

## Pflichtteil

### Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$ .

(2P)

### Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral  $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$ .

(2P)

### Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung  $x^4 = 4 + 3x^2$ .

(3P)

### Aufgabe 4

Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = \cos(x)$  und  $g(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$ .

a)

Beschreiben Sie, wie man den Graphen von  $g$  aus dem Graphen von  $f$  erhält.

b)

Bestimmen Sie die Nullstellen von  $g$  für  $0 \leq x \leq 4$ .

(4P)

### Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt die Graphen  $K_f$  und  $K_g$  zweier Funktionen  $f$  und  $g$ .

a)

Bestimmen Sie  $f(g(3))$ .

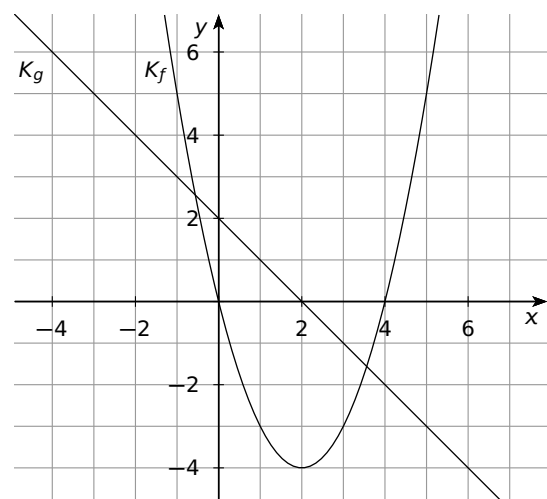
Bestimmen Sie einen Wert für  $x$  so, dass  $f(g(x)) = 0$  ist.

b)

Die Funktion  $h$  ist gegeben durch

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Bestimmen Sie  $h'(2)$ .



(4P)



## Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebenen  $E: x_1 + x_2 = 4$  und  $F: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ .

a)

Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.  
Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von  $E$  und  $F$  an.

b)

Die Ebene  $G$  ist parallel zur  $x_1$ -Achse und schneidet die  $x_2x_3$ -Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene  $F$ .

Geben Sie eine Gleichung der Ebene  $G$  an.

(5P)

## Aufgabe 7

Gegeben sind die Punkte  $A(1 | 10 | 1)$ ,  $B(-3 | 13 | 1)$  und  $C(2 | 3 | 1)$ .

Die Gerade  $g$  verläuft durch  $A$  und  $B$ .

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $C$  von der Geraden  $g$ .

(4P)

## Aufgabe 6

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a)

Formulieren Sie ein Ereignis  $A$ , für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b)

Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

(3P)

## Aufgabe 9

Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.

Die Kugel berührt diese Ebene.

Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührungspunkt bestimmen kann.

(3P)



## Wahlteil Aufgabe A 1

### Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$ .  
Ihr Graph ist  $K$ .

a)

$K$  besitzt einen Extrempunkt und einen Wendepunkt.  
Geben Sie deren Koordinaten an.  
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von  $K$  an.  
Skizzieren Sie  $K$ .

(4P)

b)

Für jedes  $u > 0$  sind  $O(0 | 0)$ ,  $P(u | 0)$  und  $Q(u | f(u))$  die Eckpunkte eines Dreiecks.  
Bestimmen Sie einen Wert für  $u$  so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 hat.  
Für welchen Wert von  $u$  ist das Dreieck  $OPQ$  gleichschenkelig?

(4P)

c)

Auf der  $x$ -Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion  $f$  den Mittelwert 2,2 besitzt.  
Bestimmen Sie die Grenzen eines solchen Intervalls.

(3P)

### Aufgabe A 1.2

Gegeben ist für jedes  $t > 0$  eine Funktion  $f_t$  durch  $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$ .

Bestimmen Sie  $t$  so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von  $f_t$  den Abstand 13 voneinander haben.

(4P)



## Wahlteil Aufgabe A 2

### Aufgabe A 2.1

Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion  $f$  mit

$$f(t) = \frac{1.300.000 \cdot t}{t^4 + 30.000} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 30$$

( $t$  in Stunden nach Beobachtungsbeginn;  $f(t)$  in Fahrzeuge pro Stunde).

Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a)

Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .

Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal?

Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen.

(4P)

b)

Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.

Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen?

Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang?

Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde?

(6P)

### Aufgabe A 2.2

Für jedes  $a > 0$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi.$$

Der Graph von  $f_a$  ist  $G_a$ .

a)

$G_a$  besitzt einen Extrempunkt.

Bestimmen Sie dessen Koordinaten.

(2P)

b)

Durch welche Punkte der  $y$ -Achse verläuft kein Graph  $G_a$ ?

(3P)



## Wahlteil Aufgabe B 1

### Aufgabe B 1.1

Gegeben sind die Punkte  $A(5 | -5 | 0)$ ,  $B(5 | 5 | 0)$ ,  $C(-5 | 5 | 0)$  und  $D(-5 | -5 | 0)$ .  
Das Quadrat  $ABCD$  ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze  $S(0 | 0 | 12)$ .

a)

Die Seitenfläche  $BCS$  liegt in der Ebene  $E$ .

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von  $E$ .

Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche  $BCS$  und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $BCS$ .

(4P)

b)

Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben.

Einer dieser Quader hat den Eckpunkt  $Q(2, 5 | 2, 5 | 0)$ .

Berechnen Sie sein Volumen.

Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.

Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante  $BS$ ?

(4P)

### Aufgabe B 1.2

In einem Gefäß  $G1$  sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.

In einem Gefäß  $G2$  sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a)

Aus Gefäß  $G1$  wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.

Aus Gefäß  $G2$  wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen.

(4P)

b)

Nun werden aus  $G1$  zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß  $G2$  gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus  $G2$  gezogen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz?

(3P)



## Wahlteil Aufgabe B 2

### Aufgabe B 2.1

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten  $A(10 \mid 6 \mid 0)$ ,  $B(0 \mid 6 \mid 0)$ ,  $C(0 \mid 0 \mid 3)$  und  $D(10 \mid 0 \mid 3)$  ist im Punkt  $F(5 \mid 6 \mid 0)$  ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive  $x_3$ -Richtung zeigt.

Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt  $L(8 \mid 10 \mid 2)$  (Koordinatengaben in m).

a)

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E$ , in der die Platte liegt.  
Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.  
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.  
(Teilergebnis:  $E : x_2 + 2x_3 = 6$ )

(3P)

b)

Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.  
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.  
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

(3P)

c)

Die Lichtquelle bewegt sich von  $L$  aus auf einer zur  $x_1x_2$ -Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.  
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

(3P)

### Aufgabe B 2.2

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5 %.

a)

Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte.  
Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.  
Berechnen Sie  $P(X \leq 30)$ .  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von  $X$  um weniger als 10 vom Erfahrungswert von  $X$  ab?

(3P)

b)

Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2 % der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese  $H_0$  soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.  
Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5 % betragen soll?

(3P)