Übungsblatt 4

Lineare Algebra für Informatiker, PD Dr. Viktor Levandovskyy, SS 2016

Für Matrikelnummer: 357358
Abgabezeitpunkt: Thu 12 May 2016 10:00:00 AM CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Wed 11 May 2016 09:47:15 PM CEST

Die Lösungen der folgenden vier Aufgaben sind online abzugeben. Aufgabe 20 wird wie folgt bewertet: Jede richtig beantwortete Frage ergibt 2 Punkte. Jede falsch oder nicht beantwortete Frage ergibt 0 Punkte.		
20	[Ein Ergebnis dieser Aufgabe ist eine (2×2)-Matrix mit ganzzahligen Einträgen. Ein anderes Ergebnis dieser Aufgabe ist ein Tripel mit ganzzahligen Einträgen. Geben Sie nicht-negative ganze Zahlen ohne Vorzeichen und negative ganze Zahlen ohne Leerzeichen zwischen Vorzeichen und Absolutbetrag der ganzen Zahl ein. Geben Sie eine Matrix von der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ als `[a,b,c,d]` ein, ohne Leerzeichen. Geben Sie ein Tripel von der Gestalt (a,b,c) als `[a,b,c]` ein, ohne Leerzeichen.]	
	Bestimmen Sie $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ derart, dass (A) eine Basis von $\langle \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}} \cap \langle \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 22 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}}$ ist und $A_{2,2} = 1$ gilt.	________________
	Bestimmen Sie $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Q}^3$ derart, dass $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & c_3 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 26 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}} + \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -11 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Q}}$ ist.	________________
21	Bestimmen Sie die Dimensionen der folgenden Untervektorräume über den angegebenen Körpern.	
	$\{f \in \mathbb{C}[X] \mid f = 0 \text{ oder } \deg f \leq 8\}$ über $\mathbb{C}$	________________
	$\{x \in \mathbb{C}^{3\times 1} \mid \begin{pmatrix} -5 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} x = 0\}$ über $\mathbb{C}$	________________
	$\langle (-10,10,-1,5), (-8,1,-5,6), (1,-4,-2,1), (-4,2,-2,3) \rangle$ über $\mathbb{F}_3$	________________
	$\mathrm{Col}(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 13 \end{pmatrix})$ über $\mathbb{F}_3$	________________
	$\langle (i-0)_{i\in\mathbb{N}_0}, (i-1)_{i\in\mathbb{N}_0}, (i-2)_{i\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (i-1001)_{i\in\mathbb{N}_0} \rangle$ über $\mathbb{R}$	________________

22	Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen Vektorraumhomomorphismen über den angegebenen Körpern sind.	
	$\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1 - x_2)$ über $\mathbb{Q}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, $x \mapsto x^7$ über $\mathbb{F}_7$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathbb{Q}[X]_{<3} \to \mathbb{Q}[X]_{<4}$, $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto (a_1 + a_2)X + a_1 X^2 + (a_1 - a_2)X^3$ über $\mathbb{Q}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, x + z)$ über $\mathbb{R}$	◯ Ja / ◯ Nein
	$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 6x + 5$ über $\mathbb{Q}$	◯ Ja / ◯ Nein
23	Es seien ein Körper K und K-Vektorraumhomomorphismen $\varphi \colon V \to W$, $\psi \colon W \to X$, $\rho \colon X \to Y$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen stets wahr?	
	Es ist $\operatorname{Im} \rho \nleq \operatorname{Im}(\rho \circ \psi)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es ist $\operatorname{Im}(\rho \circ \psi) \nsubseteq \operatorname{Im} \psi$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es ist $\operatorname{Ker}(\rho \circ \psi) \subseteq \operatorname{Ker} \psi$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Es ist $\operatorname{Ker} \psi \leq \operatorname{Ker}(\rho \circ \psi)$.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn ψ nicht injektiv ist und ρ nicht injektiv ist, dann ist $\rho \circ \psi$ nicht injektiv.	◯ Ja / ◯ Nein

Die folgenden drei Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

24 Es seien ein Körper K und ein K-Vektorraumhomomorphismus $\varphi \colon V \to W$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für jeden K-Untervektorraum U von V ist $\varphi(U)$ ein K-Untervektorraum von W.

(b) Für jeden K-Untervektorraum U von W ist $\varphi^{-1}(U)$ ein K-Untervektorraum von V.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes n-Tupel $(s_1, \dots, s_n)$ in V ist $\varphi(\langle s_1, \dots, s_n \rangle) = \langle \varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n) \rangle$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes n-Tupel $(s_1, \dots, s_n)$ in V gilt: Wenn $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ linear unabhängig in W ist, dann ist $(s_1, \dots, s_n)$ linear unabhängig in V.

(e) Für jeden endlichdimensionalen K-Untervektorraum U von V ist $\varphi(U)$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von W und es gilt $\dim_K \varphi(U) \leq \dim_K U$.

Nun sei φ injektiv. Zeigen Sie:

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes n-Tupel $(s_1, \dots, s_n)$ in V gilt: Genau dann ist $(s_1, \dots, s_n)$ linear unabhängig in V, wenn $(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$ linear unabhängig in W ist.

(g) Für jeden endlichdimensionalen K-Untervektorraum U von V gilt $\dim_K \varphi(U) = \dim_K U$.

25	(a) Es seien ein Körper K, eine Menge X, ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ in X gegeben. Zeigen Sie: (i) Die Abbildung $\varepsilon\colon \mathrm{Map}(X,K) \to K^n$, $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$ ist ein K-Vektorraumhomomorphismus. (ii) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und jedes m-Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ in $\mathrm{Map}(X,K)$ gilt: Wenn $$((f_1(x_1), \dots, f_1(x_n)), \dots, (f_m(x_1), \dots, f_m(x_n)))$$ linear unabhängig in K^n ist, dann ist $(f_1, \dots, f_m)$ linear unabhängig in $\mathrm{Map}(X,K)$. (b) (i) Es sei ein Körper K gegeben. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $f_k\colon K \to K$, $x \mapsto x^k$. Untersuchen Sie, ob (f_0, f_1, f_2) linear unabhängig in $\mathrm{Map}(K,K)$ ist. (ii) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Map}_{\mathrm{even}}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$ und $\mathrm{Map}_{\mathrm{odd}}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$.
26	Es sei $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ gegeben durch $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Ferner sei $\varphi\colon \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $A \mapsto B^{\mathrm{tr}}A + AB$. Zeigen Sie, dass φ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus ist und bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Ker}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$.

Aufgabe 20 sowie die Aufgabenteile 24(f) und 24(g) und 25(b)(ii) sind Bonusaufgaben. Aufgabe 20 ergibt maximal 4 Punkte. Aufgabe 24 ergibt maximal 7 Punkte. Aufgabe 25 ergibt maximal 9 Punkte. Jede andere Aufgabe ergibt maximal 5 Punkte. Abgabe bis Donnerstag, 12.05.2016, 10:00 Uhr.