösen:
 - $r = x \rightarrow$ Schnittpunkt (r in g einsetzen)
 - $x \neq y \rightarrow$ parallel
 - $x = y \rightarrow g$ liegt in E

2.3. Abstände

- Punkt–Punkt: $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_1)^2}$
- Punkt–Gerade: Ebene durch P mit $\vec{n} = \vec{u}$ (Richtungsvek.), NF in KF umrechnen, g in E einsetzen (schneiden), nach r auflösen, r in g einsetzen \rightarrow Punkt Q , $d(P, g) = d(P, Q)$
- Gerade–Gerade: parallel: (Stütz-)Punkt–Gerade
windschief: Ebene mit beiden Richtungsvektoren und P von g , $d(P_h, E)$
- Punkt–Ebene: $P(p_1|p_2|p_3), \vec{n} \cdot \vec{x} = d$: $d(P, E) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p} - d}{\vec{n} \cdot \vec{n}}$
- Gerade–Ebene: parallel: P von $g \rightarrow d(P, E)$
- Ebene–Ebene: parallel: P von $E \rightarrow d(P, F)$

3. Stochastik

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{Erwartungswert: } E(x) = n \cdot p$$

3.1. P, n, r, p

3.1.1. P gesucht

- genau r Treffer:
 $P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r} = \text{binompdf}(n, p, r)$
- höchstens r Treffer:
 $P(X \leq r) = \text{binomcdf}(n, p, r) = P(X = r) + P(X = r - 1) + \dots + P(X = 0)$
- mindestens r Treffer:
 $P(X \geq r) = 1 - P(X \leq r - 1)$
- weniger als r Treffer:
 $P(X < r) = P(X \leq r - 1)$
- mehr als r Treffer:
 $P(X > r) = P(X \leq r - 1)$
- mindestens r und höchstens s Treffer:
 $P(r \leq X \leq s) = P(X \leq s) - P(X \leq r - 1)$
- mehr als r und weniger als s Treffer:
 $P(r < X < s) = P(X \leq s - 1) - P(X \leq r)$

3.1.2. n gesucht

$$p = 0.28 \quad r = 4 \quad P(X \geq 4) = 0.85 \rightarrow P(X \leq 3) = 0.15$$

$Y_n = \text{binomcdf}(X, 0.28, 4)$, dann x -Wert suchen, dessen y -Wert kleiner (wegen mindestens) oder gleich 0.15 ist

3.1.3. p gesucht

$$n = 143 \quad r = 40 \quad P = 0.8$$

$$P(X \geq 40) \geq 0.8 \rightarrow P(X \leq 39) \leq 0.2, Y_n = \text{binomcdf}(143, X, 39), \text{ Schnittpunkt mit } Y_m = 0.2$$

3.2. Signifikanztest

Tipp für die Tabelle: 2ND TBLSET, TblStart= $E(x)$ (Erwartungswert)

3.2.1. rechtsseitig

- $H_0 : p_0 \leq$
- $\alpha \leq$ oder $\alpha =$ je nach Aufgabe
- $H_1 : p_1 >$
- Ablehnungsbereich: $\bar{A}[b; n]$
- binomialverteilte Zufallsvariable X :
- Annahmebereich: $A[0; b - 1]$
- $n =$
- gesucht ist das kleinste b mit $1 - P(X \leq b - 1) \leq \alpha$

$$Y_n = 1 - \text{binomcdf}(n, p, x - 1) \rightarrow \text{TABLE} : \frac{b \mid 1 - P(X \leq b - 1)}{\vdots \mid \vdots}$$

3.2.2. linksseitig

- $H_0 : p_0 \geq$
- $\alpha \leq$ oder $\alpha =$ je nach Aufgabe
- $H_1 : p_1 <$
- Ablehnungsbereich: $\bar{A}[0; a]$
- binomialverteilte Zufallsvariable X :
- Annahmebereich: $A[a + 1; n]$
- $n =$
- gesucht ist das größte a mit $P(X \leq a) \leq \alpha$

$$Y_n = \text{binomcdf}(n, p, x) \rightarrow \text{TABLE} : \frac{b \mid 1 - P(X \leq a)}{\vdots \mid \vdots}$$

A. Lizenz



Die Autoren haben dieses Werk in die Gemeinfreiheit – auch genannt Public Domain – *entlassen*, indem sie weltweit auf alle urheberrechtlichen und verwandten Schutzrechte verzichtet haben, soweit das gesetzlich möglich ist.

Sie dürfen das Werk kopieren, verändern, verbreiten und aufführen, sogar zu kommerziellen Zwecken, ohne um weitere Erlaubnis bitten zu müssen.

Siehe <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.de> für Details.